

تطبيقات في حساب التفاضل والتكامل

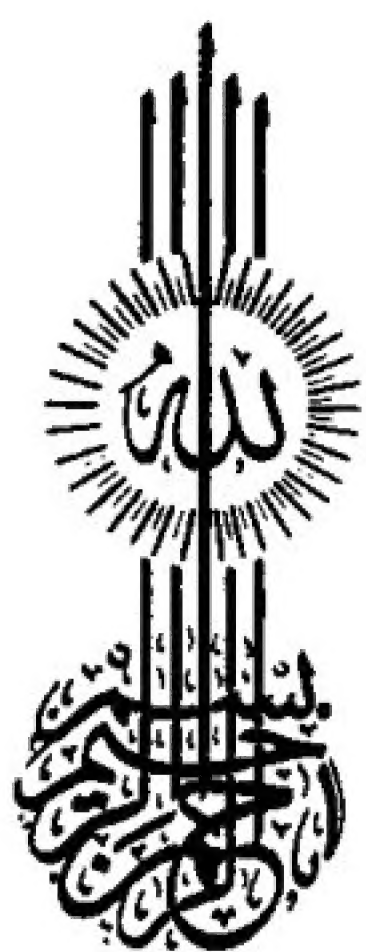
تأليف

د. سلمان بن عبدالرحمن السلطان

د. إبراهيم ديب سرميني

دار جامعة
الملك سعود للنشر
KING SAUD UNIVERSITY PRESS





تطبيقات في حساب التفاضل والتكامل

تأليف

د. سلمان بن عبدالرحمن السلطان

قسم الرياضيات - كلية العلوم
جامعة الملك سعود

د. إبراهيم ديب سرميني

الجمعية السعودية للعلوم الرياضية
جامعة الملك سعود

دار جامعة
الملك سعود للنشر
KING SAUD UNIVERSITY PRESS



ص.ب ٦٨٩٥٣ - الرياض ١١٥٣٧ المملكة العربية السعودية

ح) دار جامعة الملك سعود للنشر، ١٤٤٠هـ (٢٠١٨م)

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

سرميني، إبراهيم ديب

تطبيقات في حساب التفاضل والتكامل. / إبراهيم ديب سرميني؛ سلمان

عبدالرحمن السلطان. - الرياض، ١٤٣٩هـ

٥٣٨ ص؛ ١٧ سم × ٢٤ سم

ردمك: ٦-٦٣٢-٥٠٧-٦٠٣-٩٧٨

١- التفاضل والتكامل أ. السلطان، سلمان عبدالرحمن (مؤلف مشارك)

ب. العنوان

١٤٣٩/٥٥٠٦

ديوي ٥١٥

رقم الإيداع: ١٤٣٩/٥٥٠٦

ردمك: ٦-٦٣٢-٥٠٧-٦٠٣-٩٧٨

نشر هذا الكتاب بناءً على موافقة المجلس العلمي في اجتماعه السادس عشر للعام الدراسي ١٤٣٧/١٤٣٨هـ المعقود بتاريخ ١٤٣٨/٨/٥هـ الموافق ١/٥/٢٠١٧م، بعد استيفائه شروط التحكيم العلمي بالجامعة.

جميع حقوق النشر محفوظة. لا يسمح بإعادة نشر أي جزء من الكتاب بأي شكل وبأي وسيلة سواء كانت إلكترونية أو آلية بما في ذلك التصوير والتسجيل أو الإدخال في أي نظام حفظ معلومات أو استعادتها بدون الحصول على موافقة كتابية من دار جامعة الملك سعود للنشر.

المقدمة

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على نبينا محمد الأمين الذي أرسل هداية للعالمين. لقد حث الإسلام على القراءة والتعلم فكان أول ما أنزل على رسولنا محمد (صلى الله عليه وسلم) قوله تعالى: ﴿اقْرَأْ بِاسْمِ رَبِّكَ الَّذِي خَلَقَ﴾ (١)، وقد حث الرسول عليه الصلاة والسلام على طلب العلم ورغب فيه بقوله: "من سلك طريقا يلتمس فيه علما سهل الله له طريقا إلى الجنة"، فانطلاقا من هذا المبدأ الذي نؤمن به وندعو إليه غيرنا قمنا بتأليف كتابنا هذا الذي أسميناه تطبيقات في حساب التفاضل والتكامل ويتكون الكتاب من الفصول التالية:

الفصل الأول: المستقيمات والنسب المثلثية للزوايا.

الفصل الثاني: المتباينات.

الفصل الثالث: الدوال الحقيقية.

الفصل الرابع: النهايات.

الفصل الخامس: الاتصال.

الفصل السادس: المشتقات.

الفصل السابع: خواص الدوال القابلة للاشتقاق.

الفصل الثامن: رسم المنحنيات.

الفصل التاسع: التطبيقات.

الفصل العاشر: الدوال الأسية واللوغاريتمية – التكامل.

الفصل الحادي عشر: القطوع المخروطية.

الفصل الثاني عشر: الدوال في عدة متغيرات.

الفصل الثالث عشر: المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى.

الفصل الرابع عشر: المعادلات الوسيطة والإحداثيات القطبية.
 الفصل الخامس عشر: الدوال الزائدية.
 الفصل السادس عشر: قاعدة لوبيتال.
 الفصل السابع عشر: التكاملات المعتلة.
 الفصل الثامن عشر: تطبيقات في حساب التكامل باستخدام الإحداثيات الوسيطة والقطبية

ملحق: جداول الصيغ الرياضية - تمارين عامة - نماذج اختبارات.

ثبت المصطلحات: (عربي - إنجليزي) و(إنجليزي - عربي).

مراجع الكتاب

ومن أهم سمات هذا الكتاب ما يلي:

- ١- يتضمن ما يربو على مائتين وتسعة وثمانين (٢٨٩) مثال محلول، وأغلب هذه الأمثلة مكون من عدة فقرات.
- ٢- يتضمن ما يزيد على ألف ومئة وستة عشر (١١١٦) تمرين (أو مسألة لفظية) ومعظم هذه التمارين يتكون من عدة فقرات.
- ٣- يتضمن سبعة (٧) نماذج من نماذج الاختبارات النهائية مع الإجابات لجميع الأسئلة الموضوعية (الاختيارية).
- ٤- يتضمن الكتاب مسائل لفظية كثيرة ومتنوعة (بعضها محلول على هيئة أمثلة) تخدم تخصصات متعددة كالفيزياء والهندسة والكيمياء وعلم النبات، فضلاً عن الرياضيات التطبيقية.
- ٥- كتبت فصول الكتاب بصورة متسلسلة وبطريقة تجعل مادة الكتاب مستقلة بنفسها مما يريح القارئ من عناء الرجوع إلى ما سبق أن درسه فيما قبل الجامعة.
- ٦- يساعد الطالب غير المتخصص في الرياضيات لكون مادة الكتاب قدمت بشكل مبسط دون اللجوء للتعمق في النظريات الرياضية.
- ٧- يساعد الطالب المتخصص بالرياضيات لكون مادة الكتاب تعطيه موجزاً متكاملًا لأهم ما تجب معرفته لطالب الرياضيات في السنة الأولى من الدراسة الجامعية أو ما يعادلها من كليات أو معاهد أخرى.
- ٨- يشمل الكتاب في طبعته الرابعة جميع مفردات بل محتويات أكثر من مقرر في الرياضيات في جامعة الملك سعود.
- ٩- إن الزيادة المضافة في الطبعة الرابعة تزيد عن سابقتها بنسبة ٥٦٪.

ولعله من المفيد أن نشير إلى أن مادة هذا الكتاب ظهرت بهذه الصورة بعد تدريسها لمرات عديدة من قبل عدة أساتذة أفاضل بقسم الرياضيات في جامعة الملك سعود فلهم منا جزيل الشكر والامتنان على ما أسدوه لنا من ملحوظات قيمة ترفع من قيمة الكتاب .

ونحن إذ نقدم هذا الكتاب للقارئ العربي سواء كان أستاذا أم طالبا فلنا أمل ورجاء في إهداء ما يستطيع أن يهديه لنا من ملحوظات بناءة تصب في خدمة تحسين الكتاب ليخدم أمتنا العربية وليكون إضافة طيبة للمكتبة العربية وله من الله الجزاء الأوفى. نسأل الله العون والتوفيق لما يحبه ويرضاه وأن يجعل عملنا هذا في موازين أعمالنا، إنه سميع مجيب.

المؤلفان

المحتويات
CONTENTS

المقدمة هـ

المحتويات ط

الفصل الأول: المستقيمت والدوال المثلثية ١

 (١, ١) المستقيمت في المستوي ١

 (١, ٢) الدائرة ١١

 (١, ٣) النسب المثلثية لزوايا حادة في مثلث قائم ١٢

 (١, ٤) التقدير الدائري للزوايا ١٥

 (١, ٥) طول قوس دائرة. مساحة قطاع دائري ١٦

 (١, ٦) النسب المثلثية لزاوية في الحالة العامة ١٧

 (١, ٧) حل المعادلات المثلثية ٢١

 (١, ٨) حل المعادلات من الدرجة الثانية ٢٥

 تمارين (١, ١) ٢٩

الفصل الثاني: المتباينات ٣٣

 (٢, ١) الفترات في مجموعة الأعداد الحقيقية IR ٣٣

 (٢, ٢) بعض المجموعات المستخدمة في هذا الكتاب ٣٤

 (٢, ٣) القيمة المطلقة ٣٤

 (٢, ٤) حل المتباينات ٣٥

تمارين (١, ٢) ٤٨

الفصل الثالث: الدوال الحقيقية ٥١

(١, ٣) الدالة الحقيقية ٥١

(٢, ٣) الدوال الزوجية والفردية والدورية ٥٦

(٣, ٣) التناظر في المستوي ٥٧

(٤, ٣) انسحاب منحنى باتجاه أحد المحورين الإحداثيين ٥٩

(٥, ٣) رسم بعض أنواع الدوال ٦٠

(٦, ٣) الدوال العكسية ٦٤

(٧, ٣) تركيب (دالة التركيب) ٦٨

تمارين (١, ٣) ٧٢

الفصل الرابع: النهايات ٧٥

(١, ٤) نهاية دالة ٧٥

(٢, ٤) النهاية عن يمين والنهاية عن يسار ٨٢

(٣, ٤) أوضاع عدم التعيين ٨٥

(٤, ٤) نظرية الشطيرة أو نظرية الساندويتش ٩١

(٥, ٤) النهايات المثلثية ٩٢

تمارين (١, ٤) ١٠٠

الفصل الخامس: الاتصال ١٠٥

(١, ٥) اتصال دالة ١٠٥

(٢, ٥) الاتصال عن يمين والاتصال عن يسار ١٠٨

(٣, ٥) خواص الدوال المتصلة ١١٠

تمارين (١, ٥) ١١٣

الفصل السادس: المشتقات	١١٧
(١, ٦) المعنى الهندسي للمشتقة	١١٧
(٢, ٦) تعريف المشتقة	١١٨
(٣, ٦) مشتقة دالة عند نقطة	١١٩
(٤, ٦) مشتقات الدوال الجبرية	١٢١
(٥, ٦) مشتقات الدوال المثلثية	١٢٩
(٦, ٦) قاعدة السلسلة	١٣٢
(٧, ٦) الاشتقاق الضمني	١٣٤
(٨, ٦) المشتقات من مراتب عليا	١٣٨
(٩, ٦) الدوال المثلثية العكسية	١٤٠
(١٠, ٦) التقريب الخطي	١٥١
(١١, ٦) طريقة نيوتن لإيجاد الجذور التقريبية للدوال	١٥٥
تمارين (١, ٦)	١٥٧

الفصل السابع: خواص الدوال القابلة للاشتقاق	١٦٣
(١, ٧) القيم القصوى للدوال	١٦٣
(٢, ٧) النظرية الأساسية للاتصال	١٦٧
تمارين (١, ٧)	١٦٩
(٣, ٧) نظرية رول ونظرية القيمة المتوسطة	١٧٠
تمارين (٢, ٧)	١٧٤
(٤, ٧) اختبار المشتقة الأولى	١٧٦
(٥, ٧) التقعر والتحدب	١٧٩
تمارين (٣, ٧)	١٨٥

الفصل الثامن: رسم المنحنيات	١٨٧
(١, ٨) المستقيمات المقاربة الأفقية والعمودية	١٨٧

١٩١	(٨, ٢) رسم المنحنيات
٢١٤	تمارين (٨, ١)
٢١٧	الفصل التاسع: التطبيقات
٢١٧	(٩, ١) معدلات التغير
٢٢٩	(٩, ٢) الأمثلة
٢٤٠	تمارين (٩, ١)
٢٤٣	الفصل العاشر: الدوال الأسية واللوغاريتمية. التكامل
٢٤٣	(١٠, ١) الدوال الأسية واللوغاريتمية
٢٥٣	(١٠, ٢) التكامل غير المحدد
٢٥٨	(١٠, ٣) التكامل بالتعويض
٢٦١	(١٠, ٤) التكامل بالتجزئ
٢٦٥	(١٠, ٥) التكامل المحدد
٢٧٣	تمارين (١٠, ١)
٢٧٧	(١٠, ٦) تكامل حاصل ضرب نسبتي مثلثيتين
٢٧٨	(١٠, ٧) التكاملات المثلثية من الشكل $\int \sin^m x \cos^n x dx$
٢٨٠	(١٠, ٨) التكاملات المثلثية من الشكل $\int \tan^m x \sec^n x dx$
٢٨٦	تمارين (١٠, ٢)
٢٨٧	(١٠, ٩) التعويضات المثلثية
٢٩٤	تمارين (١٠, ٣)
٢٩٦	(١٠, ١٠) تكامل الدوال الكسرية باستخدام الكسور الجزئية
٣٠٤	(١٠, ١١) التكاملات من الشكل: $\int f(\sin x, \cos x, \tan x) dx$
٣٠٦	تمارين (١٠, ٤)

٣٠٨	(١٢, ١٠) التكاملات من الشكل: $\int f \left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots \right] dx$
٣١٠	(١٣, ١٠) التكاملات من الشكل: $\int f(e^{ax}) dx$
٣١١	تمارين (٥, ١٠)
٣١٢	(١٤, ١٠) حساب المساحات باستخدام الإحداثيات الديكارتية
٣١٨	تمارين (٦, ١٠)
٣١٩	(١٥, ١٠) طول قوس منحن معرف بمعادلته الديكارتية
٣٢١	تمارين (٧, ١٠)
٣٢٢	(١٦, ١٠) الحجم الدورانية بطريقة الأقراص الدائرية
٣٢٨	(١٧, ١٠) حساب الحجم بطريقة الشرائح الأسطوانية
٣٣١	تمارين (٨, ١٠)
٣٣٢	(١٨, ١٠) مساحة سطح دوراني
٣٣٤	تمارين (٩, ١٠)
٣٣٦	(١٩, ١٠) أمثلة عامة
٣٤٥	الفصل الحادي عشر: القطوع المخروطية
٣٤٥	(١, ١١) القطع المكافئ
٣٥١	(٢, ١١) القطع الناقص
٣٥٦	(٣, ١١) القطع الزائد
٣٦٣	تمارين (١, ١١)
٣٦٤	(٤, ١١) الأشكال المختلفة للقطوع المخروطية في حالتها الإنسحابية
٣٧٥	تمارين (٢, ١١)
٣٧٧	الفصل الثاني عشر: الدوال في عدة متغيرات
٣٧٧	(١, ١٢) الدوال بمتغيرين أو أكثر
٣٧٩	(٢, ١٢) تحديد نقطة في الفضاء الإقليدي ثلاثي البعد

٣٨١	(١٢, ٣) النهايات والاتصال
٣٨٤	(١٢, ٤) المشتقات الجزئية
٣٩١	تمارين (١٢, ١)
٢٩٢	(١٢, ٥) قاعدة السلسلة
٣٩٤	تمارين (١٢, ٢)
٣٩٥	(١٢, ٦) الدوال الضمنية
٣٩٩	تمارين (١٢, ٣)
٤٠١	الفصل الثالث عشر: المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى
٤٠٢	(١٣, ١) المعادلات التفاضلية القابلة للفصل
٤٠٣	(١٣, ٢) المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى
٤٠٦	تمارين (١٣, ١)
٤٠٧	الفصل الرابع عشر: المعادلات الوسيطة والإحداثيات القطبية
٤٠٧	(١٤, ١) المنحنيات القطبية
٤٢٠	(١٤, ٢) المنحنيات الوسيطة
٤٢٦	تمارين (١٤, ١)
٤٢٩	الفصل الخامس عشر: الدوال الزائدية
٤٢٩	(١٥, ١) الدوال الزائدية
٤٣٦	تمارين (١٥, ١)
٤٣٨	(١٥, ٢) الدوال الزائدية العكسية
٤٤٧	تمارين (١٥, ٢)
٤٤٩	الفصل السادس عشر: قاعدة لوبيتال
٤٤٩	(١٦, ١) صيغ عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ أو من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

المحتويات

س

٤٥٠	(١٦, ٢) صيغ عدم التعيين من الشكل $\infty - \infty$ أو $0 \times \infty$
٤٥٢	(١٦, ٣) صيغ عدم التعيين من الشكل 0^0 ، 1^∞ ، ∞^0
٤٥٥	تمارين (١٦, ١)
٤٥٧	الفصل السابع عشر: التكاملات المعتلة
٤٥٧	(١٧, ١) فترة التكامل محدودة
٤٦١	(١٧, ٢) فترة التكامل غير محدودة
٤٦٤	تمارين (١٧, ١)
٤٦٧	الفصل الثامن عشر: تطبيقات في حساب التكامل باستخدام الإحداثيات الوسيطة والقطبية
٤٦٧	(١٨, ١) المساحات
٤٧٢	تمارين (١٨, ١)
٤٧٤	(١٨, ٢) طول قوس
٤٨٠	تمارين (١٨, ٢)
٤٨١	(١٨, ٣) الحجم الدورانية
٤٨٥	تمارين (١٨, ٣)
٤٨٥	(١٨, ٤) السطوح الدورانية
٤٨٩	تمارين (١٨, ٤)
٤٩١	الملاحق: نماذج اختبارات
٤٩١	-النموذج الأول: اختبار نهائي
٤٩٤	-النموذج الثاني: اختبار نهائي
٤٩٧	-النموذج الثالث: اختبار نهائي
٥٠٠	-النموذج الرابع: الاختبار النهائي للفصل الأول
٥٠٣	-النموذج الخامس: الاختبار النهائي للفصل الثاني
٥٠٦	-النموذج السادس: اختبار نهائي

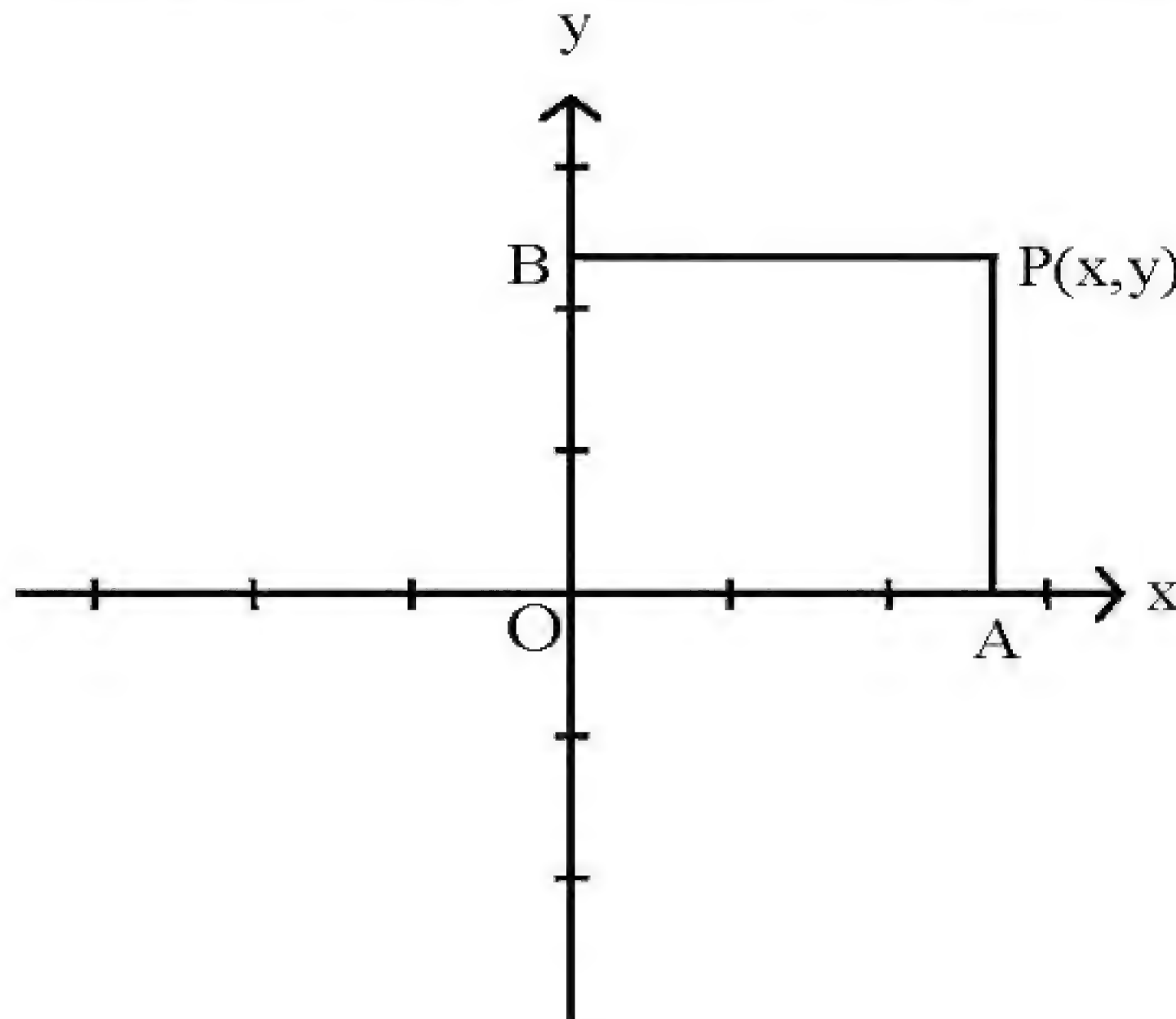
٥٠٩	-النموذج السابع: اختبار نهائي
٥١٢	إجابات نماذج الاختبارات
٥١٣	ملحق: جداول للصيغ الرياضية
٥١٨	تمارين عامة
٥٢٣	المراجع
٥٢٥	ثبت المصطلحات
٥٢٥	أولاً: عربي . إنجليزي
٥٢٩	ثانياً: إنجليزي . عربي
٥٣٥	كشاف الموضوعات

المستقيمات والدوال المثلثية

THE LINES AND TRIGONOMETRIC FUNCTIONS

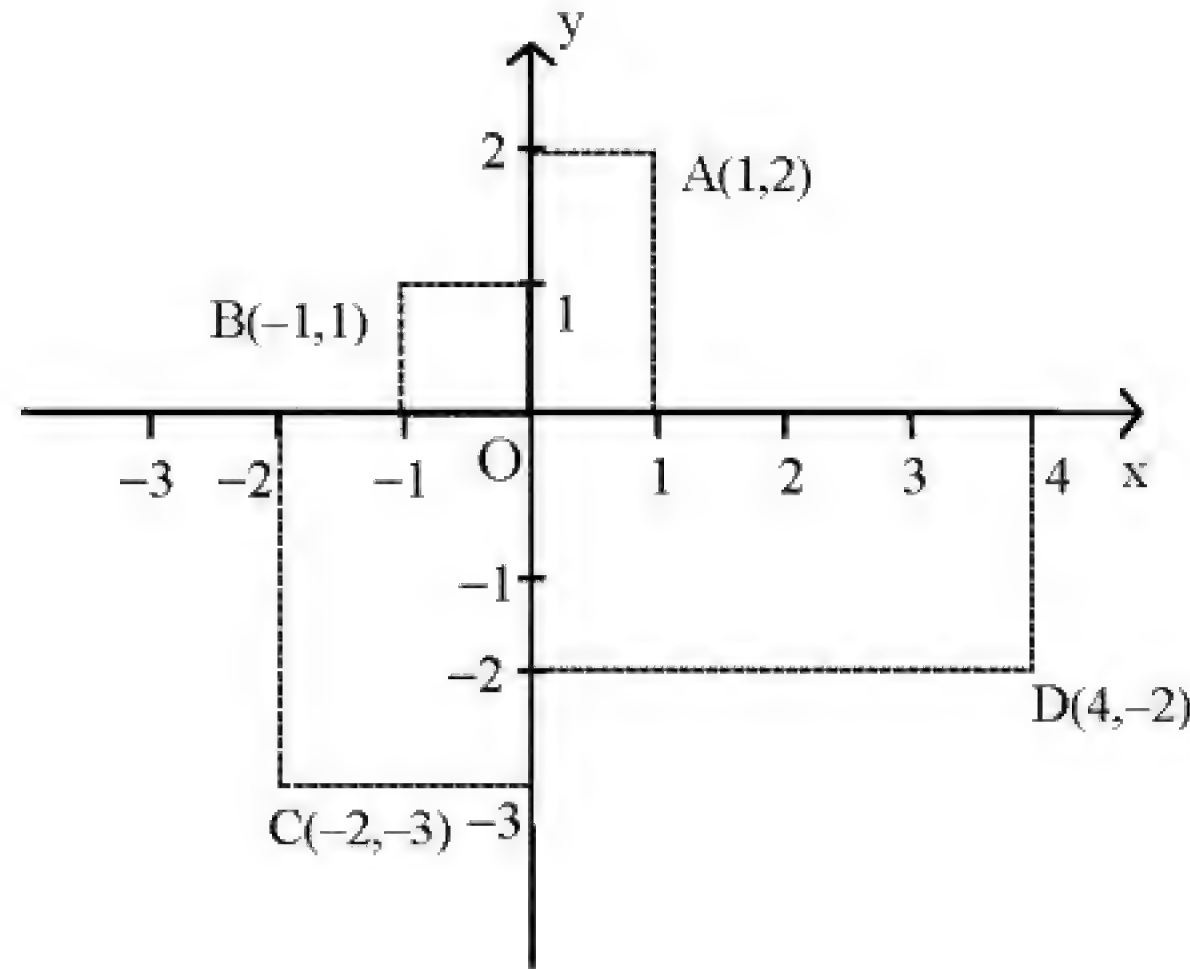
(١, ١) المستقيمات في المستوى

نحدد عادة نقاط المستوى xy (xy-plane) بنسبها إلى مجموعة إحداثية متعامدة (rectangular coordinate system) مكونة من محورين إحداثيين متعامدين ومتلاقين في نقطة O (Origin Point). نسمي هذه النقطة "نقطة الأصل" (مبدأ الإحداثيات)، كما نسمي المحورين: الأفقي بالمحور x (x-axis) أو المحور السيني والعمودي بالمحور y (y-axis) أو المحور الصادي، شكل (١, ١).



شكل (١, ١).

تحدد النقطة P في هذا المستوي بزوج مرتب (ordered pair) من الأعداد الحقيقية (x, y) . الإحداثي x يحدد النقطة A مسقط P على المحور x ، الإحداثي y يحدد النقطة B مسقط P على المحور y . فمثلا النقاط $A(1, 2)$ ، $B(-1, 1)$ ، $C(-2, -3)$ ، $D(4, -2)$ تتحدد كما في الشكل (١، ٢).



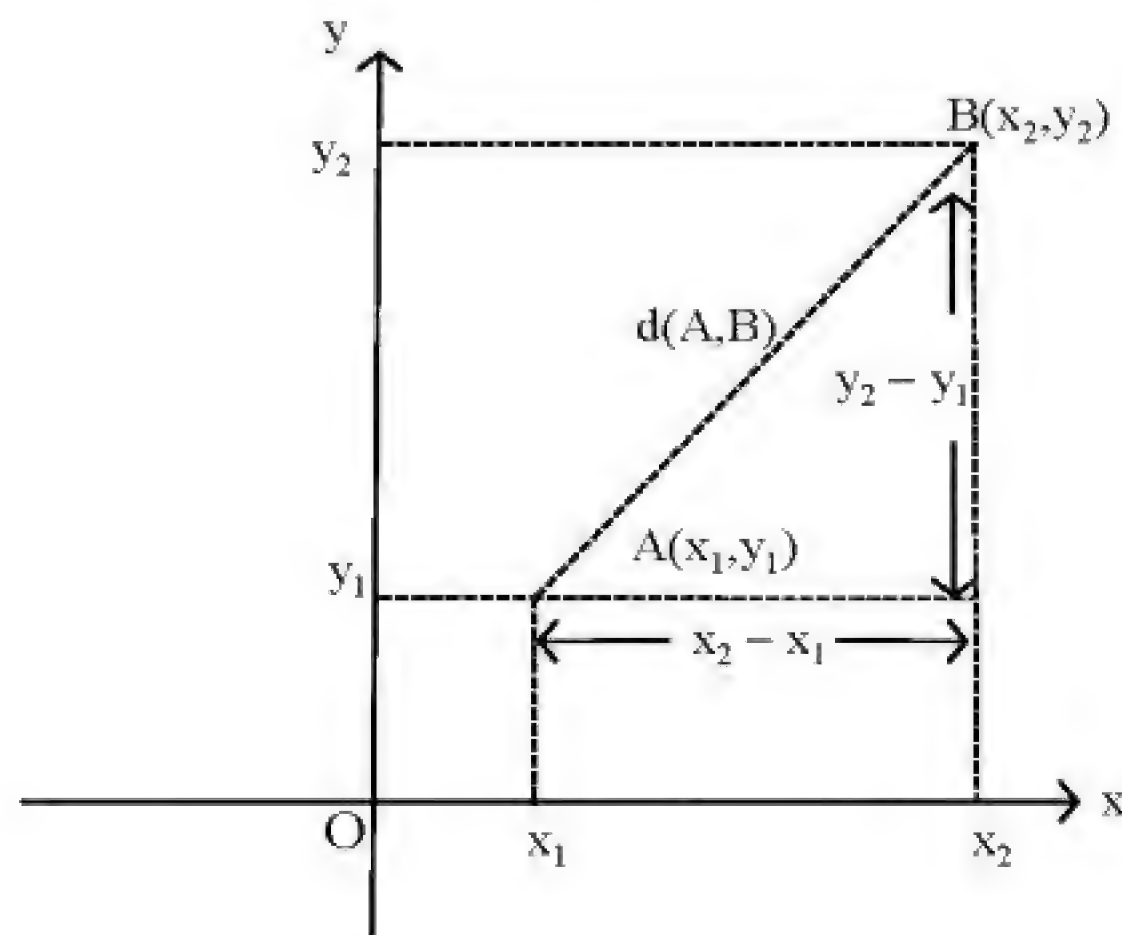
شكل (١، ٢).

تعريف (١، ١) (Definition)

يُعرَّف البعد بين نقطتين: $B(x_2, y_2), A(x_1, y_1)$ في المستوي الإقليدي بالصيغة:

(١، ١)

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



شكل (١، ٣).

فمثلا البعد بين النقطتين: $A(3,5), B(6,9)$ ، هو:

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \sqrt{(6-3)^2 + (9-5)^2} \\ &= \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

تعريف (١, ٢)

المستوي الإقليدي (Euclidean plane) هو مجموعة كل الأزواج المرتبة من الأعداد الحقيقية من الشكل (x, y) والتي عُرِّفَ البعد بين أي نقطتين منه بالصيغة (١, ١).

ملحوظة (١, ١) (Remark)

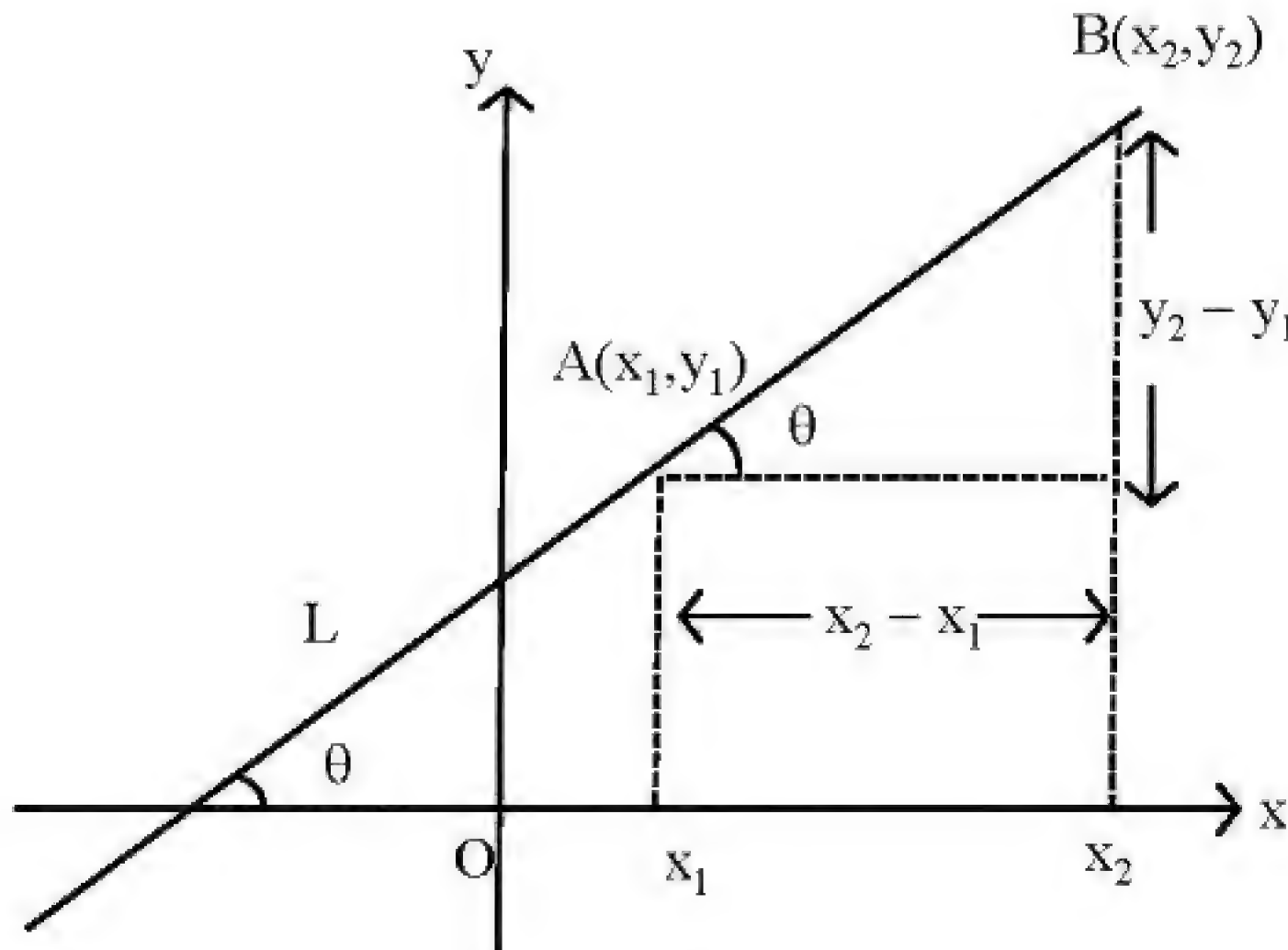
لنذكر هنا بأن البعد بين نقطتين A, B والذي رمزنا له بالرمز $d(A, B)$ يرمز له أيضًا بالرمز $|AB|$ والذي صادفناه أثناء دراستنا في المرحلة الثانوية.

تعريف (١, ٣)

ميل مستقيم L (Slope of a line) (لا يوازي المحور y) نرمز له بالرمز m ويساوي ظل الزاوية التي يصنعها هذا المستقيم مع المحور x (رمزنا للظل بالرمز \tan).

(١, ٢)

$$m = \tan \theta$$



شكل (١, ٤).

تؤخذ θ زاوية مستقيم مع المحور x عادة محققة للشرط:

$$\pi > \theta \geq 0$$

من الواضح أن:

$$m = \tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$$

انظر الشكل (١, ٤) .

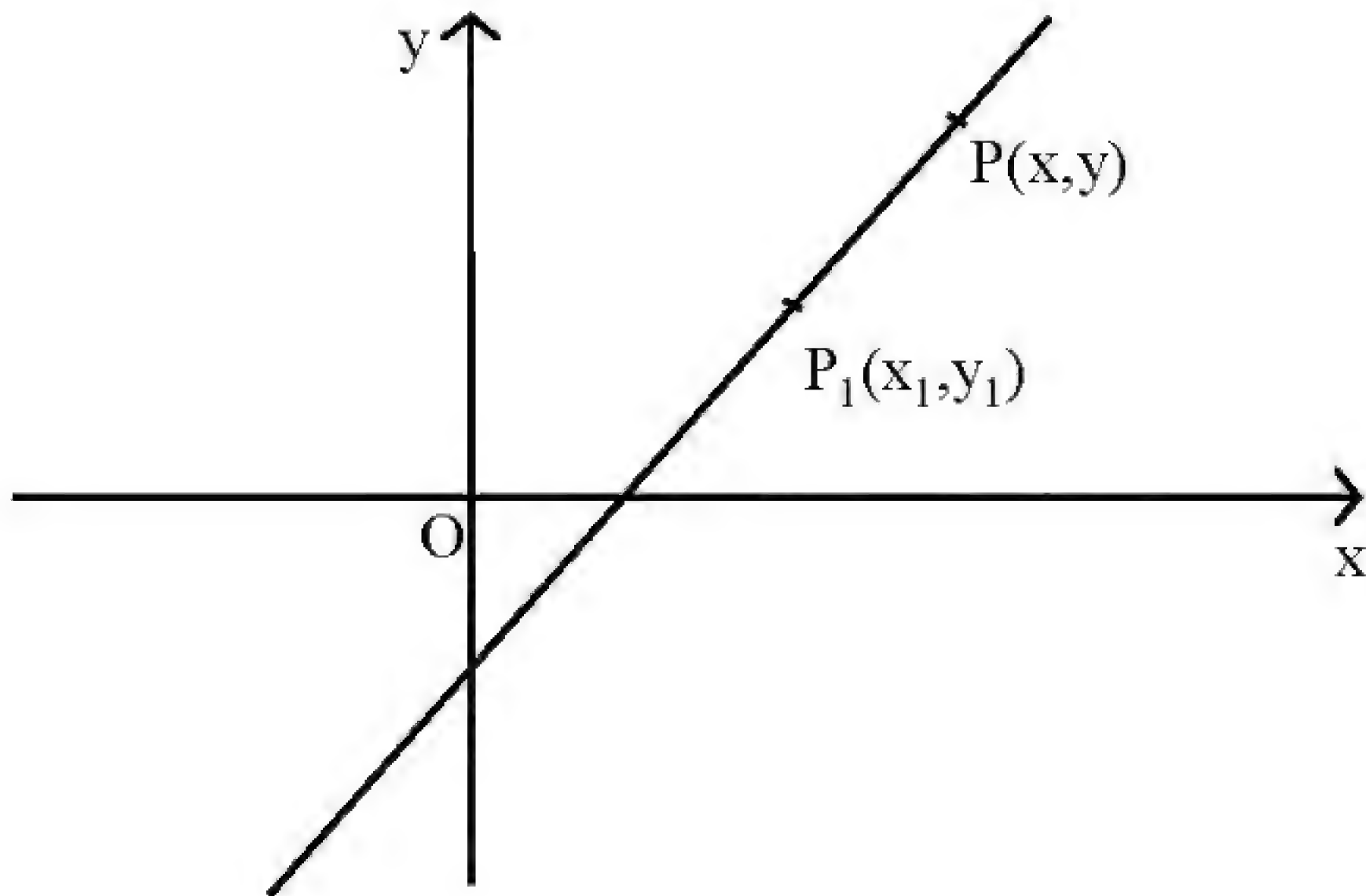
إذن صيغة الميل (The slope formula) تعطى بالمساواة:

(١, ٣)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

وهذا المقدار يرتبط بالزاوية θ ولا يتغير مهما كان موضع النقطتين A, B على المستقيم L .
والصيغة (١, ٣) لا تتغير إذا كانت θ زاوية منفرجة.

معادلة (Equation) مستقيم ميله معلوم m وعُلمت نقطة منه $P_1(x_1, y_1)$



شكل (١, ٥).

بفرض أن $P(x,y)$ نقطة ما من هذا المستقيم، فإن ميل المستقيم m يساوي:

(١, ٤)

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

هذه المعادلة تمثل معادلة مستقيم عُلم ميله m ونقطة منه $P_1(x_1, y_1)$

نتيجة (١, ١)

إذا علمت نقطتان $A(x_1, y_1)$ ، $B(x_2, y_2)$ من مستقيم فإن معادلة المستقيم (١, ٤) تصبح على الشكل:

(١, ٥)

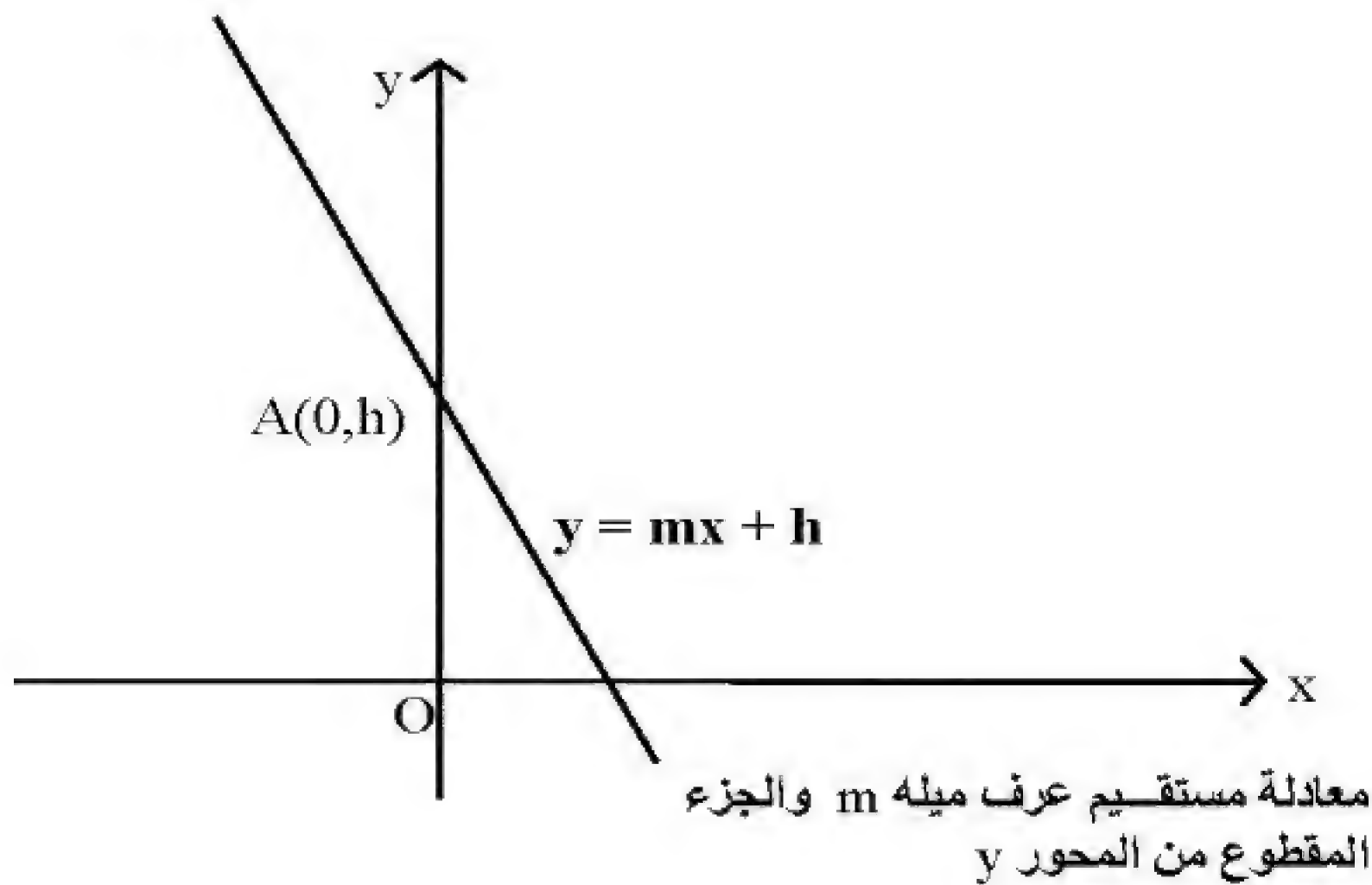
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

نتيجة (١, ٢)

إذا كانت $A(0,h)$ نقطة (Point) تقاطع مستقيم (Line) مع المحور y وكان ميله معروفاً ويساوي m فإن معادلته تكتب على الشكل:

(١, ٦)

$$y = mx + h \quad \text{، ومنه:} \quad m = \frac{y - h}{x - 0}$$



شكل (١, ٦).

مثال (١, ١)

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين: $A(1,2)$ ، $B(-1,4)$

الحل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 4}{1 + 1} = -1 \text{ الميل يساوي:}$$

وحسب (١, ٤)، فإن معادلة المستقيم:

$$\frac{y - 2}{x - 1} = -1 \Rightarrow y = -x + 3$$

نتيجة (١, ٣)

تكتب المعادلة (١, ٥) على الشكل:

(١, ٧)

$$ax + by + c = 0$$

حيث a, b, c ثوابت حقيقية والثابتان a, b لا يساويان الصفر معا. المعادلة (١, ٧) تمثل المعادلة العامة للمستقيم (The general equation of line) .

إذا كانت $b \neq 0$ فإن المعادلة (١, ٧) تكتب على الشكل:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

إذن ميل المستقيم (١, ٧) في حالته العامة يساوي:

(١, ٨)

$$m = -\frac{a}{b}$$

حالات خاصة:

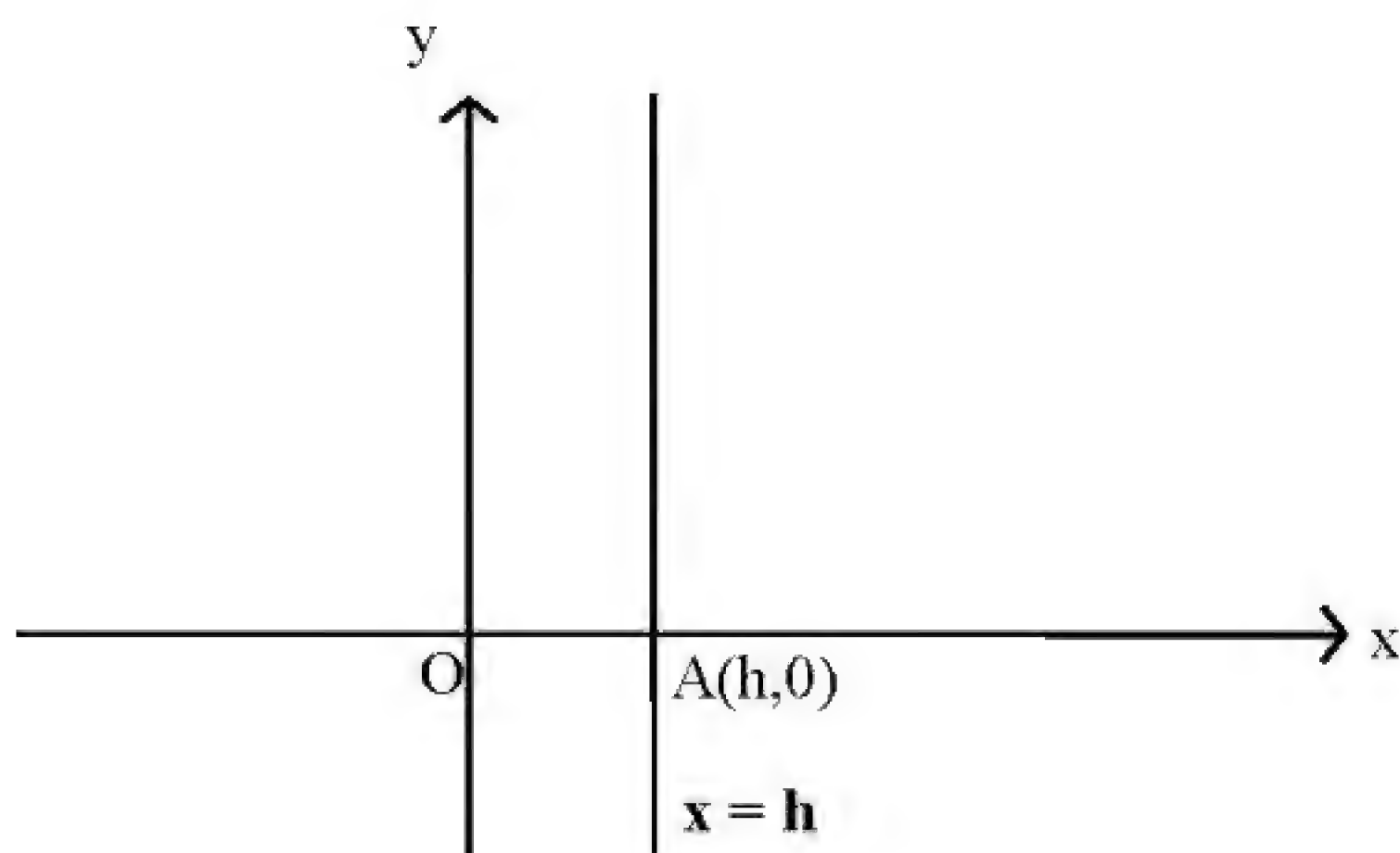
(أ) إذا كانت: $b = 0$ ، فإن المعادلة العامة للمستقيم تأخذ الشكل:

(١, ٩)

(h ثابت)

$$x = h$$

وهي تمثل مستقيما عموديا (Vertical line) على المحور x ، ويقطع المحور x عند النقطة $A(h,0)$ ، وميله هو غير معرف (Undefined).

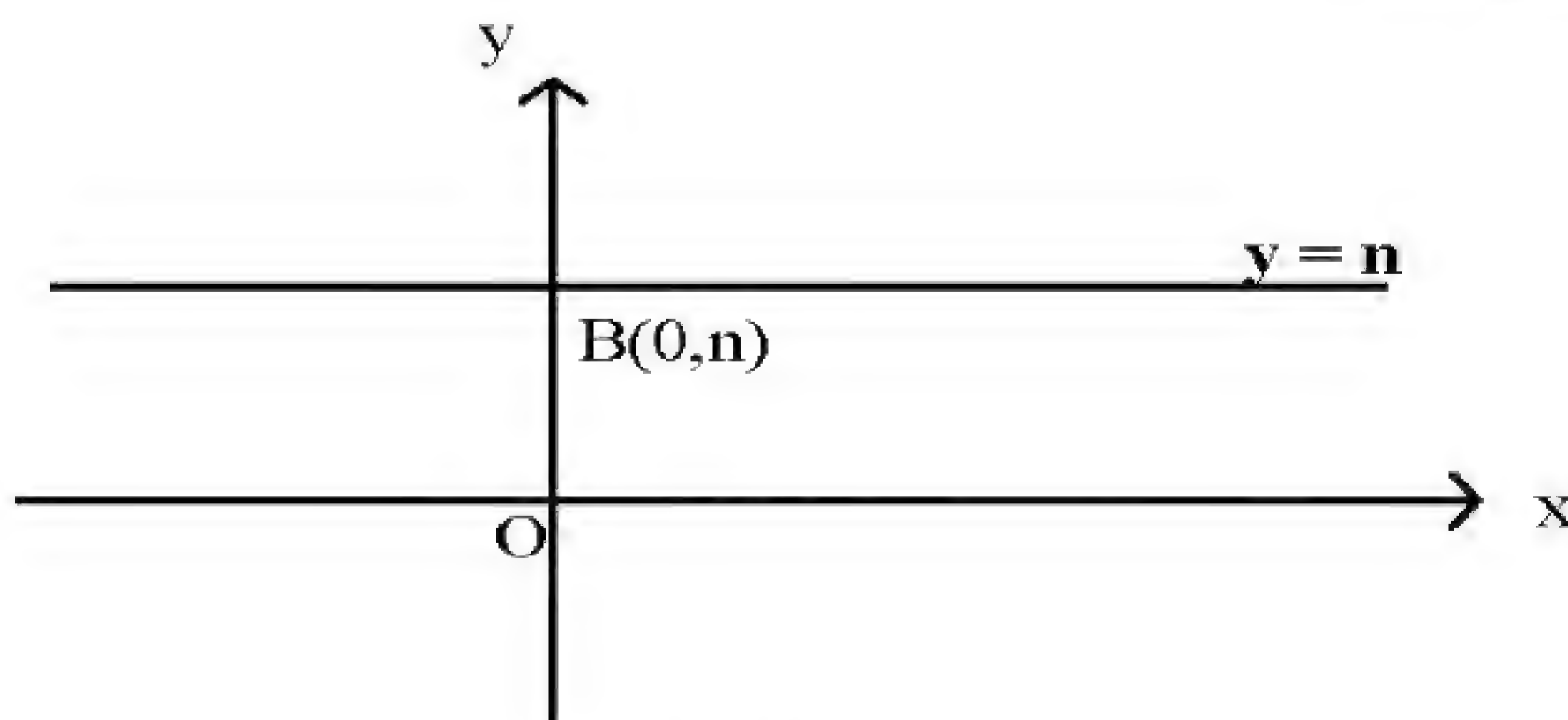


شكل (٧, ١).

ب) إذا كانت $a = 0$ في المعادلة العامة لمستقيم، فإن المعادلة تأخذ الشكل:

$$(1, 10) \quad \boxed{y = n} \quad (n \text{ ثابت})$$

وهي تمثل مستقيما أفقيا (Horizontal line) يوازي المحور x ميله يساوي الصفر ويقطع المحور y عند النقطة $(0, n)$.



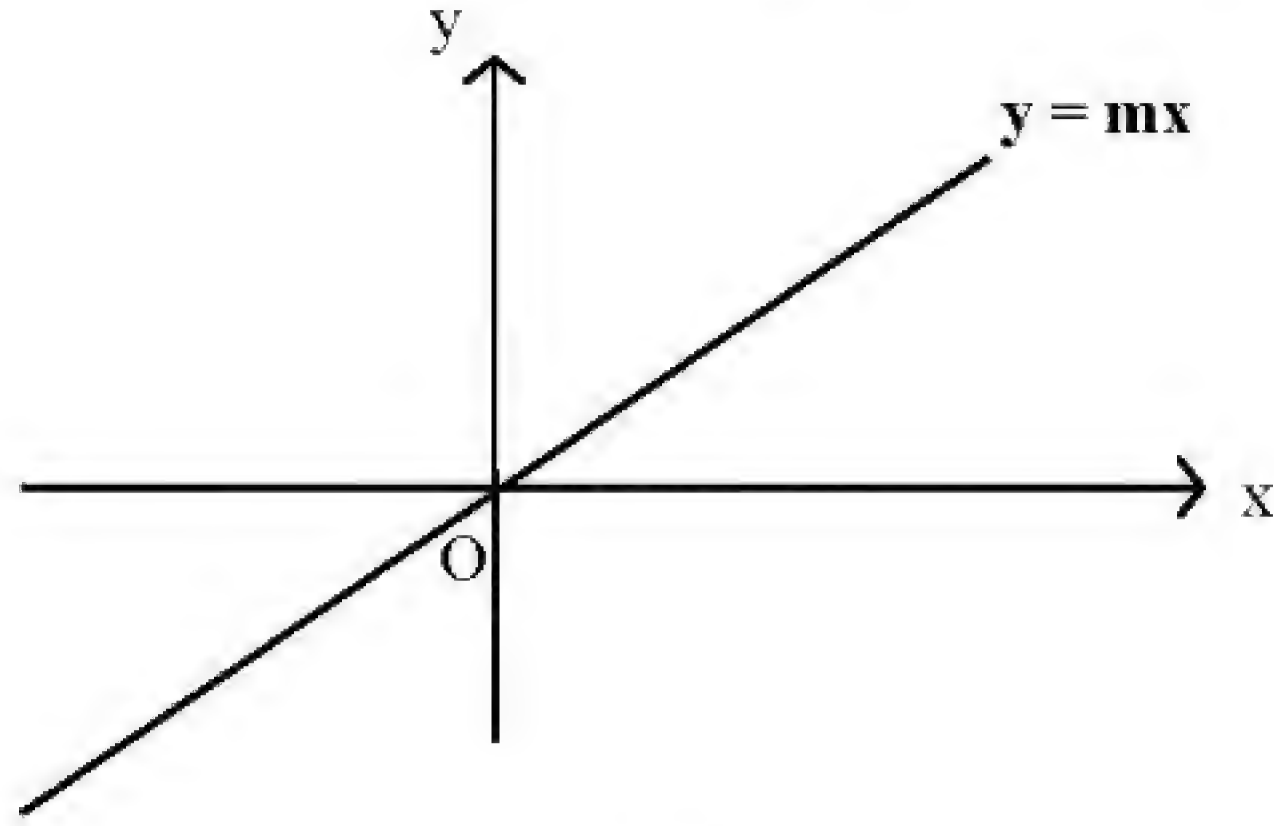
شكل (٨, ١).

ج) إذا كانت $c = 0$ في المعادلة العامة لمستقيم، فإن المعادلة تأخذ الشكل:

(١, ١١)

$$y = mx$$

وهي تمثل مستقيماً يمر بنقطة الأصل ويكون لرسمه معرفة نقطة أخرى تحققه.



شكل (١, ٩).

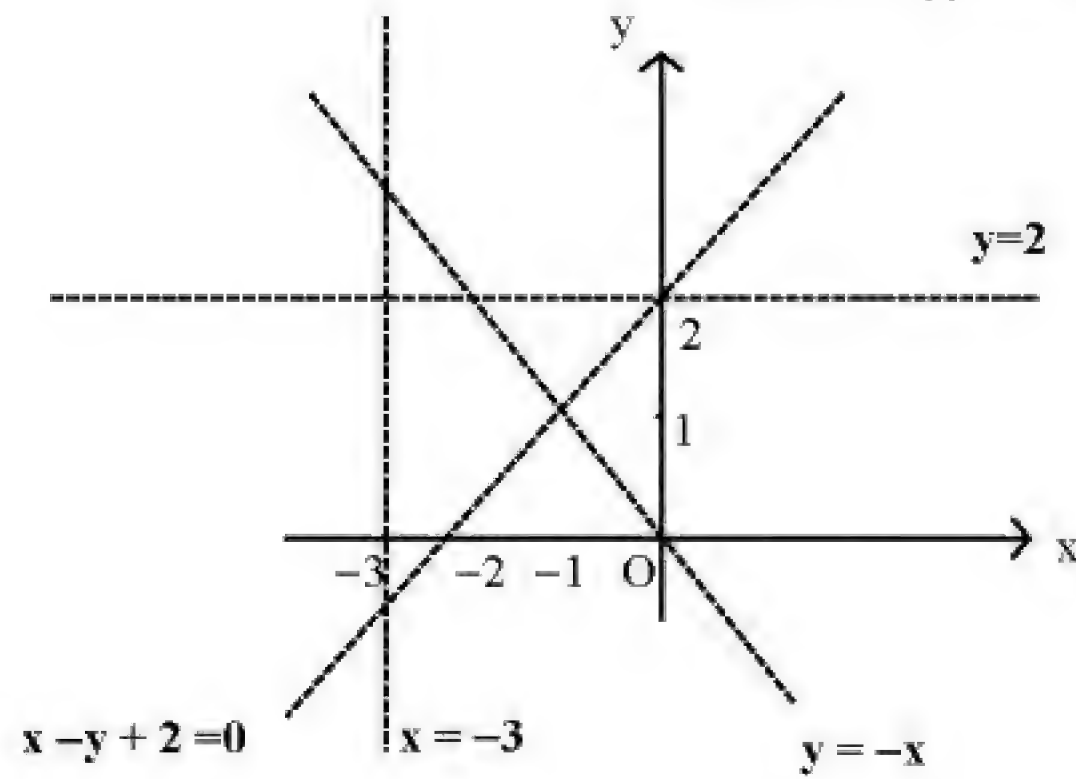
مثال (١, ٢)

ارسم في المستوي الإقليدي المستقيمت التالية:

$$x - y + 2 = 0, \quad y = -x, \quad y = 2, \quad x = -3$$

الحل

تحدد المستقيمت كما في الشكل (١, ١٠).

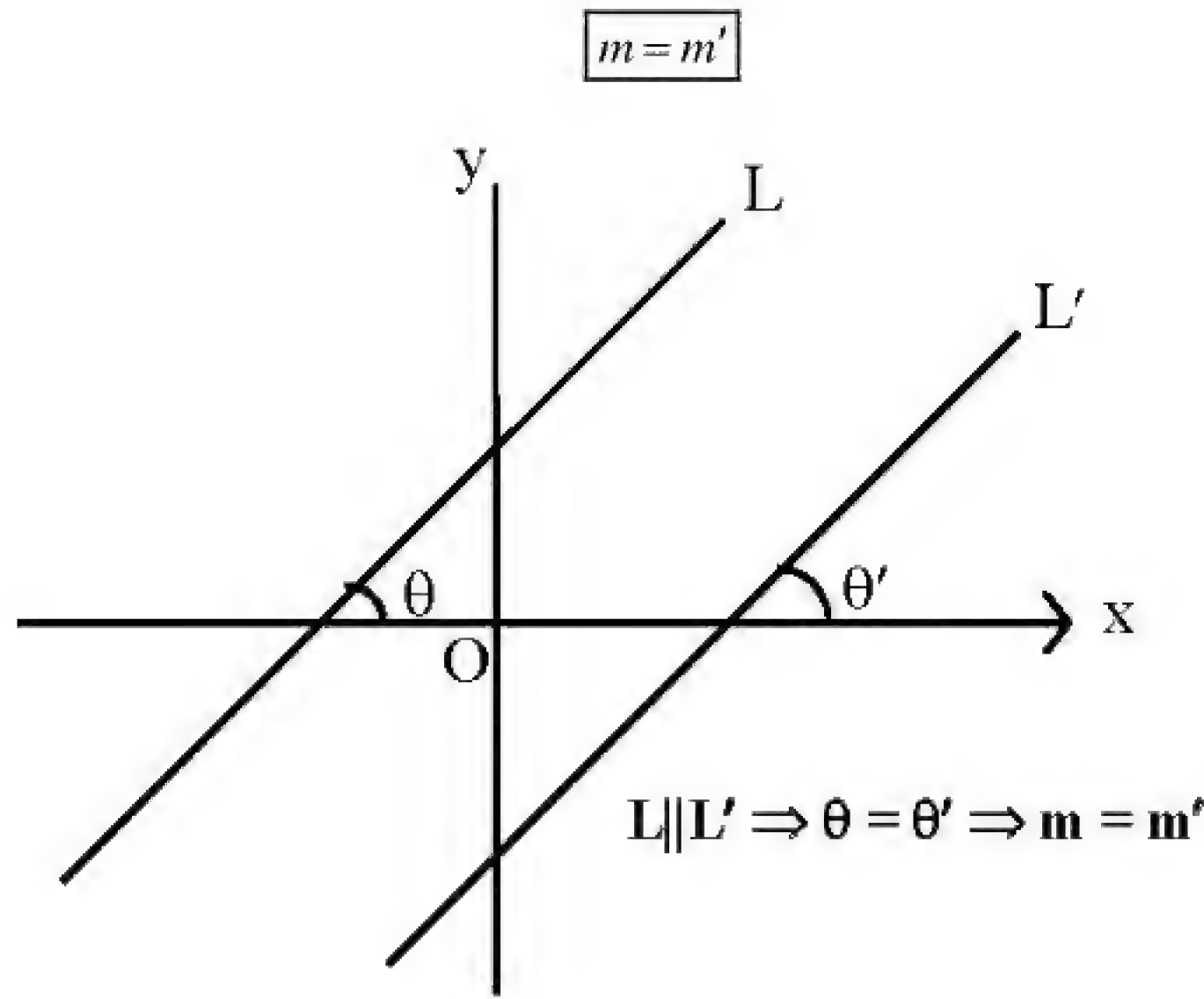


شكل (١, ١٠).

لاحظ أن المستقيم $y = -x$ يمر بنقطة الأصل والنقطة $(-1,1)$. وأن المستقيم $x - y + 2 = 0$ يقطع محوري الإحداثيات في النقطتين $(0,2)$ ، $(-2,0)$.

المستقييات المتوازية والمتعامدة (parallel and perpendicular lines) : من الملاحظ أن المستقيمين L, L' المتوازيين (parallel) ميلاهما واحد:

(١, ١٢)

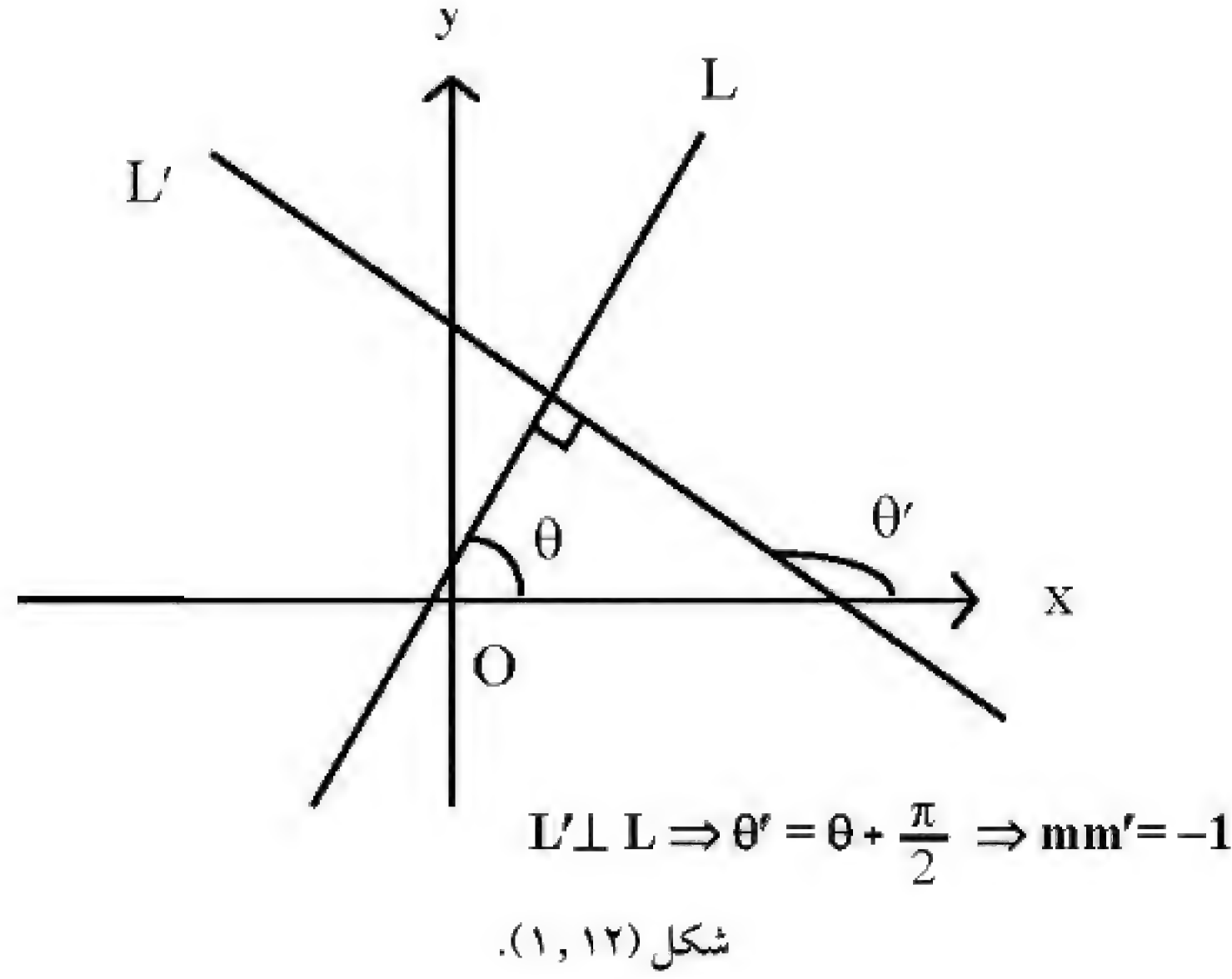


شكل (١, ١١).

وأن المستقيمين المتعامدين (Perpendicular) حاصل ضرب ميلهما يساوي -1 :

(١, ١٣)

$$mm' = -1$$



مثال (٣.١)

(١) أوجد معادلة المستقيم L المار بالنقطة (1,2) والموازي للمستقيم:

$$M: 2x - 3y + 4 = 0$$

(٢) أوجد معادلة المستقيم N المار بالنقطة (-1,1) والعمودي على المستقيم M.

الحل

(١) تكتب معادلة M على الشكل:

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$$

وبمقارنتها بالمعادلة: $y = mx + h$ ، نجد أن ميل M يساوي: $m = \frac{2}{3}$ وميل L الموازي له

يساوي أيضا $\frac{2}{3}$ ، فمعادلة المستقيم L هي:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m \Rightarrow \frac{y - 2}{x - 1} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3y - 2x - 4 = 0$$

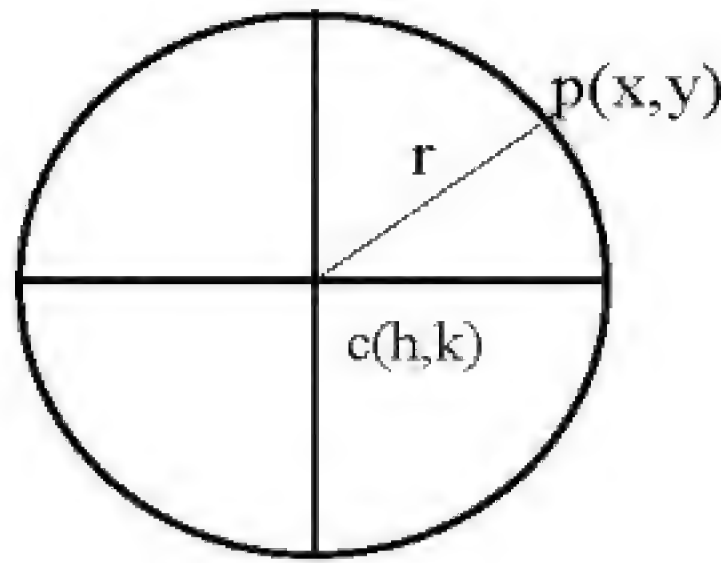
(٢) بما أن ميل M يساوي $\frac{2}{3}$ ، فميل N العمودي عليه يساوي: $-\frac{3}{2}$ ،

$$\frac{y - 1}{x + 1} = -\frac{3}{2} \Rightarrow 2y + 3x + 1 = 0 \text{ : فمعادلة المستقيم N هي}$$

The Circle الدائرة (١, ٢)

معادلة الدائرة التي مركزها: $c(h,k)$ وطول نصف قطرها r

إن أية نقطة $p(x,y)$ من نقاط الدائرة تبعد عن مركزها $c(h,k)$ بعدا ثابتا يساوي طول نصف قطرها r



شكل (١, ١٣).

إذن: $|pc| = r$ ، ومنه:

(١, ١٤)

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

وهذه معادلة دائرة مركزها (h,k) وطول نصف قطرها r .

مثال (١, ٤)

أوجد مركز (Center) وطول نصف قطر (Radius) الدائرة:

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 11 = 0$$

الحل

تكتب المعادلة (Equation) على الشكل:

$$(x^2 - 2x) + (y^2 - 4y) = 11$$

نضيف مربع نصف معامل x ، ومربع نصف معامل y إلى الطرفين كما يلي:

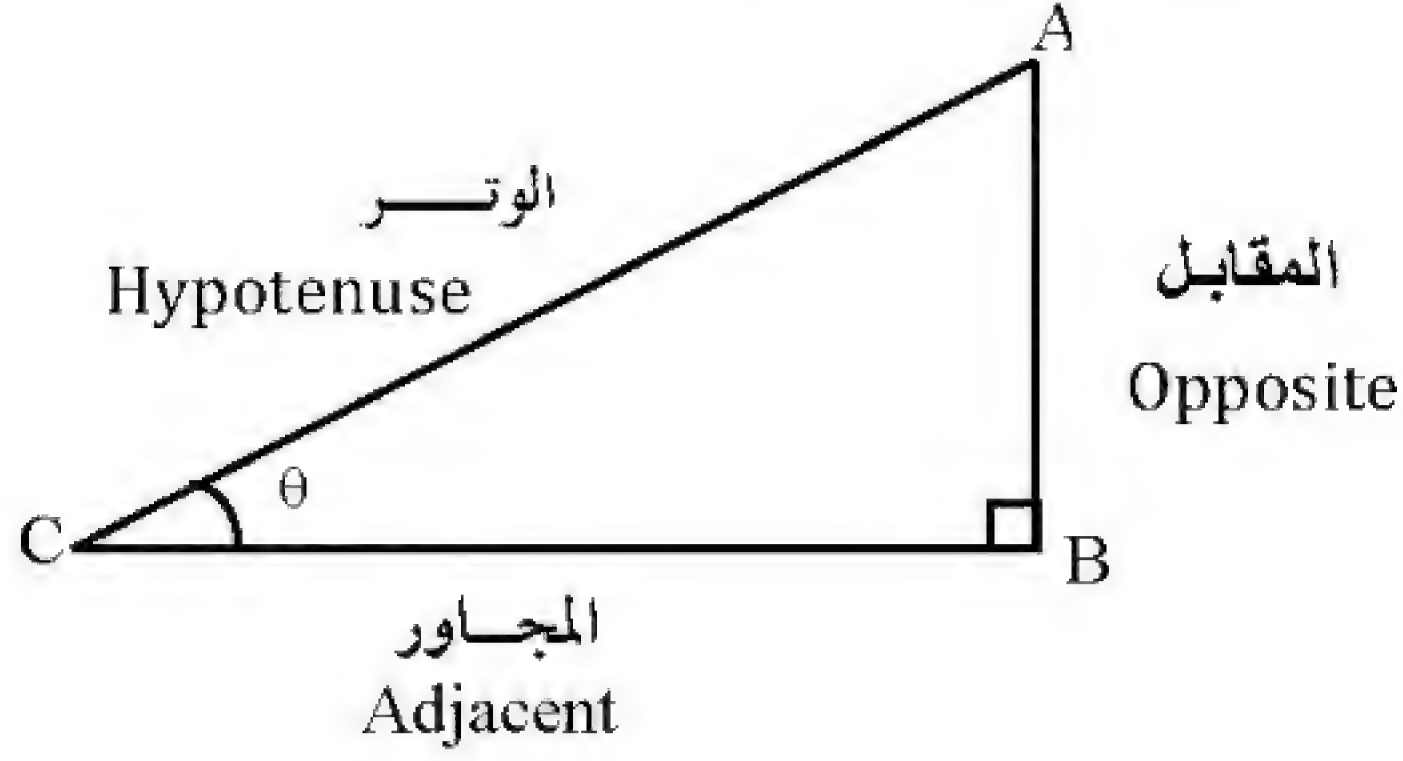
$$(x^2 - 2x + (1)^2) + (y^2 - 4y + (2)^2) = 11 + (1)^2 + (2)^2$$

فيصبح الطرف الأيسر مربعًا تامًا في كل من x و y ، وبالتالي:

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$$

وهذه معادلة دائرة مركزها $(1,2)$ وطول نصف قطرها $\sqrt{16} = 4$.

(١, ٣) النسب المثلثية لزاوية حادة في مثلث قائم



شكل (١, ١٤).

نعرف النسب المثلثية لزاوية حادة θ في مثلث قائم ABC وهي: $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ ، كما يلي:

$$(١, ١٥) \quad \sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{|AB|}{|AC|}, \cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{|CB|}{|AC|}, \tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{|AB|}{|CB|}$$

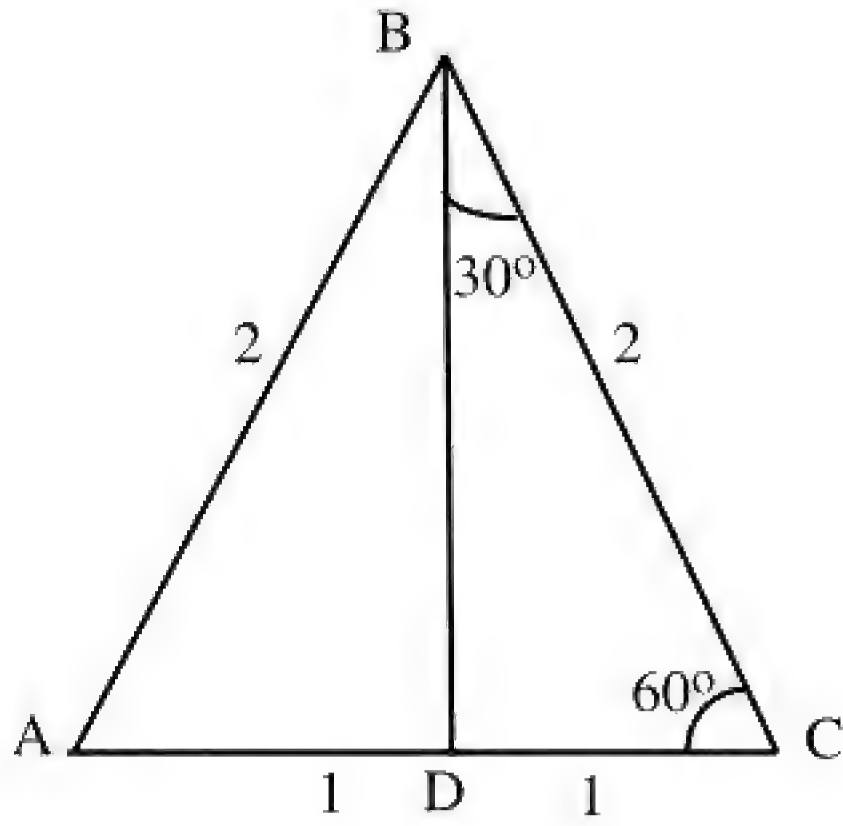
وقد سبق أن درسناها في المرحلة الثانوية وسميناها:

طا θ وجتا θ وجا θ

مثال (١, ٥)

أوجد النسب المثلثية للزوايا

 45° , 60° , 30°



شكل (١٥)، ١.

الحل

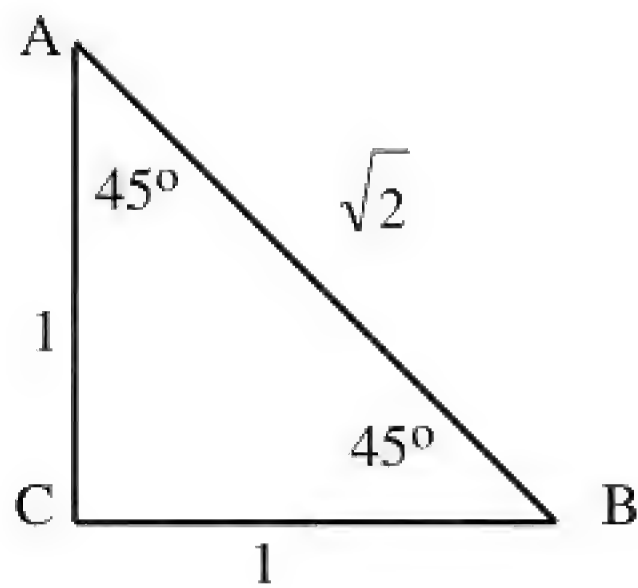
من المثلث المتطابق الأضلاع (Equilateral triangle) والذي طول ضلعه يساوي 2، نجد حسب فيثاغورث، طول ارتفاعه يساوي:

$$|AC| = |CB| = |BA| = 2, |BD| = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$$

$$\text{ومنه: } \sin 30 = \frac{1}{2}, \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan 30 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 60 = \frac{1}{2}, \tan 60 = \sqrt{3}$$

ومن المثلث المتطابق الضلعين والذي طول ضلعه يساوي الواحد، نجد حسب فيثاغورث، طول وتره يساوي: $|AB| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$



شكل (١٦)، ١.

$$\sin 45 = \cos 45 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \tan 45 = 1$$

نُعرّف أيضا النسب المثلثية التالية في مثلث قائم وهي:

$$\cot \theta, \sec \theta, \csc \theta$$

والتي سبق أن سميناها:

مثال (١, ٦) قتا θ ، قتا θ ، قتا θ ، كما يلي:

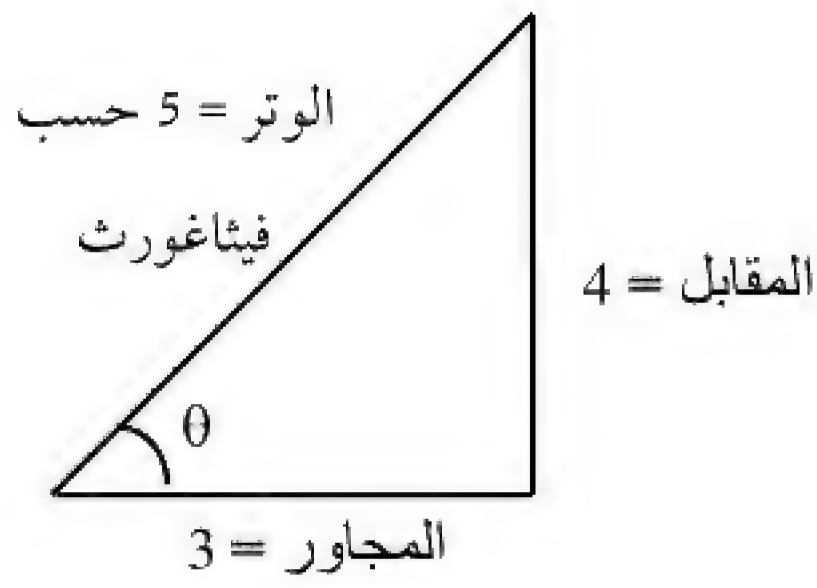
(١, ١٦)

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}, \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}, \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

مثال (١, ٦)

إذا كان: $\cot \theta = \frac{3}{4}$ ، فأوجد النسب الأساسية: $\sin \theta, \cos \theta, \tan \theta$

الحل



$$\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta} = \frac{4}{3} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

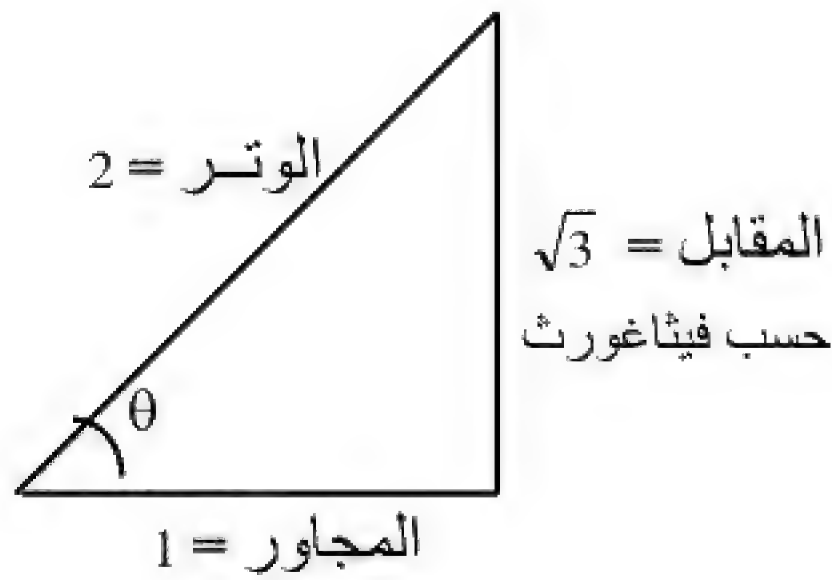
$$\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{4}{5}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{3}{5}$$

شكل (١, ١٧).

مثال (١, ٧)

إذا كان: $\sec \theta = 2$ ، فأوجد النسب الأساسية: $\sin \theta, \cos \theta, \tan \theta$



الحل

$$\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta} = \frac{1}{2}$$

شكل (١, ١٨).

$$\cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

$$\text{ومنه: } \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan \theta = \sqrt{3}$$

(٤, ١) التقدير الدائري للزوايا

لتكن c دائرة موجهة مركزها O ونصف قطرها الوحدة. سنتعرف على وحدة جديدة للزوايا وهي الزاوية المركزية التي رأسها O والتي تقابل قوساً طوله الوحدة شكل (١٩, ١).

نسمي هذه الزاوية بالزاوية النصف قطرية، ونقول إن قياسها هو تقدير دائري واحد (راديان) (Radian). إن محيط هذه الدائرة يساوي 2π ، فالزاوية المركزية التي رأسها O وتقابل قوس الدائرة كله قياسها بالتقدير الدائري:

$$2\pi \approx 6.28$$

إذن:

2π بالتقدير الدائري (Radian measure) يساوي: 360°

$$1 \text{ تقدير دائري يساوي: } \frac{180}{\pi} \approx 57.3^\circ$$

الزاوية θ بالتقدير الدائري تساوي بالدرجات:

$$(١٧, ١)$$

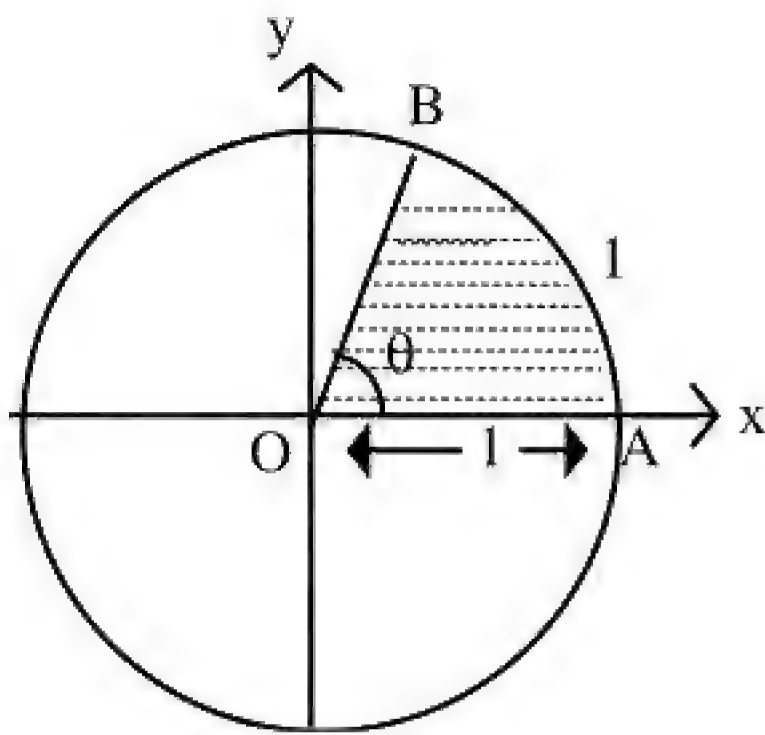
$$\alpha = \frac{180}{\pi} \theta$$

(رمزنا لقياس الزاوية بالدرجات بالرمز α)

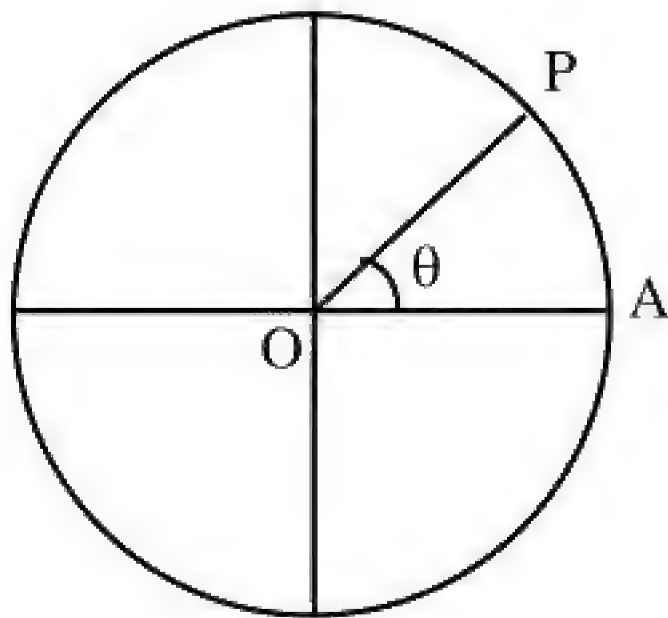
من الصيغة السابقة، نجد:

$$(١٨, ١)$$

$$\theta = \frac{\pi}{180} \alpha$$



شكل (١٩, ١).



شكل (٢٠, ١).

مثال (٨, ١)

أوجد بالتقدير الدائري الزوايا: 30° ، 60° ، 180°

الحل

الزوايا على التوالي بالتقدير الدائري هي:

$$\theta = \frac{\pi}{180}(180) = \pi \text{ ، } \theta = \frac{\pi}{180}(60) = \frac{\pi}{3} \text{ ، } \theta = \frac{\pi}{180}(30) = \frac{\pi}{6}$$

(٥, ١) طول القوس و مساحة قطاع دائري

The length of arc and The area of the circular sector

في الشكل (٢١, ١) الزاوية θ تقابل قوسًا طوله L . نعلم أن الزاوية 2π تقابل قوسًا طوله $2\pi r$. بماأن θ تتناسب طرديًا مع L ، فإن:

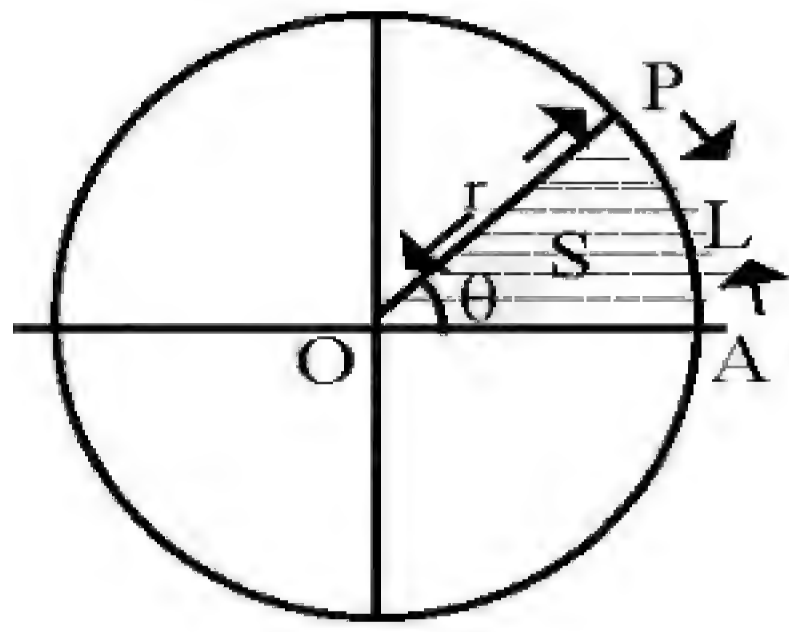
$$\frac{2\pi r}{L} = \frac{2\pi}{\theta} \text{ ، ومنه نجد طول القوس}$$

يساوي:

(١٩, ١)

$$L = r\theta$$

شكل (٢١, ١) .



في الشكل (٢١, ١) الزاوية θ يوافقها قطاعًا دائريًا مساحته S . نعلم أن الزاوية 2π يوافقها قطاعًا دائريًا مساحته (مساحة الدائرة بأكملها) πr^2 . وبما أن θ تتناسب طرديًا مع S ، فإن:

$$\frac{\pi r^2}{S} = \frac{2\pi}{\theta} \text{ ، ومنه:}$$

(٢٠, ١)

$$S = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

مثال (٩، ١)

أوجد طول قوس الدائرة ومساحة القطاع الدائري الذي زاويته:
(أ) $\theta = 30^\circ$ ، (ب) $\theta = \frac{2\pi}{3}$ ، علما أن: $r = 5cm$

الحل

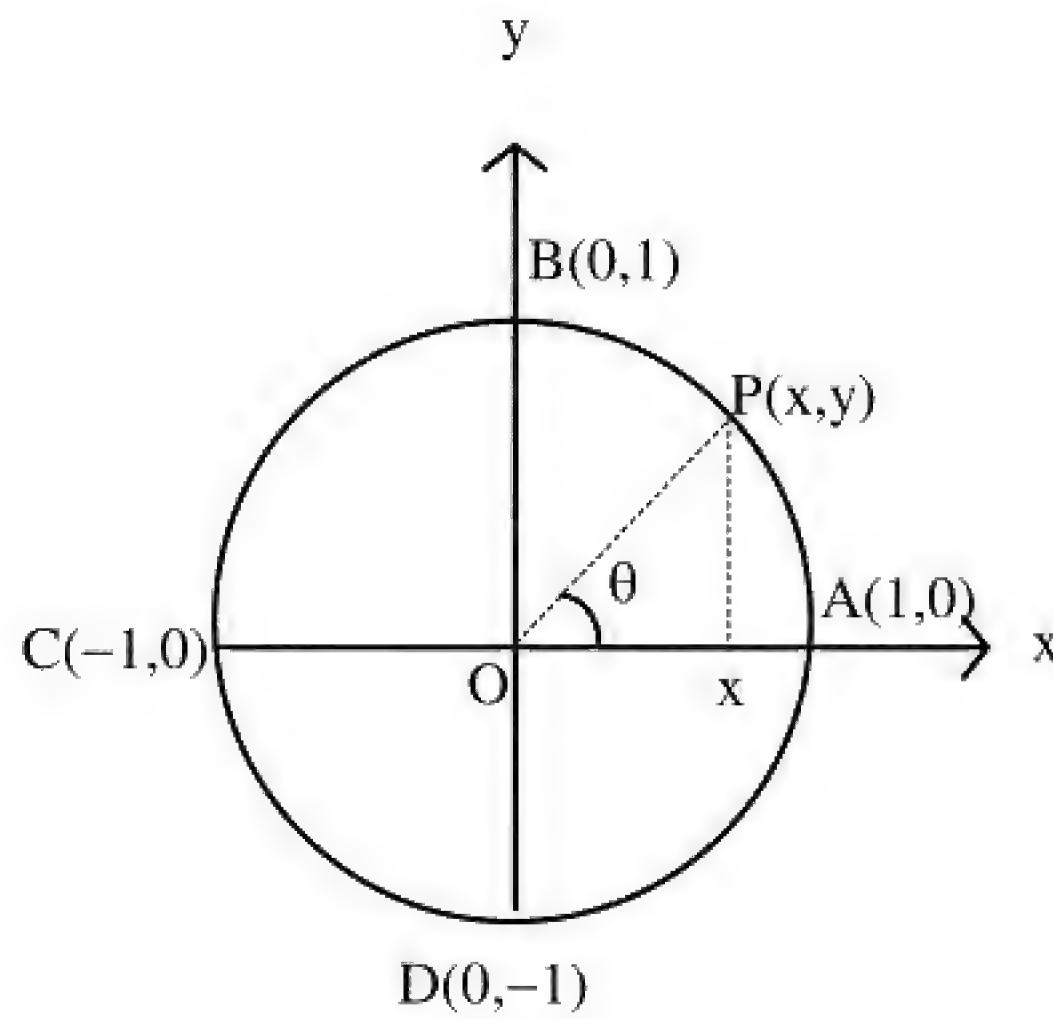
(أ) $\theta = 30^\circ \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$ (تقديرًا دائريًا).

$$S = \frac{1}{2} r^2 \theta = \frac{1}{2} (5)^2 \frac{\pi}{6} = \frac{25}{12} \pi cm^2, \quad L = \frac{5\pi}{6} cm$$

$$L = r\theta = 5 \left(\frac{2\pi}{3} \right) = \frac{10}{3} \pi cm \text{ (ب)}$$

$$S = \frac{1}{2} r^2 \theta = \frac{1}{2} (5)^2 \left(\frac{2\pi}{3} \right) = \frac{25}{3} \pi cm^2$$

(٦، ١) النسب المثلثية لزاوية في الحالة العامة



شكل (٢٢، ١).

دائرة الوحدة (نصف قطرها يساوي الواحد)

نعرف النسب المثلثية لزاوية موجهة θ ونعتبر المحور x مبدأ قياس الزوايا، كما يلي:

$$(1, 21) \quad \begin{cases} (\cos \theta \neq 0) \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \cos \theta = x, \sin \theta = y \\ (\tan \theta \neq 0) \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}, (\cos \theta \neq 0) \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}, (\sin \theta \neq 0) \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} \end{cases}$$

بفرض أن كلا من مقامات الكسور في (١, ٢١) لا يساوي الصفر.
من الملاحظ أن:

$$\tan 0 = 0, \cos 0 = 1, \sin 0 = 0 \quad (\text{من إحداثيي A})$$

$$\tan \frac{\pi}{2}, \cos \frac{\pi}{2} = 0, \sin \frac{\pi}{2} = 1 \quad (\text{من إحداثيي B})$$

$$\tan \pi = 0, \cos \pi = -1, \sin \pi = 0 \quad (\text{من إحداثيي C})$$

$$\tan \frac{3\pi}{2}, \cos \frac{3\pi}{2} = 0, \sin \frac{3\pi}{2} = -1 \quad (\text{من إحداثيي D}).$$

$$\text{لاحظ من الشكل أن: } x^2 + y^2 = 1 \quad (\text{حسب فيثاغورث})$$

أي أن:

(١, ٢٢)

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

وبتقسيم الطرفين تارة على $\cos^2 \theta$ وتارة على $\sin^2 \theta$ ، نجد:

$$\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta \Leftrightarrow \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

أو:

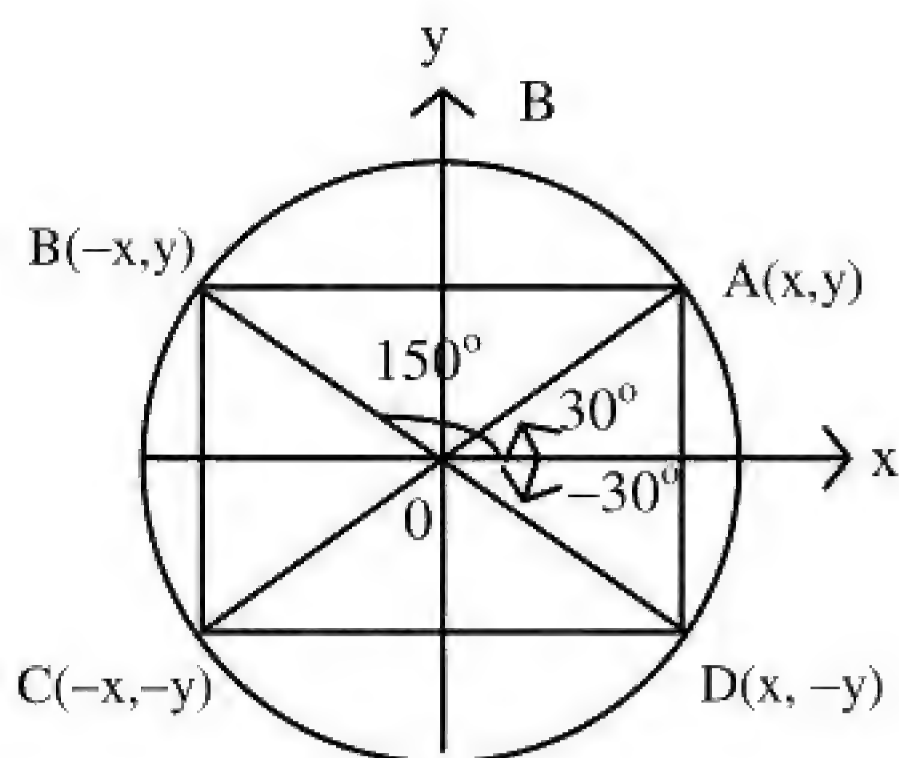
(١, ٢٣)

$$\csc^2 \theta = 1 + \cot^2 \theta \Leftrightarrow 1 + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta}$$

مثال (١, ١٠)

أوجد النسب المثلثية للزوايا 330° ، 210° ، 150°

الحل



شكل (٢٣)، (١).

إذا قطع الضلع النهائي للزاوية 30° الدائرة في النقطة A، فإن الضلع النهائي للزاوية 150° يقطعها في النقطة B نظيرة النقطة A بالنسبة للمحور y وبالعكس فإن نظيرة B بالنسبة للمحور نفسه هي النقطة A.

إذن: الزاوية الموافقة للزاوية 150° والواقعة في الربع الأول هي:

$$30^\circ = 180^\circ - 150^\circ \text{ (نحصل عليها بأخذ مكمل الزاوية } 150^\circ \text{)}$$

والزاوية 210° يقطع ضلعها النهائي الدائرة في النقطة C نظيرة A بالنسبة لنقطة الأصل فلايجاد الزاوية الموافقة للزاوية 210° والواقعة في الربع الأول:

نطرح 180° من الزاوية 210° ، فنجد: $30^\circ = 210^\circ - 180^\circ$

والزاوية 330° يقطع ضلعها النهائي الدائرة في النقطة D نظيرة A بالنسبة للمحور x فلايجاد الزاوية الحادة الموافقة للزاوية 330° :

نطرح الزاوية 330° من الزاوية 360° ، فنجد: $30^\circ = 360^\circ - 330^\circ$ أما الزاوية -30° فيوافقها الزاوية 30° مباشرة.

وفي جميع الحالات لإيجاد النسب المثلثية لهذه الزوايا، نحسب النسب المثلثية للزاوية الحادة 30° فنجد:

$$\tan 30 = \frac{\sin 30}{\cos 30} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x = \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad y = \sin 30 = \frac{1}{2}$$

ومنه، نجد من الشكل:

$$\begin{aligned}
 (\sin \theta \text{ موجب هو } \sin \theta) \quad \tan 150 &= -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad -x = \cos 150 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad y = \sin 150 = \frac{1}{2} \\
 (\tan \theta \text{ موجب هو } \tan \theta) \quad \tan 210 &= \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad -x = \cos 210 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -y = \sin 210 = -\frac{1}{2} \\
 (\cos \theta \text{ موجب هو } \cos \theta) \quad \tan 330 &= -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x = \cos 330 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -y = \sin 330 = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

أما النسب المتبقية فنحسبها استنادا للعلاقات:

(١, ٢٤)

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}, \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}, \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

مثال (١, ١١)

أوجد النسب المثلثية للزوايا: (أ) -45° ، (ب) 390° ، (ج) 780°

الحل

(أ) الزاوية: -45° نهايتها تقع في الربع الرابع ويوافقها الزاوية 45° .

$$\text{إذن: } \tan 45 = 1, \quad y = \sin 45 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x = \cos 45 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{وبالتالي: } \tan(-45) = -1, \quad -y = \sin(-45) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x = \cos(-45) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

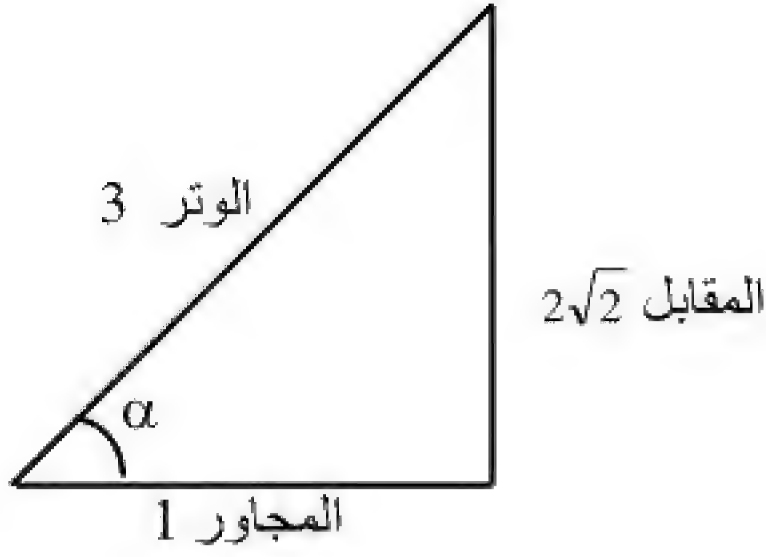
(ب) الزاوية: 390° يوافقها في الربع الأول (بعد حذف دورة كاملة) 30° ونسبها المثلثية هي النسب نفسها للزاوية 30° .

(ج) الزاوية: 780° يقطع ضلعها النهائي الدائرة في نفس الموضع الذي يقطع الضلع النهائي للزاوية 60° (حذفنا دورتين). فلها النسب نفسها، انظر المثال (١, ٥). وبأخذ مقلوبات النسب السابقة نحصل على النسب المتبقية.

مثال (١, ١٢)

إذا كان: $\sec \theta = -3$ والزاوية تقع في الربع الثالث

(٢) $\cot \theta = -\frac{4}{3}$ والزاوية تقع في الربع الثاني. فأوجد النسب المثلثية المتبقية.



شكل (١, ٢٤).

الحل

$$\cos \theta = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \sec \theta = -3 \quad (١)$$

وحسب موقع الزاوية، فإن:

$$\tan \theta > 0, \sin \theta < 0$$

نحسب النسب للزاوية الحادة α الموافقة لها

والواقعة في الربع الأول، فنجد:

$$\tan \alpha = 2\sqrt{2}, \cos \alpha = \frac{1}{3}, \sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

بالتالي: $\tan \theta = 2\sqrt{2}, \cos \theta = -\frac{1}{3}, \sin \theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (حيث $\tan \theta$ هي الموجبة في الربع الثالث). (اكتفينا بالنسب الأساسية الثلاث وهذا ما سنفعله في معظم الأحيان).

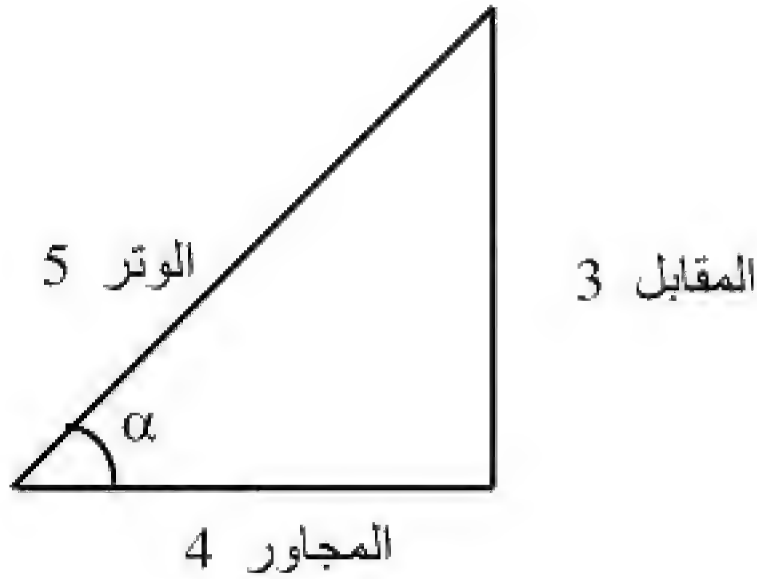
$$\tan \theta = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow \cot \theta = -\frac{4}{3} \quad (٢)$$

وحسب موقع الزاوية، فإن:

$$\cos \theta < 0, \sin \theta > 0$$

النسب المثلثية للزاوية θ :

$$\cos \theta = -\frac{4}{5}, \sin \theta = \frac{3}{5}$$



شكل (١, ٢٥).

(١, ٧) حل المعادلات المثلثية

مثال (١, ١٣)

حل المعادلات التالية إذا كان $2\pi \geq x \geq 0$:

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (١) \quad \cot x = -1 \quad (٢) \quad \sec x = \sqrt{2} \quad (٣)$$

الحل

لنذكر بأن حل المعادلات:

(١, ٢٥)

$$\boxed{\begin{aligned} x = \pi - a + 2\pi n \text{ أو } x = a + 2\pi n &\Leftrightarrow \sin x = \sin a \\ x = \pm a + 2\pi n &\Leftrightarrow \cos x = \cos a \\ x = a + \pi n &\Leftrightarrow \tan x = \tan a \end{aligned}}$$

حيث n عدد صحيح

$$\tan x = \tan \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow \cot x = -1 \quad (١)$$

والحل هو: $x = \frac{3\pi}{4} + \pi n$ والمقبول:

$$(n=1)\pi + \frac{3\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}, (n=0)\frac{3\pi}{4}$$

$$\cos x = \cos \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sec x = \sqrt{2} \quad (٢)$$

والحل هو: $x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ والمقبول:

$$(n=1)2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}, (n=0)\frac{\pi}{4}$$

$$\sin 2x = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (٣)$$

والحل هو: $x = \frac{\pi}{6} + \pi n \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ والمقبول:

$$(n=1)\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}, (n=0)\frac{\pi}{6}$$

أو: $x = \frac{\pi}{3} + \pi n \Leftrightarrow 2x = \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi n$ والمقبول:

$$(n=1)\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}, (n=0)\frac{\pi}{3}$$

مثال (١٤, ١)

بسط النسب التالية:

$$\tan(x + \pi) \quad (٣ \cos(x + \frac{3\pi}{2})) \quad (٢ \sin(x - \frac{\pi}{2})) \quad (١)$$

الحل

سنستعين بالصيغ:

(١, ٢٦)

$$\begin{cases} \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \\ \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \end{cases}$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{2} - \cos x \sin \frac{\pi}{2} \quad (١)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sin x \cdot 0 - \cos x \cdot 1 = -\cos x \\
 \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) &= \cos x \cos \frac{3\pi}{2} - \sin x \sin \frac{3\pi}{2} \quad (٢) \\
 &= \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot (-1) = \sin x \\
 \tan(x + \pi) &= \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} \quad (٣) \\
 \sin(x + \pi) &= \sin x \cos \pi + \cos x \sin \pi \\
 &= \sin x \cdot (-1) + \cos x \cdot 0 = -\sin x \\
 \cos(x + \pi) &= \cos x \cos \pi - \sin x \sin \pi \\
 &= \cos x \cdot (-1) - \sin x \cdot 0 = -\cos x \\
 \tan(x + \pi) &= \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x \quad \text{إذن:}
 \end{aligned}$$

مثال (١٥, ١)

أوجد (أ) $\sin 2x$ ، (ب) $\cos 2x$ إذا كان $\sin x = \frac{3}{5}$ والزاوية x تقع في الربع الثاني.

الحل

$$\begin{aligned}
 \sin 2x &= \sin(x + x) \quad (١) \\
 &= \sin x \cos x + \cos x \sin x \\
 &= 2 \sin x \cos x
 \end{aligned}$$

إذن:

(١, ٢٧)

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

الزاوية تقع في الربع الثاني، إذن: $\cos x < 0$

من المثلث القائم شكل (٢٦, ١)، نجد:

$$\begin{aligned}
 \cos y &= \frac{4}{5} \quad (y \text{ الزاوية الحادة الموافقة في الربع الأول})
 \end{aligned}$$

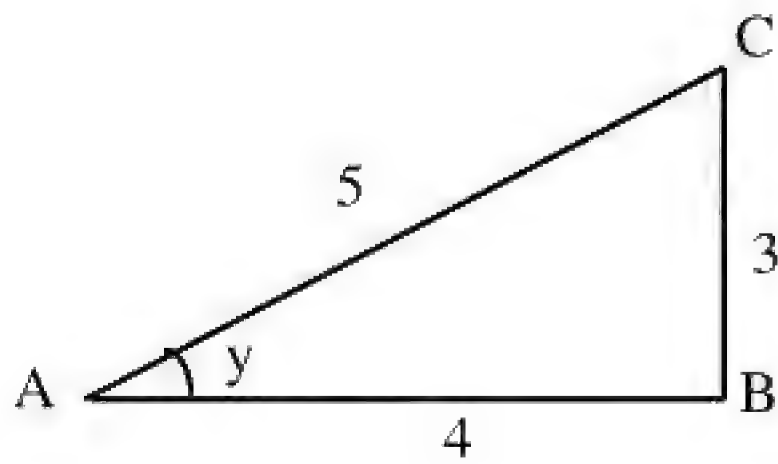
$$\cos x = -\frac{4}{5} \quad \text{إذن:}$$

$$\sin 2x = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{-4}{5} = \frac{-24}{25}$$

$$\cos 2x = \cos(x + x) \quad (ب)$$

$$= \cos x \cos x - \sin x \sin x$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x$$



شكل (٢٦, ١).

إذن:

(١, ٢٨)

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = \left(\frac{-4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{7}{25} \text{ ومنه:}$$

مثال (١, ١٦)

- (أ) اكتب: $\sin 2x - \sin x$ على شكل حاصل ضرب نسبتين مثلثيتين.
 (ب) اكتب: $\cos 2x + \cos 4x$ على شكل حاصل ضرب نسبتين مثلثيتين.

الحل

$$(أ) \text{ نضع } 2x = \alpha + \beta$$

$$x = \alpha - \beta \quad \text{فيكون: } \frac{3x}{2} = \alpha \quad (\text{بالجمع})$$

$$\frac{x}{2} = \beta \quad (\text{بالطرح})$$

$$\text{إذن: } \sin 2x - \sin x = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$$

$$= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta - (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta)$$

$$= 2 \cos \alpha \sin \beta = 2 \cos \frac{3x}{2} \sin \frac{x}{2}$$

$$(ب) \text{ نضع } 4x = \alpha + \beta$$

$$2x = \alpha - \beta$$

$$\text{فيكون: } 3x = \alpha \quad (\text{بالجمع})$$

$$x = \beta \quad (\text{بالطرح})$$

$$\text{إذن: } \cos 4x + \cos 2x = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$

$$= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$= 2 \cos \alpha \cos \beta = 2 \cos 3x \cos x$$

يمكن حل السؤال بسهولة بالاستعانة بالملحوظة (١-٢) صفحة ٣٢.

مثال (١٧, ١)

- (أ) اكتب: $\sin 3x \cos 2x$ على شكل مجموع نسبتيين مثلثيتين.
 (ب) اكتب: $\sin 5x \sin 2x$ على شكل مجموع نسبتيين مثلثيتين.

الحل

هنا نلجأ إلى الصيغة: $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$
 أو إلى الصيغة: $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$
 (أ) من الواضح أن الصيغة الأولى هي المفيدة في هذه الحالة:
 $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
 $\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$

بالجمع: $\sin(x + y) + \sin(x - y) = 2 \sin x \cos y$ إذن: $\sin 5\alpha + \sin \alpha = 2 \sin 3\alpha \cos 2\alpha$ ومنه: $\frac{1}{2}[\sin 5\alpha + \sin \alpha] = \sin 3\alpha \cos 2\alpha$ (نضع $\alpha = x$)

(ب) من الواضح أن الصيغة الثانية هي المفيدة في هذه الحالة:

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

بالطرح: $\cos(x + y) - \cos(x - y) = -2 \sin x \sin y$ إذن: $\cos 7\alpha - \cos 3\alpha = -2 \sin 5\alpha \sin 2\alpha$ ومنه: $\frac{1}{2}[\cos 3\alpha - \cos 7\alpha] = \sin 5\alpha \sin 2\alpha$ (نضع $\alpha = x$)

المثالان السابقان يغنيان الطالب عن حفظ قوانين التحويل والتي تحول مجموع نسبتيين مثلثيتين إلى حاصل ضرب نسبتيين وبالعكس.

يمكن حل السؤال بسهولة بالاستعانة بصيغ التحويل الواردة في الصفحة ٢٧٧.

(٨, ١) حل المعادلة من الدرجة الثانية

(١) باستخدام المميز

مثال (١٨, ١)

أوجد حل المعادلة: $6x^2 - 11x + 3 = 0$

الحل

ممیز المعادلة: $ax^2 + bx + c = 0$ ، حيث $a \neq 0$

هو: $m = b^2 - 4ac$

وإذا كان: $m > 0$ فتقبل المعادلة حلين هما:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{m}}{2a}$$

وفي معادلتنا: $a = 6, b = -11, c = 3$

$$m = b^2 - 4ac = 121 - 4 \cdot 3 \cdot 6 = 121 - 72 = 49$$

والحلان: $x = \frac{-b \pm \sqrt{m}}{2a} = \frac{11 \pm 7}{12}$ ، وهما:

$$x_1 = \frac{11+7}{12} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}, x_2 = \frac{11-7}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

مثال (١٩، ١)

حل المعادلة: $x^2 + x + 1 = 0$

$$m = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3 \Leftarrow a = 1, b = 1, c = 1$$

المميز سالب ولا يوجد جذور حقيقية.

مثال (٢٠، ١)

(١) حل المعادلة: $4x^2 - 12x + 9 = 0$

$$m = 144 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 0 \Leftarrow a = 4, b = -12, c = 9$$

والمعادلة تقبل جذرًا مضاعفًا: $x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = \frac{-b}{2a} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

(٢) بالتحليل

إذا كان المميز m مربعًا لعدد صحيح (مربع تام) فبالإمكان إيجاد الجذور عن طريق التحليل.

(أ) معامل x^2 يساوي الواحد

مثال (٢١، ١)

حل المعادلة: $x^2 + bx + c = x^2 - 4x - 77 = 0$

الحل

$$m = 16 - 4(-77) = (18)^2$$

بالتأكيد يمكن تحليل الطرف الأيسر من المعادلة. والطريقة أن نفتش عن عددين حاصل ضربهما $c = -77$ ومجموعهما $b = -4$ فنجد $-77 = (-11)(7)$ ، فالعددان هما: -11 ، 7 والتحليل من الشكل: $(x + 7)(x - 11) = 0$ والجذران هما -7 ، 11 .

مثال (٢٢، ١)

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$
 حل المعادلة:

الحل

نفتش عن عددين حاصل ضربهما 12 ومجموعهما -7 ، فنجد:

$$12 = (-4)(-3)$$

والتحليل من الشكل: $(x - 4)(x - 3) = 0$ والجذران هما 4 ، 3

(ب) معامل x^2 لا يساوي الواحد.

مثال (٢٣، ١)

$$ax^2 + bx + c = 3x^2 - x - 4 = 0$$
 حل المعادلة:

نضرب طرفيها بالعدد $a = 3$ ، فتصبح على الشكل:

$$(3x)^2 - (3x) - 12 = 0$$

$$(y = 3x)y^2 - y - 12 = 0 \Leftarrow$$

التحليل هو من الشكل: $(y - 4)(y + 3) = 0$ أو $(3x - 4)(3x + 3) = 0$

$$x = \frac{4}{3}, x = -1$$
 والجذران هما:

مثال (٢٤، ١)

$$5x^2 - 9x + 4 = 0$$
 حل المعادلة:

الحل

نضرب طرفي المعادلة بالعدد: $a = 5$ ، فتصبح على الشكل:

$$(5x)^2 - 9(5x) + 20 = 0$$

$$\text{أو: } (y = 5x)y^2 - 9y + 20 = 0$$

لكن: $20 = (-4)(-5)$ ومجموع العددين -9 ، إذن شكل التحليل:

$$(5x - 5)(5x - 4) = 0 \text{ أو } (y - 5)(y - 4) = 0$$

$$\text{فالجذران هما: } x = 1, x = \frac{4}{5}$$

مثال (١, ٢٥)

$$\text{حل المعادلة: } 2x^2 - x - 21 = 0$$

الحل

نضرب طرفي المعادلة بالعدد: $a = 2$ ، فتصبح على الصورة:

$$(2x)^2 - (2x) - 42 = 0$$

$$\text{أو: } (y = 2x)y^2 - y - 42 = 0$$

نفتش عن عددين حاصل ضربهما -42 ومجموعهما -1 ، فنجد:

$$-42 = (-7)(+6)$$

$$\text{شكل التحليل: } (2x - 7)(2x + 6) = 0 \Leftrightarrow (y - 7)(y + 6) = 0 \text{ والجذران هما: } -3, \frac{7}{2}$$

وفي جميع الحالات، نضرب طرفي المعادلة بالعدد a ونضع $ax = y$ ، فتزد الحالة إلى الحالة (أ) بشرط أن يكون المميز هو مربع تام (مربع لعدد صحيح).

تمارين (١, ١)

أوجد معادلة كل مستقيم فيما يلي ضمن الشروط المحددة له:

(١) مار بالنقطتين: $(1, 1)$ ، $(2, 3)$

(٢) ميله يساوي: $m = 4$ ومار بالنقطة $(3, 5)$

(٣) يقطع من الجزء الموجب للمحور y جزءا قدره ٤ سم وميله يساوي -٤

(٤) يمر بالنقطة $(1, 1)$ وعمودي على المستقيم $2x - y = 0$

(٥) يمر بالنقطة $(2, 3)$ ويوازي المستقيم $2x - 3y + 5 = 0$

(٦) يمر بنقطة تقاطع المستقيمين: $x - y = 0$ ، $x + 2y = 1$ وعمودي على المستقيم $y = 2x$.

(٧) ارسم المستقيمات التالية:

(أ) $y = 2x$ (ب) $y + x = 1$ (ج) $y = -3$

(د) $x = -4$ (هـ) $2y - 3x = 5$ (و) $y = -x$

(٨) أوجد بعد النقطة $(1, 1)$ عن كل من المستقيمات الواردة في التمرين (٧).

إرشاد: بعد النقطة (x_1, y_1) عن المستقيم: $ax + by + c = 0$ يُعطى بالصيغة:

(١, ٢٨)

$$L = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(٩) حدد المستقيمات المتوازية أو المتعامدة بين المستقيمات التالية:

(أ) $x - y + 3 = 0$

(ب) $x + y - 4 = 0$

(ج) $2x + 2y + 5 = 0$

(د) $x - y = 5$

(١٠) أوجد الرأس الرابع D لمتوازي الأضلاع ABCD علما أن:

$A(1,1), B(2,2), C(0,2)$ ، ثم أوجد أطوال أضلاعه.

(١١) أوجد إحداثيات منتصفات القطع التالية:

حيث A, B, C, D معطاة في التمرين (١٠).

لاحظ أن إحداثيي منتصف القطعة الواصلة بين النقطتين (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) هما:

(١, ٢٩)

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

(١٢) أوجد معادلة الدائرة المارة بالنقاط: (1,0) , (0,1) , (1,1)

(١٣) أوجد ميل المماس للدائرة: $x^2 + y^2 - 2x = 0$ عند النقطة (1,1) ثم أوجد معادلة المماس لهذه الدائرة عند هذه النقطة.

(إرشاد: لاحظ أن هذه النقطة تحقق معادلة الدائرة ثم استفد من إحداثيي مركز الدائرة).

(١٤) أوجد النسبة المثلثية للزوايا الحادة التالية إذا كان:

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad (\text{أ}) \quad \cos x = \frac{1}{4} \quad (\text{ب}) \quad \tan x = 1 \quad (\text{ج})$$

$$\sec x = 3 \quad (\text{د}) \quad \csc x = 2 \quad (\text{هـ}) \quad \cot x = 2 \quad (\text{و})$$

(١٥) أوجد بالدرجات الزوايا التالية المعطاة بالتقدير الدائري:

$$\frac{17\pi}{3}, \frac{12\pi}{5}, \frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{11\pi}{5}, \frac{\pi}{8}$$

(١٦) أوجد بالتقدير الدائري الزوايا التالية:

$$-30^\circ, 720^\circ, 150^\circ, -60^\circ, 420^\circ, 120^\circ, 400^\circ$$

(١٧) أوجد مساحة وأطوال أقواس القطاعات الدائرية التي زواياها بالتقدير الدائري:

$$2\pi, \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$$

علما أن طول نصف قطر الدائرة يساوي 50 سم.

(١٨) أوجد النسب المثلثية للزوايا التالية:

$$15^\circ, 315^\circ, 720^\circ, 300^\circ, 240^\circ, -120^\circ, 315^\circ, 225^\circ, 135^\circ, -45^\circ$$

(١٩) أوجد النسب المثلثية للزوايا التالية:

$$120^\circ, -345^\circ, 15^\circ, 75^\circ, 210^\circ, -30^\circ$$

إرشاد: اعتمد فقط على الصيغتين التاليتين لرد النسب المثلثية للزوايا إلى نسب مثلثية لزويا حادة شهيرة:

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\text{فمثلا: } \sin 240 = \sin(180 + 60), \sin 150 = \sin(180 - 30)$$

$$\sin(75) = \sin(45 + 30), \sin(-45) = \sin(0 - 45), \sin 315 = \sin(360 - 45)$$

(٢٠) أوجد النسب المثلثية الأساسية للزوايا الآتية وذلك ضمن الشروط الموضحة:

$$(أ) \sec x = 2 \text{ والزاوية تقع في الربع الأول}$$

$$(ب) \cot x = \frac{1}{2} \text{ الزاوية تقع في الربع الثالث}$$

$$(ج) \cos x = \frac{1}{4} \text{ الزاوية تقع في الربع الرابع}$$

$$(د) \sin x = \frac{2}{3} \text{ الزاوية تقع في الربع الثاني}$$

(٢١) حل المعادلات الآتية على الفترة $[0, 2\pi]$:

$$(أ) \sin x = \frac{1}{2} \quad (ب) \sin 2x = \frac{-\sqrt{3}}{2} \quad (ج) \cos 3x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$(د) \sec 4x = -2 \quad (هـ) \tan\left(\frac{1}{2}x\right) = -1 \quad (و) \csc \frac{1}{5}x = -1$$

(٢٢) حل المعادلات الآتية على الفترة $[0, 2\pi]$:

$$(أ) 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \quad (ب) \sin 3x = -\sin x$$

$$(ج) \cos 2x = \cos 3x \quad (د) \tan 2x = -\tan x$$

$$(و) \sin 3x = \cos x \quad (ز) \cot 3x = -\tan 2x$$

(١, ٣٠)

$$\boxed{\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}} \quad (٢٣) \text{ أثبت أن:}$$

$$(٢٤) \text{ أثبت أن: } 1 + \cos 2\theta = 2\cos^2 \theta, 1 - \cos 2\theta = 2\sin^2 \theta$$

ثم استفد من هاتين الصيغتين لإيجاد: $\cos 15, \sin 15, \cos \frac{\pi}{8}, \sin \frac{\pi}{8}$

(٢٥) حل المعادلة التالية على الفترة $[0, 2\pi]$:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$$

(إرشاد: أثبت أن: $\sin 3x + \sin x = 2\sin 2x \cos x$)

(٢٦) بسّط ما يلي:

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{4} + x\right) \cdot \sin(3\pi + x) \\ \sec\left(-\frac{\pi}{2} + 2x\right) \cdot \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \tan(\pi + x)$$

(٢٧) حوّل إلى حاصل ضرب المقادير التالية:

$$\sin 4 - \sin x \quad (\text{ج}) \quad \cos x + \cos 2x \quad (\text{ب}) \quad \cos 2x - \cos 3x \quad (\text{أ})$$

(٢٨) حوّل من حاصل ضرب إلى مجموع المقادير التالية:

$$\cos x \cos 2x \quad (\text{ج}) \quad \cos x \sin x \quad (\text{ب}) \quad \sin x \sin 3x \quad (\text{أ})$$

(٢٩) حل المعادلة التالية:

$$\begin{aligned} x^2 - 9 = 0 \quad (\text{ب}) \quad x^2 - 5x + 6 = 0 \quad (\text{أ}) \\ x^2 - 4x + 4 = 0 \quad (\text{د}) \quad x^2 - 5x = 0 \quad (\text{ج}) \\ 2x^2 - 11x + 15 = 0 \quad (\text{و}) \quad 4x^2 + 12x + 9 = 0 \quad (\text{هـ}) \\ 8x^2 - 2x - 15 = 0 \quad (\text{ح}) \quad 21x^2 + 20x - 9 = 0 \quad (\text{ز}) \\ 6x^2 - 5x - 21 = 0 \quad (\text{ي}) \quad x^2 - x - 1 = 0 \quad (\text{ط}) \\ 35x^2 - 12x - 32 = 0 \quad (\text{ل}) \quad x^2 + x + 8 = 0 \quad (\text{ك}) \end{aligned}$$

ملحوظة (٢-١)






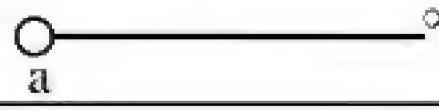



استعن لحل المثالين (٢٧) و (٢٨) بالصيغ التالية:

$$\begin{cases} \sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2} \\ \sin u - \sin v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2} \\ \cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2} \\ \cos u - \cos v = -2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2} \end{cases}$$

التي تحول مجموع نسبتيين مثلثيتين إلى حاصل ضربها، وبالصيغ الواردة في الصفحة ٢٧٧.

المتباينات
INEQUALITIES

(١, ٢) الفترات في مجموعة الأعداد الحقيقية IR

تعريف (١, ٢) (Definition)				
إذا كان a, b عددين حقيقيين $(a, b \in \mathbb{R})$ فإننا نسمي المجموعات الجزئية التالية من \mathbb{R} بالفترات ونعرفها كما يلي:				
المجموعة الجزئية	الرمز	اسم الفترة	بيان الفترة	
$\{x a \leq x \leq b\}$	$[a,b]$	فترة مغلقة (Closed)		١
$\{x a < x < b\}$	(a,b) أو: $]a,b[$	فترة مفتوحة Open interval		٢
$\{x a < x \leq b\}$	$(a,b]$	فترة نصف مفتوحة		٣
$\{x a \leq x < b\}$	$[a,b)$	Half-Open interval		٤
$\{x x \geq a\}$	$[a, \infty)$	Infinite Interval		٥
$\{x x > a\}$	(a, ∞)	فترة لانهائية		٦
$\{x x \leq a\}$	$(-\infty, a]$			٧
$\{x x < a\}$	$(-\infty, a)$			٨
$\{x -\infty < x < \infty\}$	\mathbb{R}	مجموعة الأعداد الحقيقية		٩

(٢, ٢) بعض المجموعات المستخدمة في هذا الكتاب

الأعداد الحقيقية ماعد الصفر	الأعداد الحقيقية Real numbers	الأعداد الكسرية Rational numbers	الأعداد الصحيحة Integers numbers	الأعداد الطبيعية (الصحيحة الموجبة) Positive Integers Numbers	اسم المجموعة
IR*	IR	Q	Z	IN = Z ⁺	الرمز
ح*	ح	ن	ص	ط = ص +	الرمز العربي

(٢, ٣) القيمة المطلقة
Absolute Value

تعريف (٢, ٢)

القيمة المطلقة لعدد حقيقي x ، يرمز لها بالرمز |x| وتُعرَّف كما يلي:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

فمثلا: $|5| = 5, |0| = 0, |-3| = 3$

(٢, ١)

نتيجة (٢, ١)

$\sqrt{x^2} = |x|$

نتيجة (٢, ٢)

القيمة المطلقة لعدد لا يساوي الصفر هي عدد موجب استنادًا لخواص الحقل IR وللتعريف (٢, ٢) يمكن البرهان على صحة النظريتين التاليتين:

نظرية (٢, ١) (Theorem)

إذا كانت x, y و c أعدادًا حقيقية، فإن:

$$x > y \Leftrightarrow x + c > y + c \quad (١)$$

(يمكن أن نضيف (Add) أو نطرح (Subtract) من طرفي متباينة العدد نفسه).

$$x > y \Leftrightarrow cx > cy \quad (٢) \quad (c \text{ عدد موجب (Positive)})$$

(يمكن أن نضرب (Multiply) طرفي متباينة أو نقسم (Divide) طرفي متباينة على عدد موجب).

$$x > y \Leftrightarrow cx < cy \quad (٣) \quad (c \text{ عدد سالب (Negative)})$$

(يمكن أن نضرب طرفي متباينة أو نقسم طرفي متباينة على عدد سالب مع تغيير جهة التباين).

نظرية (٢, ٢)

إذا كان x, y عددين حقيقيين، وكان a عددًا موجبًا، فإن:

$$|xy| = |x||y| \quad (١)$$

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \quad (٢)$$

$$|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \text{ أو } x \geq a \quad (٣)$$

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad (٤) \quad (\text{متباينة المثلث (Triangle inequality)})$$

$$||x| - |y|| \leq |x + y| \quad (٥)$$

$$|x| = a \Leftrightarrow x = a \text{ أو } x = -a \quad (٦)$$

(٢, ٤) حل المتباينات

The Solution of Inequalities

حل متباينة طرفيها يتبعان متغيرًا واحدًا x هو إيجاد جميع قيم x المحققة للمتباينة.

مثال (١, ٢)

$$\text{حل المتباينة: } \frac{x}{3} + 2x > 1 - x$$

الحل

(١) نضرب طرفي المتباينة بالعدد 3 ، فنجد:

$$x + 6x > 3 - 3x$$

نضيف 3x للطرفين فنجد:

$$x + 6x + 3x > 3$$

(لاحظ أن هذا يكافئ نقل حد من طرف إلى طرف آخر مع تغيير إشارة ذلك الحد)

$$\text{ومنه: } x > \frac{3}{10} \Leftrightarrow 10x > 3$$

فمجموعة الحل هي: $\left(\frac{3}{10}, \infty\right)$

مثال (٢, ٢)

$$\text{حل المتباينة: } \frac{x-1}{6} \geq x - \frac{2x}{3} + 2$$

الحل

نضرب طرفي المتباينة بالعدد 6 ، فنجد:

$$\Leftrightarrow x - 1 \geq 6x - 4x + 12$$

$$\Leftrightarrow x - 6x + 4x \geq 1 + 12$$

$$x \leq -13 \Leftrightarrow -x \geq 13$$

(ضربنا الطرفين بالعدد السالب -1 مع تغيير جهة التباين)

فمجموعة الحل هي: $[-13, -\infty)$

مثال (٢, ٣)

$$\text{حل المتباينة: } 1 > \frac{2-3x}{4} \geq -1$$

الحل

نضرب أطراف المتباينة بالعدد 4، فنجد:

$$4 > 2 - 3x \geq -4$$

نضيف إلى جميع الأطراف العدد -2 ، فنجد:

$$-\frac{2}{3} < x \leq 2 \text{ ومنه: } 2 > -3x \geq -6$$

(غيرنا جهة التباين)، فمجموعة الحل هي: $\left[-\frac{2}{3}, 2\right]$

مثال (٢, ٤)

$$|2x - 3| \leq 1 \quad \text{حل المتباينة:}$$

الحل

$$|2x - 3| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 2x - 3 \leq 1 \Rightarrow$$

$$3 - 1 \leq 2x \leq 1 + 3 \Rightarrow 2 \leq 2x \leq 4 \Rightarrow 1 \leq x \leq 2$$

مجموعة الحل (the solution set) هي: $[1, 2]$

مثال (٢, ٥)

$$|3x - 4| > 5 \quad \text{حل المتباينة:}$$

الحل

$$|3x - 4| > 5 \Leftrightarrow 3x - 4 > 5 \text{ أو } 3x - 4 < -5 \Rightarrow$$

$$3x > 9 \quad \text{أو} \quad 3x < -1 \Rightarrow$$

$$x > 3 \quad \text{أو} \quad x < -\frac{1}{3}$$

فمجموعة الحل هي: $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (3, \infty) = \mathbb{R} - \left[-\frac{1}{3}, 3\right]$

مثال (٢, ٦)

$$||4x - 2| - 1| < 3 \quad \text{حل المتباينة:}$$

الحل

$$||4x - 2| - 1| < 3 \Leftrightarrow -3 < |4x - 2| - 1 < 3 \Rightarrow$$

$$-2 < |4x - 2| < 4$$

(أ) حل المتباينة: $|4x - 2| < 2$ هو \mathbb{R}

لأن المقدار $|4x - 2|$ موجب أو صفر وفي كلتا الحالتين أكبر من -2.
 (ب) أما حل المتباينة $|4x - 2| < 4$ فهو يكافئ حل المتباينة:

$$\Leftrightarrow -2 < 4x < 6 \Leftrightarrow -4 < 4x - 2 < 4$$

$$-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \Leftrightarrow -\frac{2}{4} < x < \frac{6}{4}$$

فمجموعة الحل هي: $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$
 وتقاطع الحلين في (أ)، (ب) هو $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ وهو حل المتباينة المعطاة.

مثال (٧، ٢)

حل المتباينة: $\|x\| - 1 \geq 2$

الحل

$$\|x\| - 1 \geq 2 \Leftrightarrow \|x\| - 1 \geq 2 \text{ أو } \|x\| - 1 \leq -2 \Rightarrow$$

$$\|x\| \geq 3 \text{ أو } \|x\| \leq -1$$

(أ) حل المتباينة $\|x\| \leq -1$ هو \emptyset لأن الطرف الأيسر هو $\|x\|$ وهو موجب أو صفر ولا يمكن أن يكون أقل أو يساوي -1 .

(ب) أما حل المتباينة $\|x\| \geq 3$ فهو: $\mathbb{R} - (-3, 3)$

وعلى الطالب برهان ذلك.

وبأخذ اتحاد الحلين في (أ)، (ب) نجد: $\mathbb{R} - (-3, 3)$ وهو حل المتباينة المعطاة.

مثال (٨، ٢)

حل المتباينات التالية:

$$(١) \|x - 1\| < -1 \quad (٣) \|x - 1\| \geq -1$$

$$(٢) \|x - 1\| \leq -1 \quad (٤) \|x - 1\| \leq 0$$

الحل

(١) مجموعة حلها \emptyset لأن الطرف الأيسر موجب أو صفر ولا يمكن أن يكون أقل من عدد سالب.

- (٢) مجموعة حلها \emptyset للسبب نفسه.
- (٣) مجموعة حلها \mathbb{R} لأن الطرف الأيسر مقدار موجب أو يساوي الصفر وفي كلتا الحالتين هو أكبر من عدد سالب.
- (٤) مجموعة حلها $\{1\}$ لأن الطرف الأيسر موجب أو صفر ولا يمكن للمقدار الموجب أن يكون أقل من الصفر ولكن يمكن أن يساوي الطرف الأيسر صفرًا عند $x = 1$ وعندها يكون $x = 1$ حلاً للمتباينة.

ملحوظة

إشارة المقدار: $ax^2 + bx + c$

(عندما يأخذ المتغير x جميع القيم الحقيقية) هي دومًا مثل إشارة a (باستثناء مواضع الجذور فالمقدار يساوي صفرًا) إلا ما بين الجذرين (roots) إن وجدوا فالإشارة هي عكس إشارة a .

مثال (٩, ٢)

حل المتباينة: $6x^2 - 13x + 6 \geq 0$

الحل

للتحليل: نضرب طرفي المتباينة بالعدد 6، فنجد:

$$(6x)^2 - 13(6x) + 36 \geq 0$$

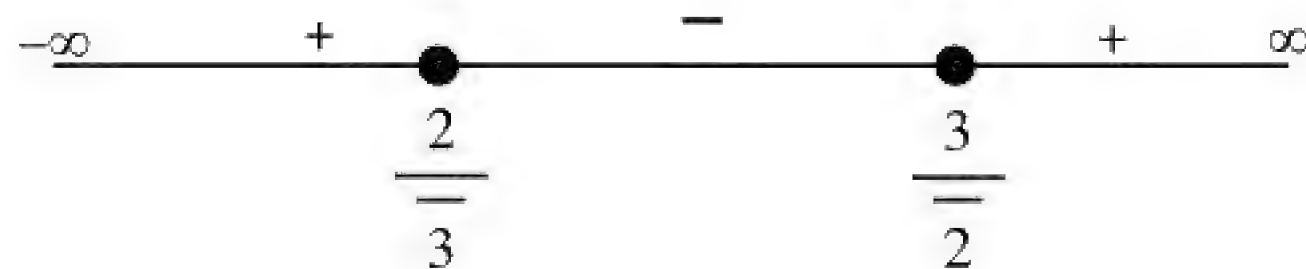
نفتش عن عددين حاصل ضربهما 36 ومجموعهما -13- فنجد:

$$36 = (-4)(-9) \text{ والتحليل هو من الشكل:}$$

$$(6x - 9)(6x - 4) \geq 0$$

جذرا المقدار من الدرجة الثانية (second degree): هما:

$$x = \frac{3}{2}, x = \frac{2}{3} \text{ وإشارته هي:}$$



ومجموعة حل المتباينة هي: $\mathbb{R} - \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$

مثال (٢, ١٠)

حل المتباينة: $4x^2 + 3x + 1 < 0$

الحل

المميز يساوي: $9 - 16 = -7 < 0$ وإشارة المقدار هي من إشارة معامل x^2 أي أنها موجبة دوماً. فحل المتباينة هو \emptyset .

مثال (٢, ١١)

حل المتباينة: $4x^2 - 12x + 9 > 0$

الحل

المميز يساوي: $144 - 4(4)(9) = 0$ والمقدار مربع تام. إذن:
 $(2x - 3)^2 > 0$. وإشارة المقدار في الطرف الأيسر موجبة إلا عند $x = \frac{3}{2}$ فيقبل جذراً مضاعفاً والحل هو: $\mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$

مثال (٢, ١٢)

حل المتباينة: $x \neq -1, x \neq 1, \frac{2}{1-x} > \frac{x}{1+x}$

لننقل المقدار في الطرف الأيمن إلى الأيسر، فنجد:

$$\frac{2}{1-x} - \frac{x}{1+x} > 0$$

وبتوحيد المقامات، فإن:

$$\frac{x^2 + x + 2}{(1-x)(1+x)} > 0 \Leftrightarrow \frac{2(1+x) - x(1-x)}{(1-x)(1+x)} > 0$$

وبملاحظة أن مميز كثيرة الحدود في البسط هو: $1 - 8 = -7 < 0$ ، فإن إشارة كثيرة الحدود هي موجبة دوماً (من إشارة معامل x^2).

ولابد أن يكون: $(1-x)(1+x) > 0$

الجذران للطرف الأيسر هما: $1, -1$ وما بين الجذرين الإشارة عكس إشارة معامل x^2 أي أنها موجبة. فالحل هو: $(-1, 1)$.

مثال (١٣, ٢)

حل المتباينة: $x \neq -4, f(x) = \frac{(x^2-1)(x^2-5x+6)}{x+4}$

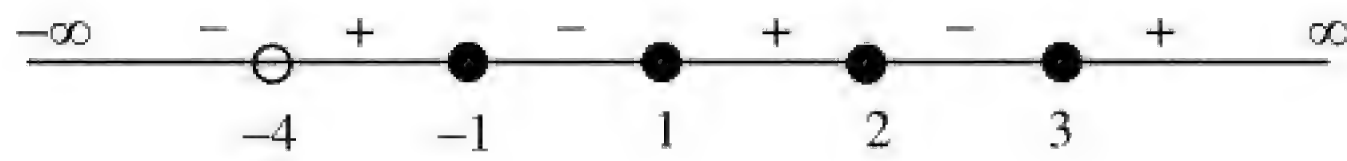
الحل

(١) بالتحليل نجد:

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)(x-2)(x-3)}{(x+4)} \geq 0$$

جذور البسط والمقام (the numerator and dominator) : $1, -1, 2, 3, -4$

وهي جذور بسيطة.



فالإشارات تتناوب، وبملاحظة أن $f(0) = -\frac{6}{4} < 0$ فإن مجموعة

الحل هي:

$$(-4, -1] \cup [1, 2] \cup [3, \infty)$$

(٢) طريقة أخرى (طريقة الجدول)

ننشئ الجدول التالي: حيث وضعنا في السطر الأول جذور البسط والمقام التي حددت ست فترات على خط الأعداد، ثم ندرس الإشارة الخاصة بكل مقدار ونضرب بعدها الإشارات الخاصة بكل فترة ونضعها في السطر الأخير.

المقدار	$-\infty$	-4	-1	1	2	3	∞
$x^2 - 1$	+	+	0	-	0	+	+
$x^2 - 5x + 6$	+	+		+	+	0	-
$x + 4$	-		+	+	+	+	+
إشارة f(x)	-		+	0	-	0	+

مجموعة الحل هي: $(-4,-1] \cup [1,2] \cup [3,\infty)$

مثال (١٤, ٢)

حل المتباينة:

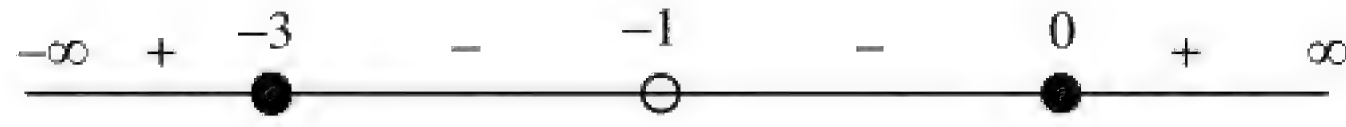
$$x \neq -1, f(x) = \frac{(x^3 + x)(x + 3)}{(x + 1)^2} \leq 0$$

الحل
طريقة الجدول:

المقدار	$-\infty$	-3	-1	0	∞
x	-	-	-	0	+
$x^2 + 1$	+	+	+		+
$x + 3$	-	0	+	+	+
$(x + 1)^2$	+	+		+	+
إشارة f(x)	+	0	-		-

مجموعة الحل: $[-3,0] - \{-1\}$
(وضعنا المقدار $x^3 + x$ على الشكل $x(x^2 + 1)$)

الطريقة المباشرة:



المتباينة تكتب على الشكل:

$$f(x) = \frac{x(x^2 + 1)(x + 3)}{(x + 1)^2} \leq 0$$

والمقدار $1 + x^2$ موجب دوماً أما المقدار $(x + 1)^2$ فهو موجب إلا عند $x = -1$ فيساوي الصفر والعدد $x = -1$ ليس من مجال الدالة. فالإشارة هي من إشارة كثيرة الحدود $x(x + 3)$ وهي سالبة ما بين الجذرين $-3, 0$ موجبة خارج الجذرين فمجموعة الحل هي المحددة سابقاً.

مثال (١٥، ٢)

$$\text{حل المتباينة: } x \neq 1, \frac{x}{1-x} \geq 1$$

الحل

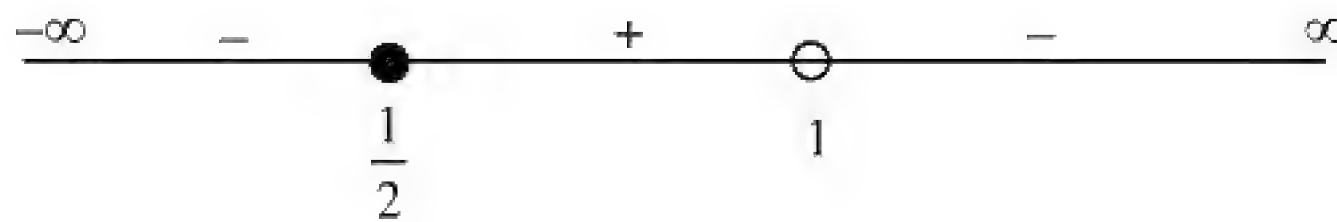
ننقل الحد من الطرف الأيمن إلى الأيسر، نجد:

$$\frac{x}{1-x} - 1 \geq 0$$

وبتوحيد المقامات، فإن:

$$\frac{x - (1-x)}{1-x} \geq 0 \Rightarrow \frac{2x-1}{1-x} \geq 0$$

جذور البسط والمقام: $1, \frac{1}{2}$. وهي تحدد ثلاث فترات على خط الأعداد، والإشارات تتناوب بسبب كون الجذور بسيطة.



لاحظ أن: $f(2) < 0$ وأن 1 جذر للمقام فمجموعة الحل هي: $(\frac{1}{2}, 1)$.

مثال (١٦، ٢)

$$\text{حل المتباينة: } \frac{2}{1-x} > \frac{3}{1+x}, x \neq -1, x \neq 1$$

الحل

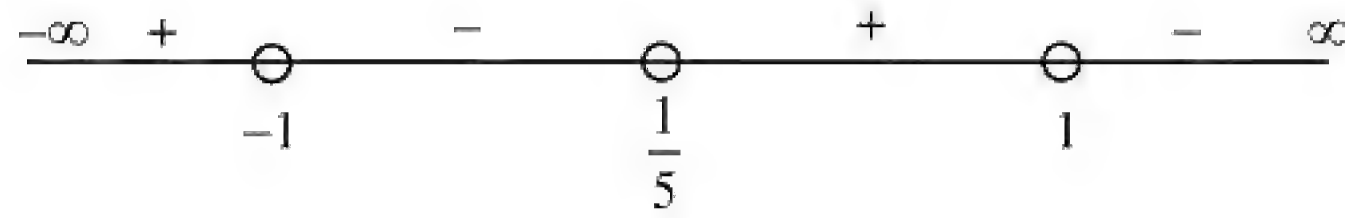
لننقل المقدار في الجانب الأيمن إلى الجانب الأيسر، فنجد:

$$\frac{2}{1-x} - \frac{3}{1+x} > 0$$

وبتوحيد المقامات، فإن:

$$f(x) = \frac{5x-1}{(1-x)(1+x)} > 0 \Leftrightarrow \frac{2(1+x) - 3(1-x)}{(1-x)(1+x)} > 0$$

جذور البسط والمقام: $1, -1, \frac{1}{5}$ وهي تحدد أربع فترات على خط الأعداد، والإشارات تتناوب بسبب كون الجذور بسيطة.



لاحظ أن $f(2) < 0$ وأن الجذور جميعها ليست حلا.

فمجموعة الحل هي: $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{5}, 1\right)$.

مثال (١٧، ٢)

$$\text{حل المتباينة: } |2x-1| \leq |x+1|$$

الحل

بما أن المقدارين في الطرفين الأيمن والأيسر غير سالبين فيمكن أن نربع طرفي المتباينة، فنجد:

$$(2x-1)^2 - (x+1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow (2x-1)^2 \leq (x+1)^2$$

وبملاحظة أن الطرف الأيسر هو فرق بين مربعين مقدارين وأن:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \text{ ، فإن المتباينة تكتب على الشكل:}$$

$$[(2x-1) - (x+1)][(2x-1) + (x+1)] \leq 0$$

$$\text{أو: } (x-2)(3x) \leq 0$$

وإشارة المقدار في الطرف الأيسر هي:



فمجموعة الحل هي: $[0, 2]$

مثال (١٨, ٢)

$$\text{حل المتباينة: } x \neq 2, \frac{|3x-1|}{|x-2|} < 1$$

الحل

حسب خواص القيمة المطلقة لقسمة مقدارين، فإن:

$$\frac{|3x-1|}{|x-2|} < 1 \text{ ، ومنه:}$$

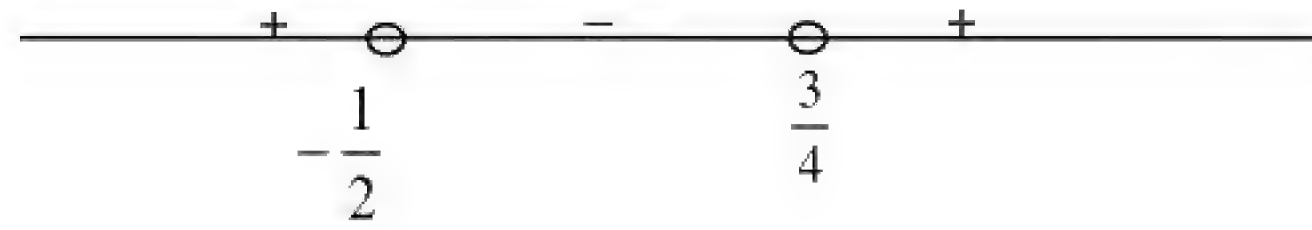
$$|3x-1| < |x-2| \text{ مع ملاحظة أن } x \neq 2$$

وبترتيب الطرفين، نجد:

$$x \neq 2, (3x-1)^2 - (x-2)^2 < 0$$

$$\Leftrightarrow x \neq 2, [(3x-1) - (x-2)][(3x-1) + (x-2)] < 0 \text{ أو:}$$

$$x \neq 2, (2x+1)(4x-3) < 0 \text{ وإشارة المقدار هي:}$$



ومجموعة الحل هي: $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ ولا تحوي العدد 2 وإلا استثنيناه من الحل.

مثال (٢, ١٩)

حل المتباينة: $|x| < 2x + 1$

الحل

في هذه الحالة لا يمكن أن نربع الطرفين لأن المقدار في الطرف الأيمن قد يكون موجباً وقد يكون سالباً، لذا نلجأ إلى تعريف القيمة المطلقة.

(١) إذا كان: $x \geq 0$ ، فإن $|x| = x$. وبالتالي تكتب المتباينة على الشكل:

$-1 < x \Leftrightarrow x < 2x + 1$ والمقبول من هذا الحل هو الموافق للشـرط

$x \geq 0$ ، إذن مجموعة الحل الموافق: $[0, \infty)$

(٢) إذا كان: $x < 0$ ، فإن $|x| = -x$. وبالتالي تكتب المتباينة على الشكل:

$-\frac{1}{3} < x \Leftrightarrow -1 < 3x \Leftrightarrow -x < 2x + 1$ والمقبول هو الموافق للشـرط

$x < 0$ ، إذن مجموعة الحل الموافق:

$$\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$$

واتحاد الحلين في (١) و (٢) يعطي الحل المطلوب وهو:

$$\left(-\frac{1}{3}, \infty\right)$$

مثال (٢, ٢٠)

أثبت أنه إذ كان: $|x - 3| < 2$ ، فإن: $|x^2 - 8| < 17$

الحل

$$\Leftrightarrow 1 < x < 5 \Leftrightarrow -2 < x-3 < 2 \Leftrightarrow |x-3| < 2$$

$$\Leftrightarrow -7 < x^2 - 8 < 17 \Leftrightarrow 1 < x^2 < 25$$

$$|x^2 - 8| < 17 \Leftrightarrow -17 < -7 < x^2 - 8 < 17$$

مثال (٢١, ٢)

$$\left| \frac{x-3}{x^2+1} \right| < 7 \text{ فأثبت أن: } |x| < 4 \text{ إذا كان}$$

الحل

$$\left| \frac{x-3}{x^2+1} \right| = \frac{|x-3|}{x^2+1} \leq \frac{|x-3|}{1} \leq |x| + |-3| < 4 + 3 = 7$$

تمارين (١, ٢)

حل المتباينات التالية:

$$\frac{3x-4}{2} > 5x-7 \quad (٢)$$

$$|1-2x| \geq 5 \quad (٤)$$

$$||x|-3| > 1 \quad (٦)$$

$$|2x-3| \leq 0 \quad (٨)$$

$$|4x-2| > 0 \quad (١٠)$$

$$x^2 - 6x + 8 \geq 0 \quad (١٢)$$

$$x^3 - 8 > 0 \quad (١٤)$$

$$x - x^3 \leq 0 \quad (١٦)$$

$$x < 5x - 2 < 3x - 1 \quad (١٨)$$

$$1 < |x-2| < 2 \quad (٢٠)$$

$$|2x-5| > |3x-2| \quad (٢٢)$$

$$\frac{x-1}{x+2} < 0 \quad (٢٤)$$

$$x(x-1)(x-2) \geq 0 \quad (٢٦)$$

$$x^3 - 3x + 2 > 0 \quad (٢٨)$$

$$\frac{x^2-4}{x^2-9} \geq 0 \quad (٣٠)$$

$$|x-2| \geq 2x+4 \quad (٣٢)$$

$$\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} < 0 \quad (٣٤)$$

$$(x-1)^4(x+1)^2 > 0 \quad (٣٦)$$

$$2x + \frac{1}{2} \geq x \quad (١)$$

$$|2x-3| < 2 \quad (٣)$$

$$||x|-1| \leq 2 \quad (٥)$$

$$|x-1| \leq -1 \quad (٧)$$

$$|3x-5| > -1 \quad (٩)$$

$$(x-1)(x-2) \geq 0 \quad (١١)$$

$$x^2 - 4 < 0 \quad (١٣)$$

$$(x+1)^3 - 1 \geq 0 \quad (١٥)$$

$$\frac{1}{|x-1|} > 1 \quad (١٧)$$

$$0 < |2x-3| < 1 \quad (١٩)$$

$$|x-3| \leq |x-4| \quad (٢١)$$

$$\left| \frac{x-4}{2x-1} \right| < 2 \quad (٢٣)$$

$$\frac{x}{x-1} > 1 \quad (٢٥)$$

$$\frac{1}{x-2} \leq \frac{2x+3}{4} \quad (٢٧)$$

$$\frac{x^2-3x+2}{x} \geq 0 \quad (٢٩)$$

$$|2x-3| \geq x \quad (٣١)$$

$$\frac{1}{1-x} \geq -\frac{x}{1+x^2} \quad (٣٣)$$

$$x^4 - 16 \leq 0 \quad (٣٥)$$

حل المعادلات التالية:

$$|x-2| = -3 \quad (٣٨)$$

$$|x| = 2x-1 \quad (٤٠)$$

$$|x-1| = 2 \quad (٣٧)$$

$$|x^2+x| = x^2+x \quad (٣٩)$$

(٤١) إذا كان $a^2 \geq b^2$ حيث $a, b \in \mathbb{R}$ ، فإن إحدى الإجابات التالية محققة:

$$(أ) \ a \geq b \ , \ (ب) \ a \leq b \ , \ (ج) \ a = b \ , \ (د) \ |a| \geq |b|$$

اختر الإجابة الصحيحة مبررًا إجابتك.

(٤٢) حدد الشروط على العددين a, b في كل حالة فيما يلي ليكون التقرير صحيحًا:

$$(أ) \ a^2 > b^2 \Leftrightarrow a > b$$

$$(ب) \ a^2 < b^2 \Leftrightarrow a > b$$

$$(ج) \ \frac{1}{a} < \frac{1}{b} \Leftrightarrow a > b$$

(٤٣) أثبت أنه إذا كان:

$$(أ) \ |x-2| \leq 1 \ , \ \text{فإن: } |x^2-4| \leq 5$$

$$(ب) \ |2x-1| \leq 4 \ , \ \text{فإن: } \left|x^2 - \frac{1}{4}\right| \leq 6$$

(٤٤) حدد التقرير الصائب فيما يلي:

$$(أ) \ x < y \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$$

$$(ب) \ \sqrt{x^2} = x$$

$$(ج) \ |x+y| \leq |x| + |y|$$

$$(د) \ x^2 < y^2 \Leftrightarrow x < y$$

(x, y عددا حقيقيان)

(٤٥) حل المعادلات التالية:

$$(أ) \ |x-2| = 1$$

$$(ب) \ |x^2-1| = 4$$

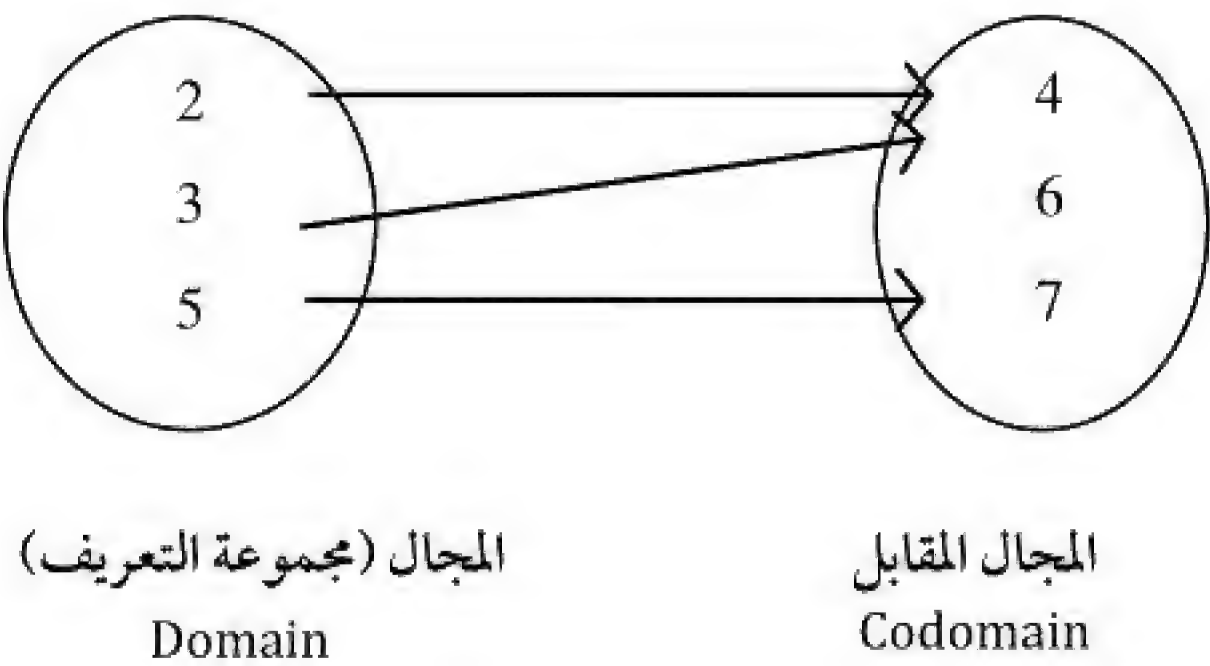
$$(ج) \ |x^2-5x+6| = 16$$

الفصل الثالث

الدوال الحقيقية THE REAL FUNCTIONS

(١, ٣) الدالة الحقيقية

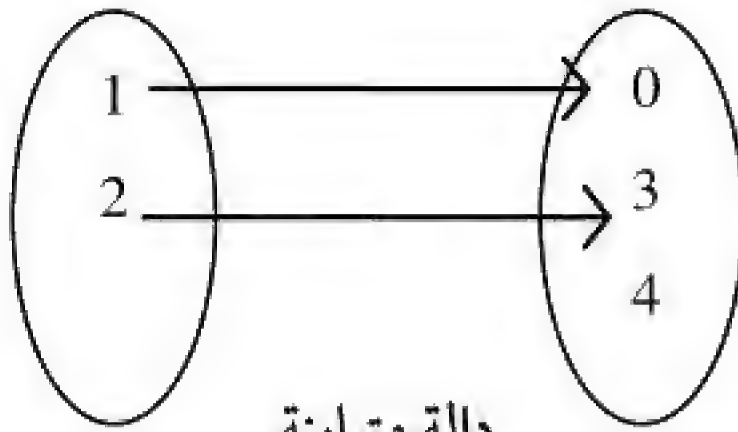
تعريف (١, ٣)
الدالة الحقيقية علاقة من مجموعة $A (A \subseteq \mathbb{R})$ إلى مجموعة $B (B \subseteq \mathbb{R})$ بحيث يرتبط كل عنصر من A بعنصر وحيد من B . نسمي A مجال الدالة أو مجموعة تعريفها كما نسمي B مجالها المقابل.



شكل (١, ٣).

نعتبر عن الدالة f بالشكل: $f : A \rightarrow B$
ونعتبر عن قاعدة (Rule) الدالة بالمعادلة: $y = f(x)$

نسمي صورة العنصر a وهي $f(a)$ بقيمة الدالة f (The value of f) عند a .
 نسمي مجموعة صور المجال بمدى f (Range of f) ففي الشكل (٣, ١) مدى الدالة هو: $\{4, 7\}$ ،
 ومجالها هو: $\{2, 3, 5\}$ ، أما مجالها المقابل فهو:
 $\{4, 6, 7\}$.



دالة متباينة
One to One function

شكل (٣, ٢).

تعريف (٣, ٢)

نقول: إن الدالة f دالة متباينة

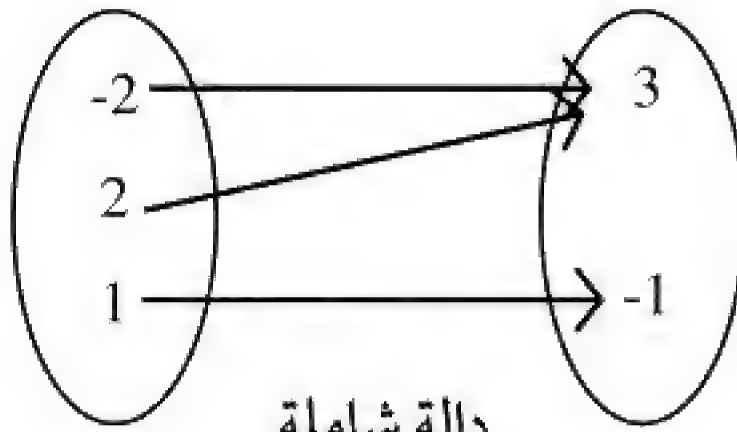
(أو أحادية) إذا تحقق لكل x_1, x_2

من مجال الدالة:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

وهذا يكافئ:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$



دالة شاملة
Onto function

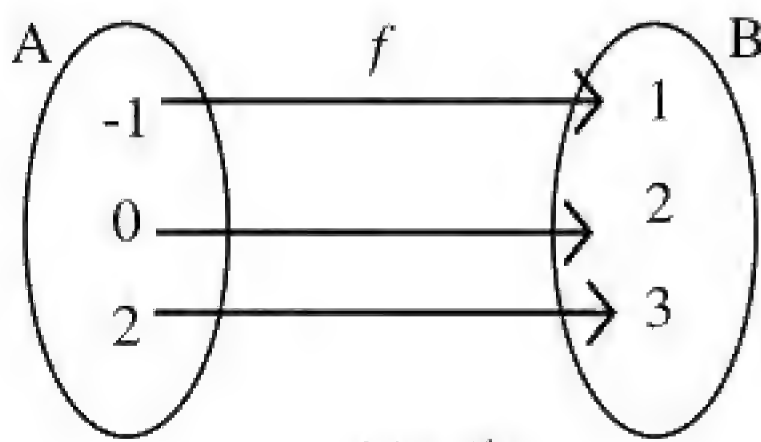
شكل (٣, ٣).

تعريف (٣, ٣)

الدالة الشاملة (الغامرة): هي التي يرتبط كل

عنصر من مجالها المقابل بعنصر واحد على

الأقل من المجال.



دالة تقابل
Bijective function

شكل (٣, ٤).

تعريف (٣, ٤)

دالة التقابل هي الدالة المتباينة والشاملة بأن

واحد.

وهنا يرتبط كل عنصر من المجال المقابل بعنصر

وحيد من المجال.

تقبل دالة التقابل دالة عكسية f^{-1} مجالها B ومجالها المقابل A نحصل عليها من الشكل (٣, ٤) بقلب جهة الأسهم، فمثلاً:

$$f^{-1}(1) = -1, \quad f^{-1}(3) = 2, \quad f^{-1}(2) = 0$$

مثال (١, ٣)

أوجد مجال كل من الدوال المعرفة كما يلي:

$$(١) \quad f(x) = x^4 - 2x^3 + 2$$

$$(٢) \quad f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 - 4}$$

$$(٣) \quad f(x) = \sqrt{1 + x^2}$$

$$(٤) \quad f(x) = \sqrt{-2x^2 - x + 3}$$

الحل

(١) مجال f هو IR لأنها كثيرة حدود (polynomial function).

(٢) مجال f هو $IR - \{-2, 2\}$ ، لأن مجال أي كسر بسطه ومقامه كثيرة حدود هو: IR مستثنى منه أصفار المقام، وهنا أصفار المقام: -2, 2 .

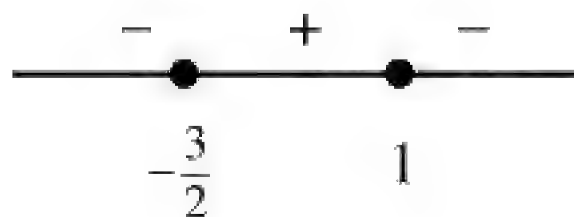
(٣) مجال f هو IR ، لأن المقدار تحت إشارة الجذر مميزه يساوي -4 فإشارته من إشارة معامل x^2 فهو موجب دومًا (يظهر لنا مباشرة أن المقدار $1 + x^2$ موجب وأصغر قيمة له هي الوحدة).

(٤) الدالة f معرفة من أجل قيم x غير السالبة أي المحققة للشرط:

$$-2x^2 - x + 3 \geq 0$$

تكتب المتباينة على الشكل: $(+2x + 3)(-x + 1) \geq 0$

وإشارة المقدار في الطرف الأيسر:



فمجموعة الحل هي: $\left[-\frac{3}{2}, 1\right]$

ملحوظة: إذا لم نذكر مجال الدالة f فمجالها هو مجموعة كل الأعداد الحقيقية x التي من أجلها $f(x) \in \mathbb{R}$.

مثال (٢, ٣)

أوجد مجال f ، علمًا بأن:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{1+x}} \quad (١)$$

$$f(x) = \sqrt{1+|x|} \quad (٢)$$

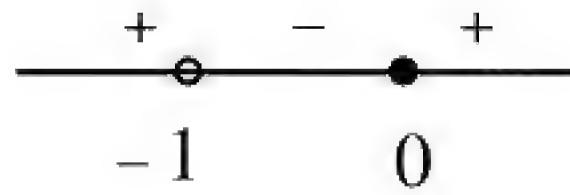
الحل

(١) مجال الدالة f هو مجموعة قيم x المحققة للشرط:

$$\frac{x}{1+x} \geq 0 \quad (\text{ما تحت إشارة الجذر ليس سالبًا})$$

جذرا البسط والمقام: $-1, 0$

وإشارة الكسر:



(لاحظ أن العدد -1 جذر للمقام ولا يجوز القسمة على الصفر).

فالمجال هو: $(-\infty, -1) \cup [0, \infty) = \mathbb{R} - [-1, 0)$

(٢) المجال هو \mathbb{R} ، لأن: $|x| + 1 \geq 1 \Leftrightarrow |x| \geq 0$

نعرف فيما يلي مجموع دالتين f و g والفرق بينهما وحاصل ضربهما وقسمتهما بالشكل التالي:

$$h(x) = (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) \quad (\text{أ})$$

$$h(x) = (f \cdot g)(x) = f(x)g(x) \quad (\text{ب})$$

$$(g(x) \neq 0)h(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad (\text{ج})$$

ومجال الجمع والفرق أو الضرب والقسمة هو: تقاطع المجالين إلا في حالة القسمة فيستثنى

أصفار المقام.

مثال (٣, ٣)

أوجد مجال h ، إذا علمت أن:

$$h(x) = \sqrt{4-x^2} + |x| \quad (١)$$

$$h(x) = \frac{x^2 + x}{\sqrt{1-x}} \quad (٢)$$

$$h(x) = \frac{|x-1|}{\sqrt{-x^2-x+2}} \quad (٣)$$

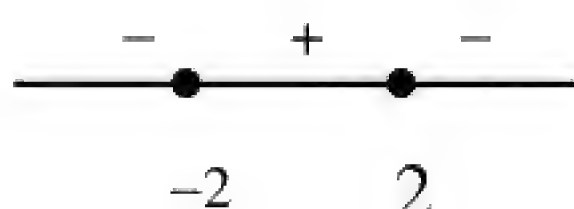
$$h(x) = \sin x \cdot \sqrt{1-x^2} \quad (٤)$$

الحل

(١) مجال الدالة f حيث: $f(x) = |x|$ هو \mathbb{R} ، ومجال الدالة g ، حيث: $g(x) = \sqrt{4-x^2}$ هو

مجموعة العناصر x المحققة للشرط: $4-x^2 \geq 0$

وإشارة هذا المقدار هي:



فالمجال هو: $[-2, 2]$

فمجال الدالة h هو: $\text{مجال } f \cap \text{مجال } g = [-2, 2]$

(٢) مجال الدالة f ، حيث: $f(x) = x^2 + x$ هو \mathbb{R} ، ويشترط لكي تكون h

معروفة أن يكون المقدار تحت إشارة الجذر في المقام محققا للشرط $1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1$ (استثنينا

التساوي لوقوع المقدار في المقام) فالمجال لدالة المقام g هو $(-\infty, 1)$. ويكون مجال h

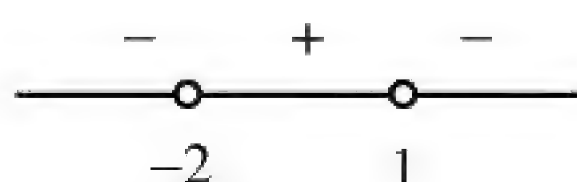
هو:

$$(-\infty, 1) = \mathbb{R} \cap (-\infty, 1)$$

(٣) مجال الدالة f حيث: $f(x) = |x-1|$ هو \mathbb{R} ويشترط في المقام أن يكون:

$$(-x+1)(x+2) > 0 \Leftrightarrow -x^2 - x + 2 > 0$$

(استثنينا أصفار المقام). وإشارة هذا المقدار:

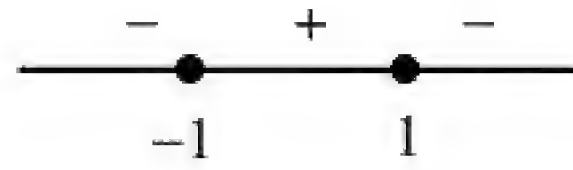


فالمجال لدالة المقام g هو: $(-2, 1)$ ومجال h هو:

$$IR \cap (-2, 1) = (-2, 1)$$

(٤) مجال الدالة f حيث: $f(x) = \sin x$ هو IR ومجال الدالة g ، حيث: $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ يتحدد

من الشرط $1-x^2 \geq 0$. وإشارة هذا المقدار:



فمجال g هو $[-1, 1]$ ومجال h هو:

$$IR \cap [-1, 1] = [-1, 1]$$

(٣, ٢) الدوال الزوجية والفردية والدورية

The Even, Odd and Periodic functions

تعريف (٣, ٥)

تقول إن الدالة f دالة زوجية على مجالها I إذا تحققت الخاصية التالية:

$$f(x) = f(-x) \text{ لكل } x \in I$$

هذا يعني أنه إذا كانت $x \in I$ ، فإن $-x \in I$.

فمثلاً: الدالة \cos دالة زوجية، لأن: $\cos(-x) = \cos x$

وأيضاً الدالة f حيث: $f(x) = x^4 + x^2 + 1$ دالة زوجية لأن: $f(-x) = f(x)$ لكل $x \in IR$.

تعريف (٣, ٦)

تقول إن الدالة f دالة فردية على مجالها I وذلك إذا تحققت الخاصية التالية:

$$f(-x) = -f(x) \text{ لكل } x \in I$$

هذا يعني أنه إذا كانت $x \in I$ ، فإن $-x \in I$.

فمثلاً: الدالة \sin و \tan دالتان فرديتان، لأن:

$$\sin(-x) = -\sin x, \tan(-x) = -\tan x$$

لاحظ أن الدالة f حيث: $f(x) = 1 - x + x^2$ ليست زوجية ولا فردية.

تعريف (٣, ٧)

تقول إن الدالة f دالة دورية على مجالها I إذا تحقق لكل $x \in I$ المساواة التالية:

$$f(x + a) = f(x) \quad (a \text{ عدد ثابت}).$$

وإذا كان a أصغر عدد موجب يحقق المساواة فإننا نسميه عادة بدور الدالة.

فمثلاً: الدالة $f = \sin$ دالة دورية لأن:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x) \quad \text{ودور هذه الدالة هو } 2\pi.$$

بالمثل الدالة: $f = \tan$ دالة دورية ودورها هو π لأن:

$$\tan(x + \pi) = \tan x$$

(٣, ٣) التناظر في المستوي (التمثيل)

تعريف (٣, ٨)

نسمي مجموعة كل الأزواج المرتبة (x, y) من الأعداد الحقيقية والمحقة لقاعدة الدالة f المعرفة بالمعادلة:

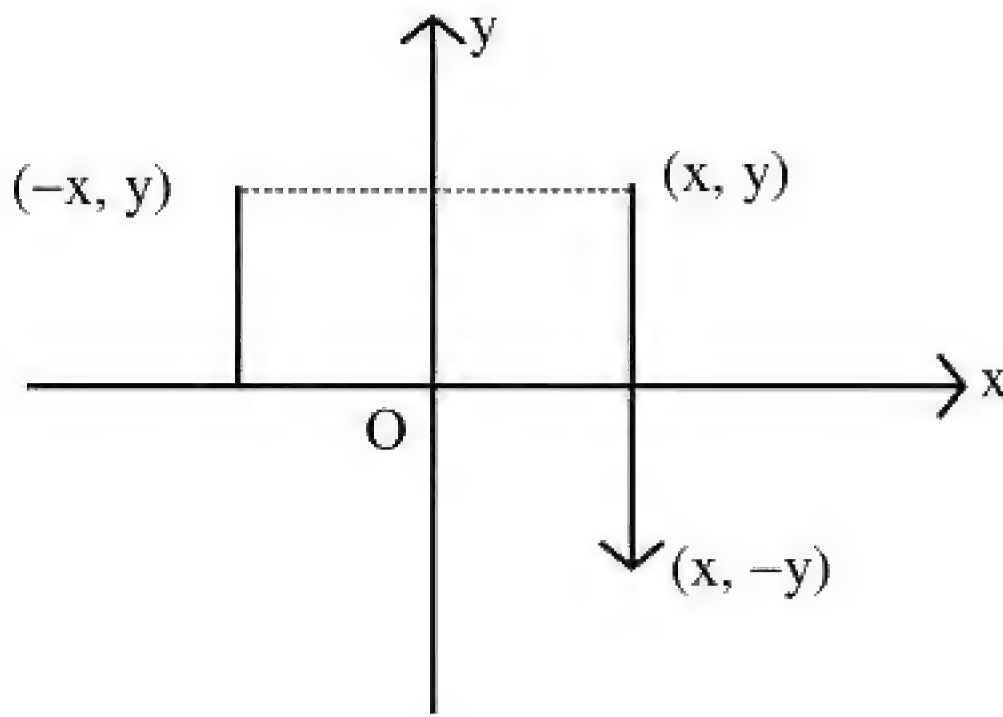
$$y = f(x), \quad \text{بمنحني الدالة } f$$

وإذا مثلنا النقاط (x, y) في المستوي فنسمي مجموعة النقاط الناتجة بالمنحني البياني للدالة f (بيان الدالة f).

فمثلاً: المنحني البياني للدالة f ، حيث: $y = 2x + 3$ هو مستقيم. وبيان العلاقة المعرفة بالمعادلة $x^2 + y^2 = 1$ هي دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها الواحد.

نعلم أن نظير النقطة (x, y) بالنسبة لمحور السينات هي النقطة $(x, -y)$.

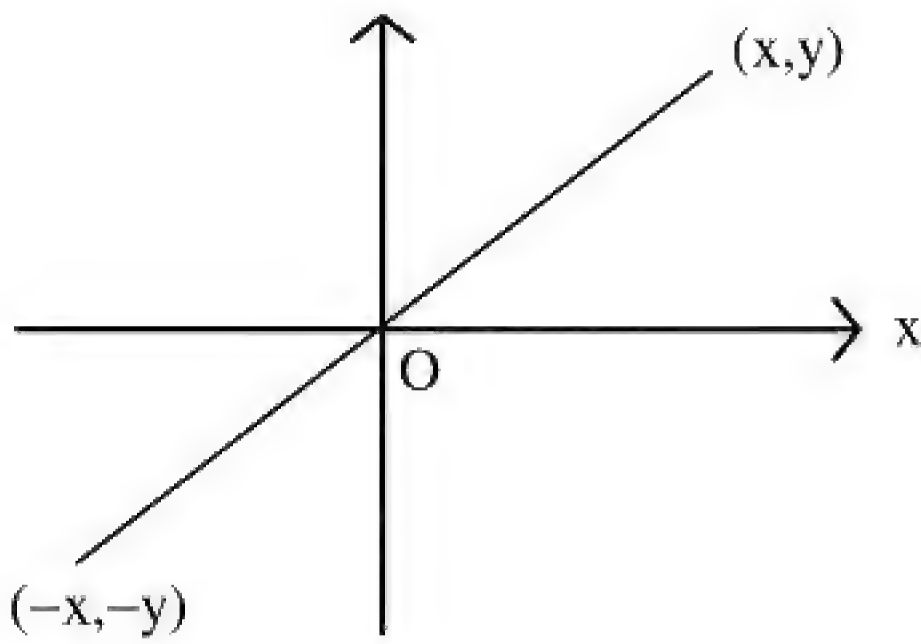
فالمنحني الذي معادلته $x^2 + y^2 = 1$ متناظر بالنسبة لمحور السينات، لأنه إذا كانت النقطة (x, y) تحقق معادلة المنحني، فإن النقطة $(x, -y)$ تحقق معادلة المنحني أيضًا.



شكل (٣, ٥).

وأيضا نظير النقطة (x, y) بالنسبة لمحور الصادات هي النقطة $(-x, y)$ فالمنحني الذي معادلته $y = \cos x$ متناظر بالنسبة لمحور الصادات لأنه إذا كانت النقطة (x, y) تحقق معادلة المنحني، فإن النقطة $(-x, y)$ تحقق معادلة المنحني أيضًا.

وهذا حال أي دالة زوجية فكل دالة زوجية بيانها متناظر (Symmetric) بالنسبة لمحور الصادات.



شكل (٣, ٦).

وكذلك نظير النقطة (x, y) بالنسبة لنقطة الأصل هي النقطة $(-x, -y)$ فمنحني الدالة التي معادلتها $y = \sin x$ متناظر بالنسبة لنقطة الأصل O. لأنه إذا كانت النقطة (x, y) تحقق معادلة المنحني، فإن النقطة $(-x, -y)$ تحقق معادلة المنحني لأن:

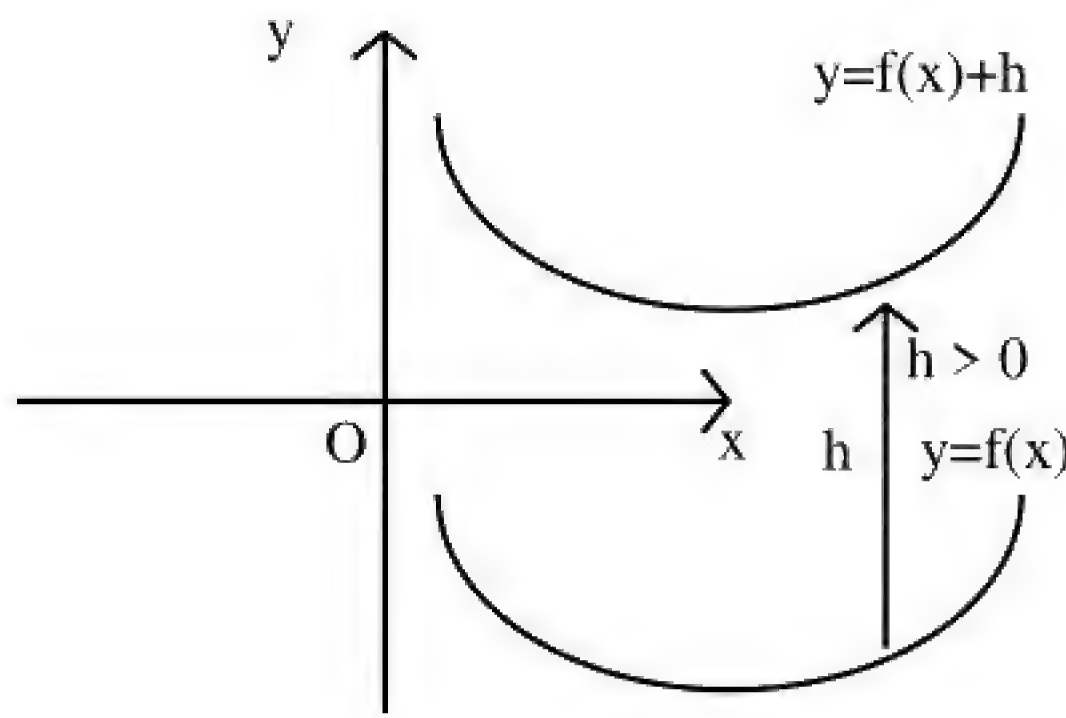
$$y = \sin x \Leftrightarrow -y = -\sin x \Leftrightarrow -y = \sin(-x)$$

وهذا حال أي دالة فردية. فكل دالة فردية بيانها متناظر بالنسبة لنقطة الأصل. من جهة أخرى: نظير النقطة (x, y) بالنسبة لمنصف الربع الأول هي النقطة (y, x) .

فمنحنى العلاقة المعروفة بالمعادلة: $x^3 + y^3 = 1$ متناظر بالنسبة لمنصف الربع الأول، لأنه إذا كانت النقطة (x, y) تحقق معادلة المنحني، فإن النقطة (y, x) تحقق معادلة المنحني لأن:

$$y^3 + x^3 = 1 \Leftrightarrow x^3 + y^3 = 1$$

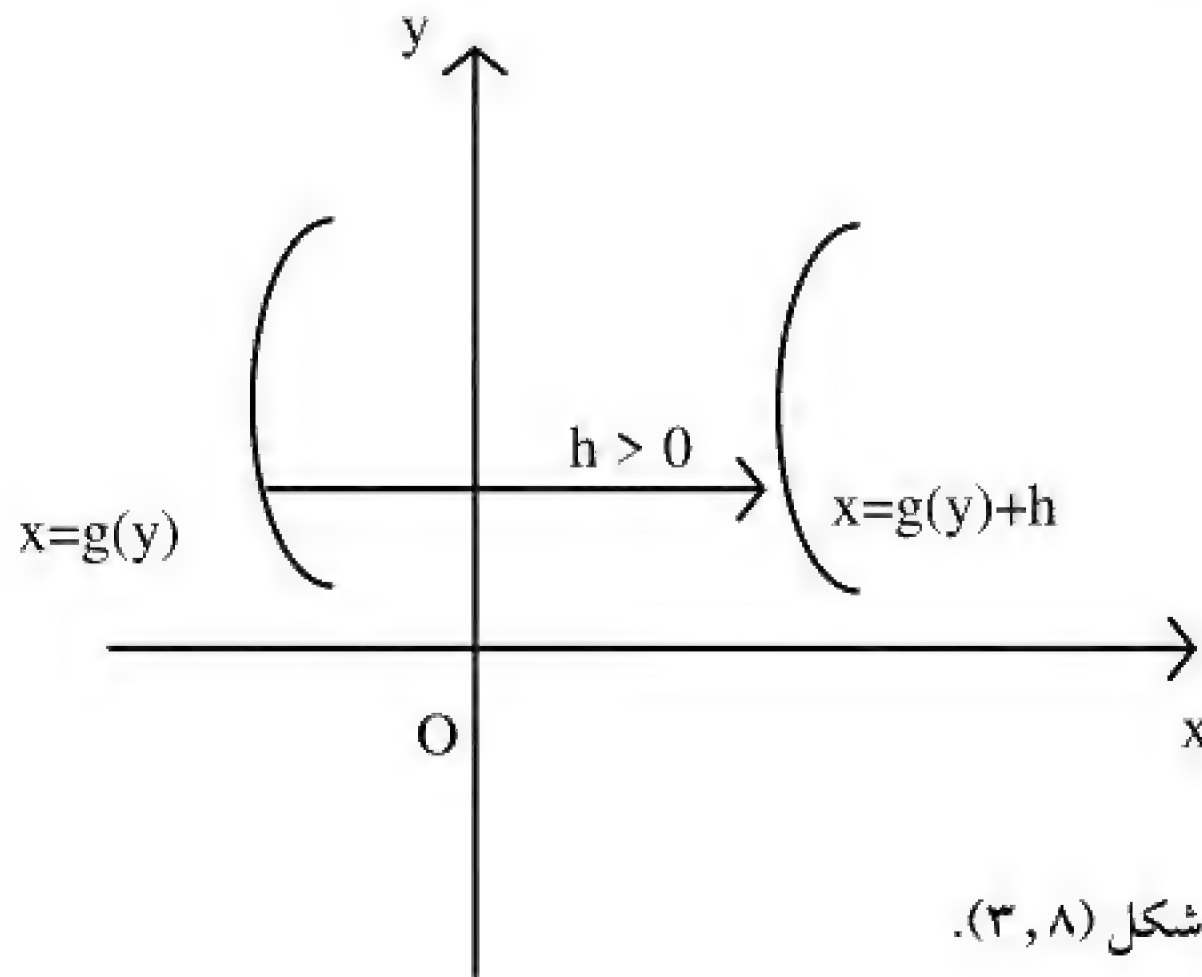
(٣, ٤) انسحاب منحني باتجاه أحد المحورين الإحداثيين



شكل (٣, ٧).

لاحظ أن المنحني الذي معادلته: $y = f(x) + h$ ينشأ من المنحني الذي معادلته: $y = f(x)$ بانسحاب باتجاه المحور y مقداره h وحدة، نحو الأعلى إذا كان $h > 0$ ونحو الأسفل إذا كان $h < 0$.

وأيضاً المنحني الذي معادلته: $x = g(y) + h$ ينشأ من المنحني الذي معادلته: $x = g(y)$ بانسحاب (Translation) باتجاه المحور x مقداره h وحدة، نحو اليمين إذا كان $h > 0$ ونحو اليسار إذا كان $h < 0$.



شكل (٣, ٨).

(٣, ٥) رسم بعض أنواع الدوال

مثال (٣, ٤)

ارسم المنحنيات المعروفة بمعادلاتها فيما يلي :

$$y = x^2 \quad (٣)$$

$$x = -y^2 \quad (٢)$$

$$x = y^2 \quad (١)$$

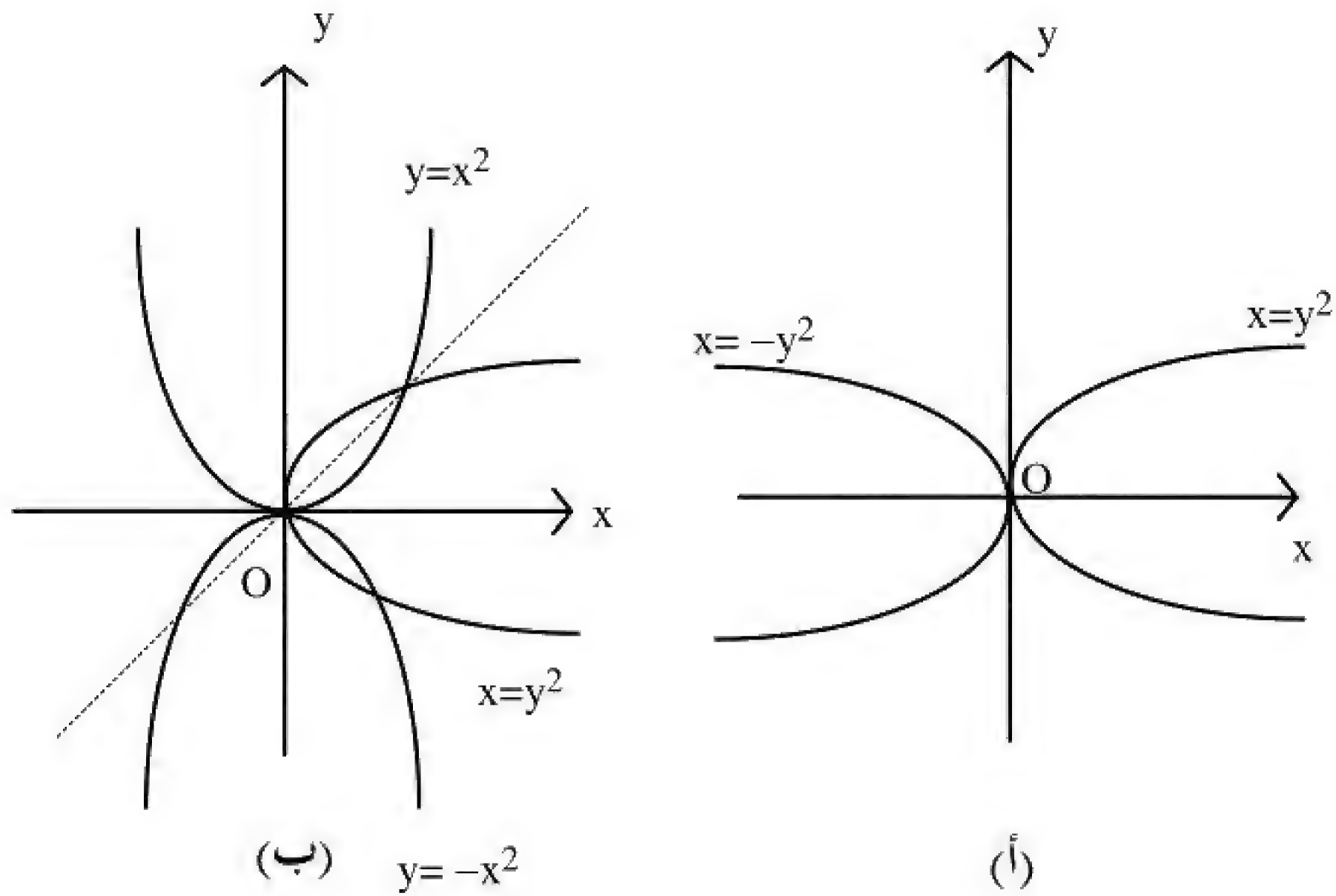
$$y = |x-1| \quad (٦)$$

$$y = |x| \quad (٥)$$

$$y = -x^2 \quad (٤)$$

الحل

(١) $x = y^2$ هو قطع مكافئ متناظر بالنسبة للمحور x رأسه نقطة الأصل وفتحته نحو الأيمن، شكل (٣, ٩) (أ).

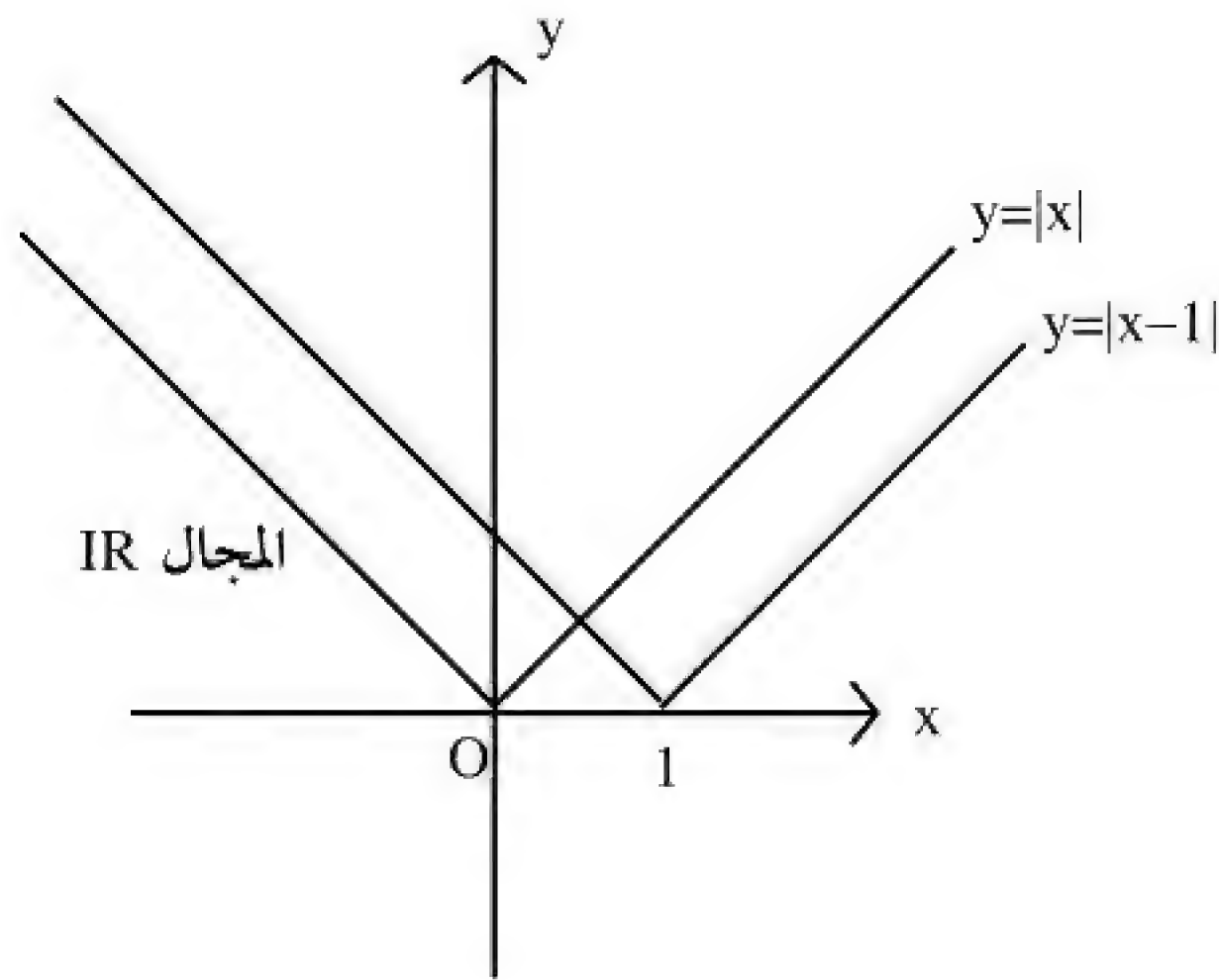


شكل (٣, ٩).

(٢) $x = -y^2$ هو قطع مكافئ ينشأ من المنحني الذي معادلته: $x = y^2$ بالتعويض عن x بالمقدار $-x$ فهو نظيره بالنسبة للمحور y ، شكل (٣, ٩) (أ).

(٣) $y = x^2$ هو قطع مكافئ متناظر بالنسبة للمحور y ينشأ من القطع $x = y^2$ بالمبادلة بين المتغيرين x, y فالمنحنيان متناظران بالنسبة لمنصف الربع الأول، شكل (٣, ٩) (ب).

(٤) أما المنحني الذي معادلته $y = -x^2$ فهو نظير المنحني الذي معادلته $y = x^2$ بالنسبة للمحور x ، شكل (٣, ٩) (ب).



شكل (٣, ١٠).

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \quad (٥)$$

هو عبارة عن نصفي مستقيمين متعامدين يتقاطعان عند O نقطة الأصل ومتناظران بالنسبة للمحور y ، شكل (٣, ١٠).

(٦) أما المنحني الذي معادلته $y = |x-1|$ فينشأ من المنحني الذي معادلته $y = |x|$ بانسحاب مقداره وحدة واحدة وباتجاه المحور x وإلى اليمين، شكل (٣, ١٠).

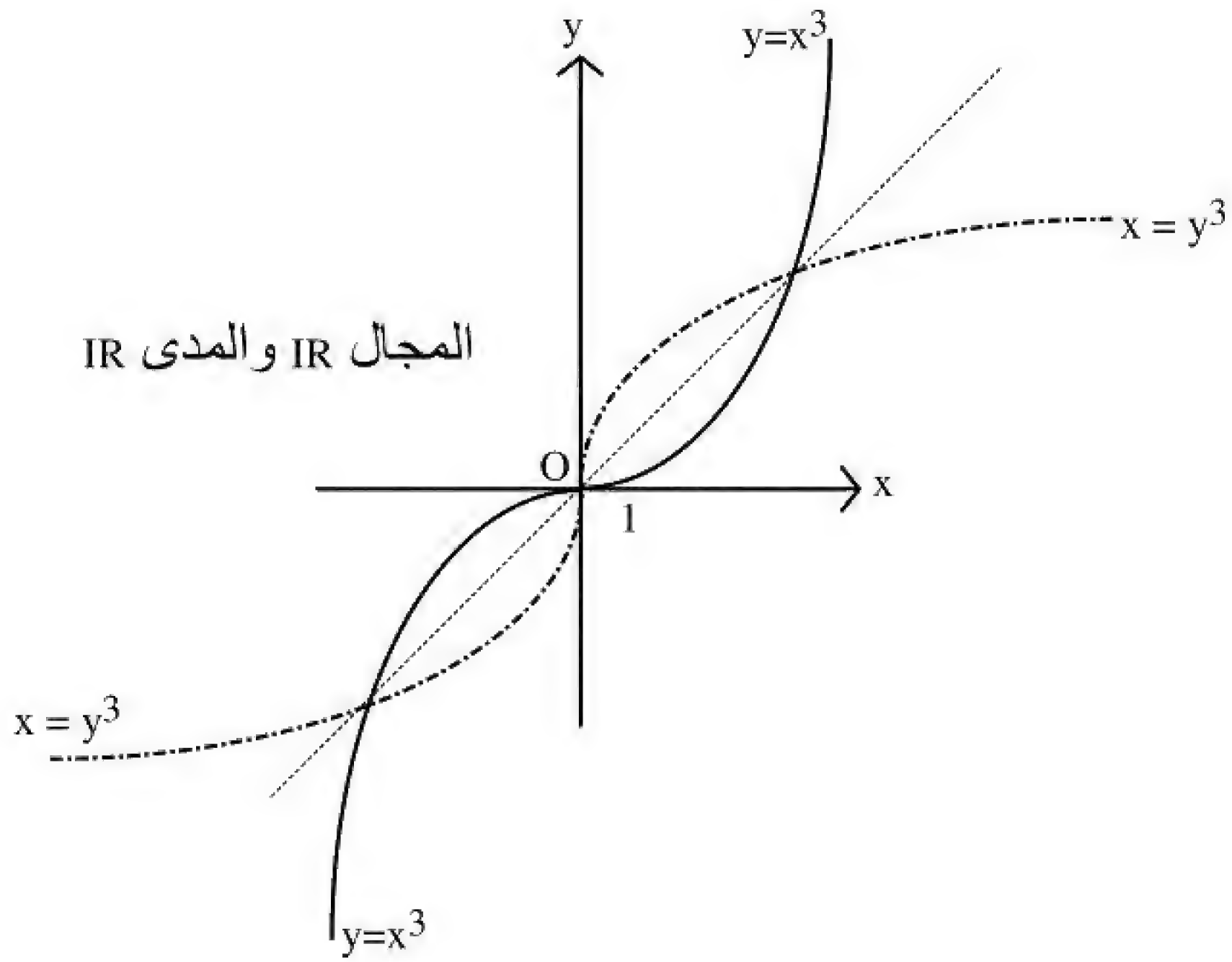
مثال (٣, ٥)

ارسم المنحنيات المعروفة بمعادلاتها:

$$\begin{array}{lll}
 (١) \quad y = x^3 & (٢) \quad x = y^3 & (٣) \quad y = \sqrt{x} \\
 (٤) \quad y = -\sqrt{x} & (٥) \quad y^2 = (x+1) & (٦) \quad (y-1)^2 = x
 \end{array}$$

الحل

(١) المنحني الذي معادلته $y = x^3$ متناظر بالنسبة لنقطة الأصل ويمس محور السينات عند نقطة الأصل، شكل (١١, ٣).

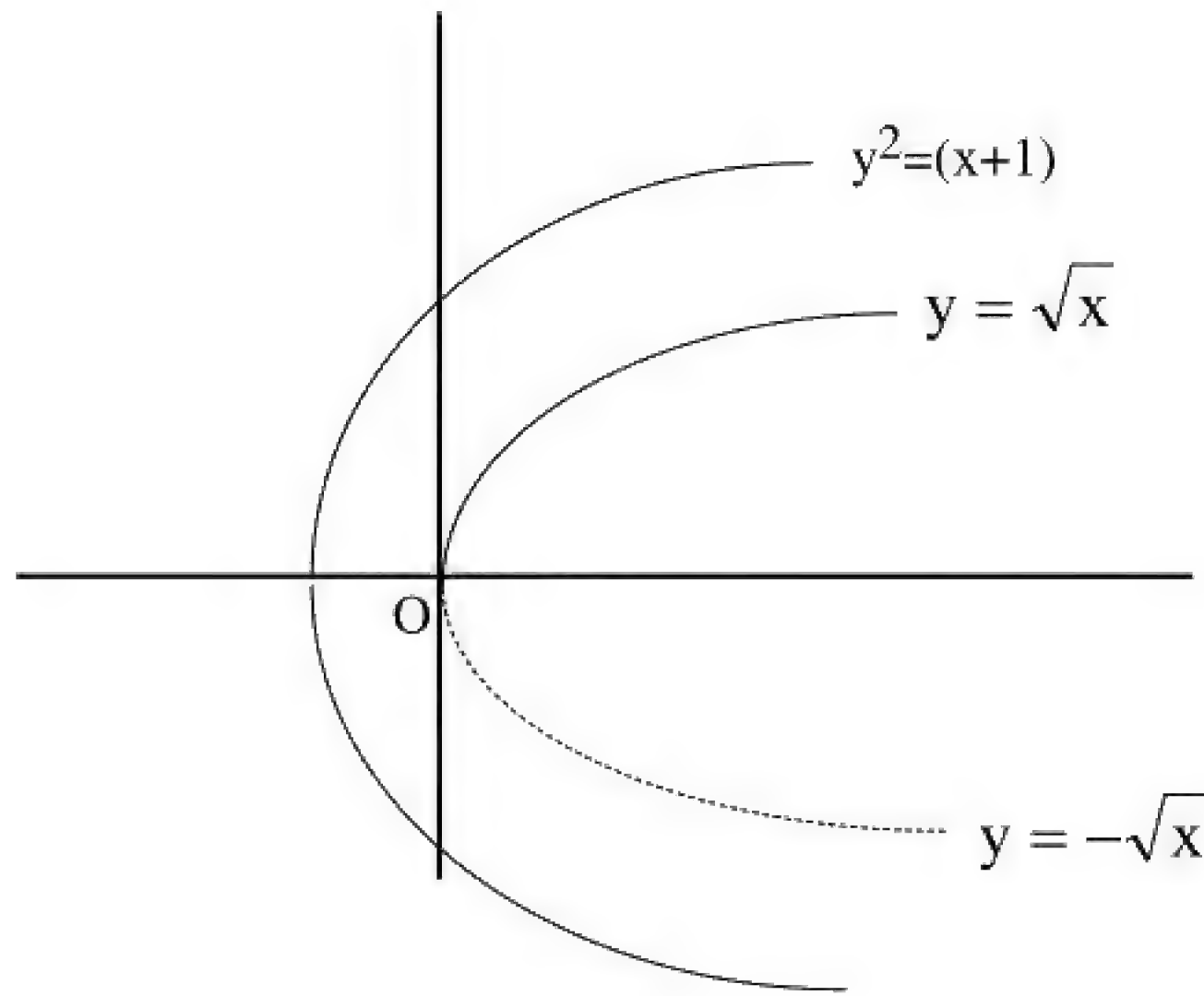


شكل (١١, ٣).

(٢) المنحني الذي معادلته $x = y^3$ هو نظير المنحني الذي معادلته $y = x^3$ بالنسبة لمنصف الربع الأول، شكل (١١, ٣).

(٣) المنحني الذي معادلته $y = \sqrt{x}$ هو النصف الأعلى للقطع المكافئ الذي معادلته $x = y^2$ ويوافق $y \geq 0$ ، شكل (٣, ١٢).

(٤) المنحني الذي معادلته $y = -\sqrt{x}$ هو النصف الأسفل للقطع المكافئ الذي معادلته $x = y^2$ ، ويوافق $y \leq 0$ ، شكل (٣, ١٢).



شكل (٣, ١٢).

(٥) المنحني الذي معادلته $y^2 = (x + 1)$ ينشأ من المنحني الذي معادلته $y^2 = x$ بانسحاب مقداره وحدة واحدة وباتجاه المحور x وإلى اليسار، شكل (٣, ١٢).

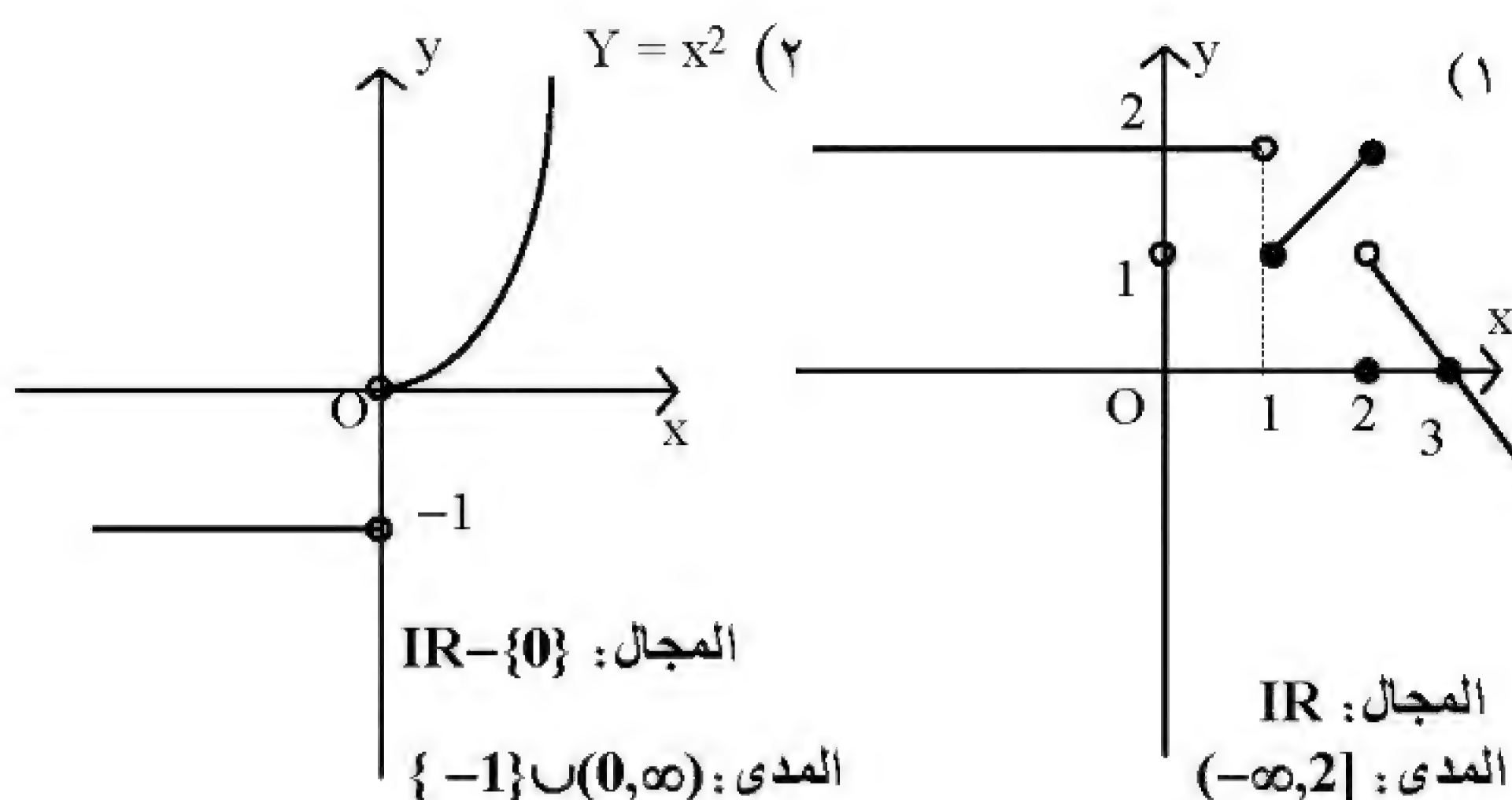
(٦) المنحني الذي معادلته $(y - 1)^2 = x$ ينشأ من المنحني الذي معادلته $y^2 = x$ بانسحاب مقداره وحدة واحدة وباتجاه المحور y وإلى الأعلى ويمكن رسمه بسهولة.

مثال (٣, ٦)

أوجد مجال ومدى كل من الدالتين المعرفتين كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases} \quad (٢) \quad f(x) = \begin{cases} 2, & x < 1 \\ x, & 2 \geq x \geq 1 \\ -x+3, & x > 2 \end{cases} \quad (١)$$

الحل



شكل (١٣, ٣).

الدوال العكسية (٣, ٦)

The Inverse Functions

مثال (٣, ٧)

أثبت أن الدالة f ، حيث: $f(x) = 2x + 4$ دالة متباينة ثم أوجد الدالة العكسية f^{-1} (باعتبار أن المجال المقابل للدالة f هو مداها). ارسم المنحني البياني للدالة f وللدالة العكسية لها، ماذا تلاحظ؟

الحل

$$f(x_1) = 2x_1 + 4, f(x_2) = 2x_2 + 4$$

$$2x_1 + 4 = 2x_2 + 4 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

فالدالة متباينة وباعتبار أن مجالها المقابل هو مداها فهي شاملة.

لإيجاد الدالة العكسية للدالة f ، حيث: $y = 2x + 4$

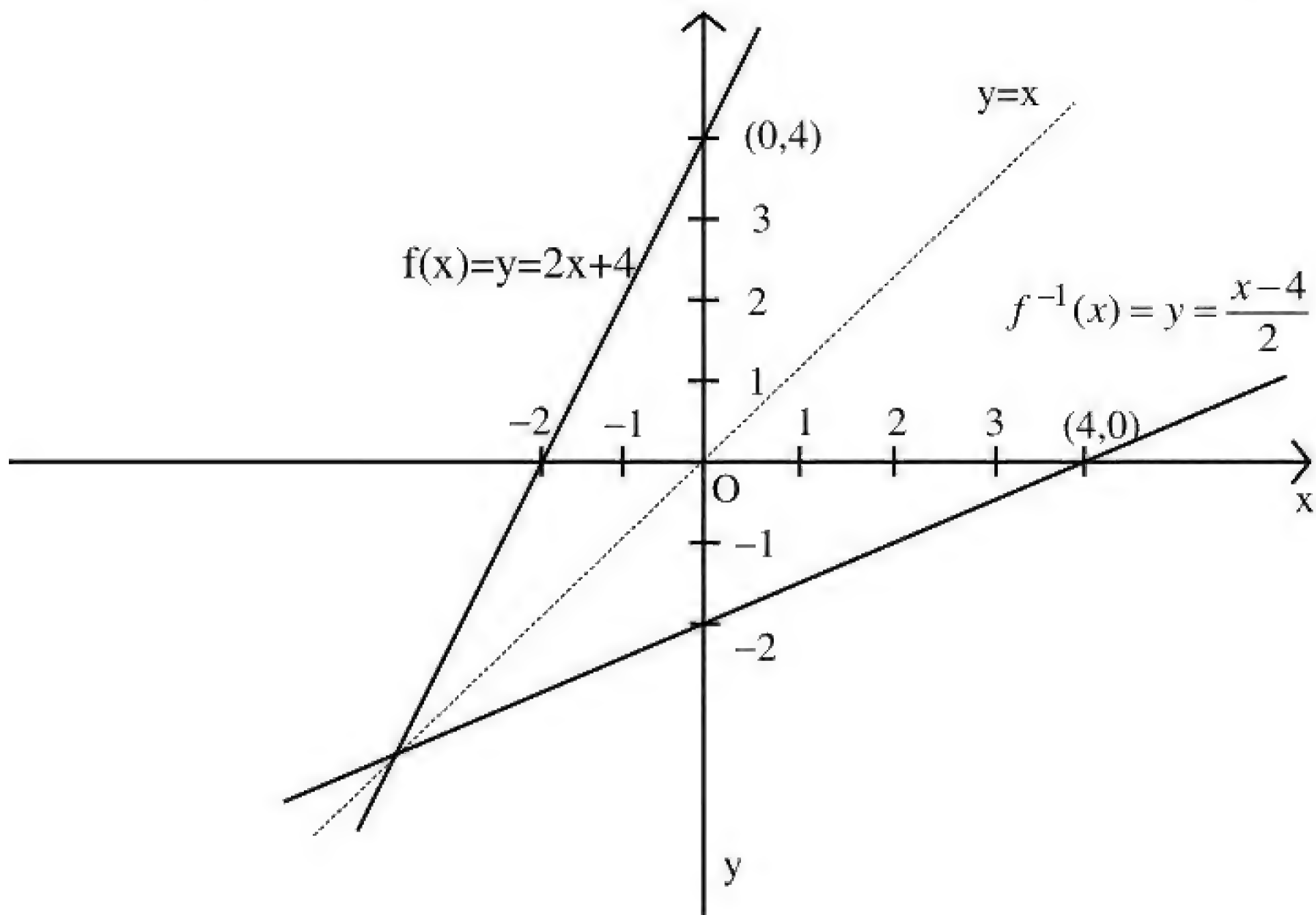
أ) نبادل بين موضعي المتغيرين x و y في المعادلة $y = 2x + 4$ ، فتصبح:

$$x = 2y + 4$$

ب) نحسب y بدلالة x ، فنجد: $2y = x - 4 \Rightarrow y = f^{-1}(x) = \frac{x-4}{2}$

من الملاحظ أن مجال f هو \mathbb{R} ومداها (مجال الدالة العكسية f^{-1}) هو \mathbb{R} أيضًا.

والمنحني البياني للدالة f هو مستقيم ويكفي لرسمه معرفة نقطتين منه ولتكن نقطتي التقاطع.



شكل (١٤، ٣).

والمنحني البياني للدالة f^{-1} هو مستقيم أيضًا. وبما أن أحدهما ينتج من الآخر بالمبادلة بين x ، y .

فإن المنحني البياني للدالة f^{-1} ينتج من المنحني البياني للدالة f وذلك بأخذ نظير المنحني الذي معادلته $y = f(x)$ بالنسبة لمنصف الربع الأول.

مثال (٨, ٣)

بين أن الدوال المعرفة بمعادلاتها التالية متباينة ثم أوجد الدالة العكسية لكل منها (المجال المقابل لكل منها هو المدى):

$$(١) \quad y = \frac{x}{1-x} \quad (٢) \quad (x \in \mathbb{R}^-) y = x^2$$

$$(٣) \quad y = 5 + \frac{2}{x^3} \quad (٤) \quad y = 4 + (x-1)^{\frac{1}{3}}$$

الحل

(١) التباين:

$$f(x_1) = \frac{x_1}{1-x_1}, f(x_2) = \frac{x_2}{1-x_2}$$

$$\frac{x_1}{1-x_1} = \frac{x_2}{1-x_2} \Rightarrow x_1 - x_1x_2 = x_2 - x_1x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

فالدالة متباينة.

الدالة العكسية:

(أ) لنبادل بين المتغيرين في قاعدة الدالة، فنحصل على المعادلة:

$$x = \frac{y}{1-y}$$

(ب) نحل المعادلة للحصول على y بدلالة المتغير x :

$$x = \frac{y}{1-y} \Rightarrow x - xy = y \Rightarrow x = xy + y \Rightarrow x = y(x+1)$$

ومنه: $y = f^{-1}(x) = \frac{x}{x+1}$ وهذه هي قاعدة الدالة العكسية.لاحظ أن مجال الدالة f هو $\mathbb{R} - \{-1\}$ وأن مداها (مجال f^{-1}) هو $\mathbb{R} - \{-1\}$

$$(٢) \quad \text{التباين: } f(x_1) = (x_1)^2, f(x_2) = (x_2)^2$$

$$\text{ومنه: } (x_1)^2 = (x_2)^2 \Rightarrow x_1 = \pm x_2$$

لكن $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^-$ فهما من إشارة واحدة، لذا تستبعد الإشارة السالبة.إذن: $x_1 = x_2$ فالدالة متباينة.

الدالة العكسية:

(أ) تبادل بين المتغيرين: $x = y^2$

(ب) نحسب y بدلالة x : $y = \pm\sqrt{x}$

فالمقبول $y = f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$ (لأن مجال الدالة f أصبح مجالاً مقابلًا للدالة f^{-1}).

لاحظ أن مدى f هو $(0, \infty)$ يصبح مجالاً للدالة f^{-1} ($y \neq 0$).

(٣) التباين:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 5 + \frac{2}{(x_1)^3} = 5 + \frac{2}{(x_2)^3} \Rightarrow \frac{2}{(x_1)^3} = \frac{2}{(x_2)^3}$$

$$\Rightarrow (x_1)^3 = (x_2)^3 \Rightarrow x_1 = x_2$$

الدالة العكسية:

(أ) تبادل بين المتغيرين، فنجد:

$$x = 5 + \frac{2}{y^3}$$

(ب) نحسب y بدلالة x :

$$x = 5 + \frac{2}{y^3} \Rightarrow x - 5 = \frac{2}{y^3} \Rightarrow y^3 = \frac{2}{x-5}$$

$$y = f^{-1}(x) = \left(\frac{2}{x-5}\right)^{\frac{1}{3}}$$

لاحظ أن مجال f هو $\mathbb{R} - \{0\}$ وأن مدى f (مجال f^{-1}) هو $\mathbb{R} - \{5\}$.

$$(٤) \text{ التباين: } 4 + (x_1 - 1)^{\frac{1}{3}} = 4 + (x_2 - 1)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow (x_1 - 1)^{\frac{1}{3}} = (x_2 - 1)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow$$

$$x_1 - 1 = x_2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ (بتكعيب الطرفين).}$$

الدالة العكسية:

(أ) تبادل بين المتغيرين فنجد:

$$x = 4 + (y - 1)^{\frac{1}{3}}$$

(ب) نحل المعادلة بإيجاد y بدلالة x :

$$x = 4 + (y-1)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow x-4 = (y-1)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow (x-4)^3 = y-1$$

$$\text{ومنه: } y = f^{-1}(x) = 1 + (x-4)^3$$

لاحظ أن مجال الدالة f هو \mathbb{R} وأن مداها هو \mathbb{R} أيضاً.

مثال (٩، ٣)

بين فيما إذا كانت الدالتان المعرفتان بالمعادلتين التاليتين تقبلان دالتين عكسيتين أم لا؟

$$(١) \quad y = 2x^2 - 8 \quad (٢) \quad f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \text{ حيث } f(x) = x^2$$

الحل

(١) الدالة غير متباينة لأن:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2(x_1)^2 - 8 = 2(x_2)^2 - 8$$

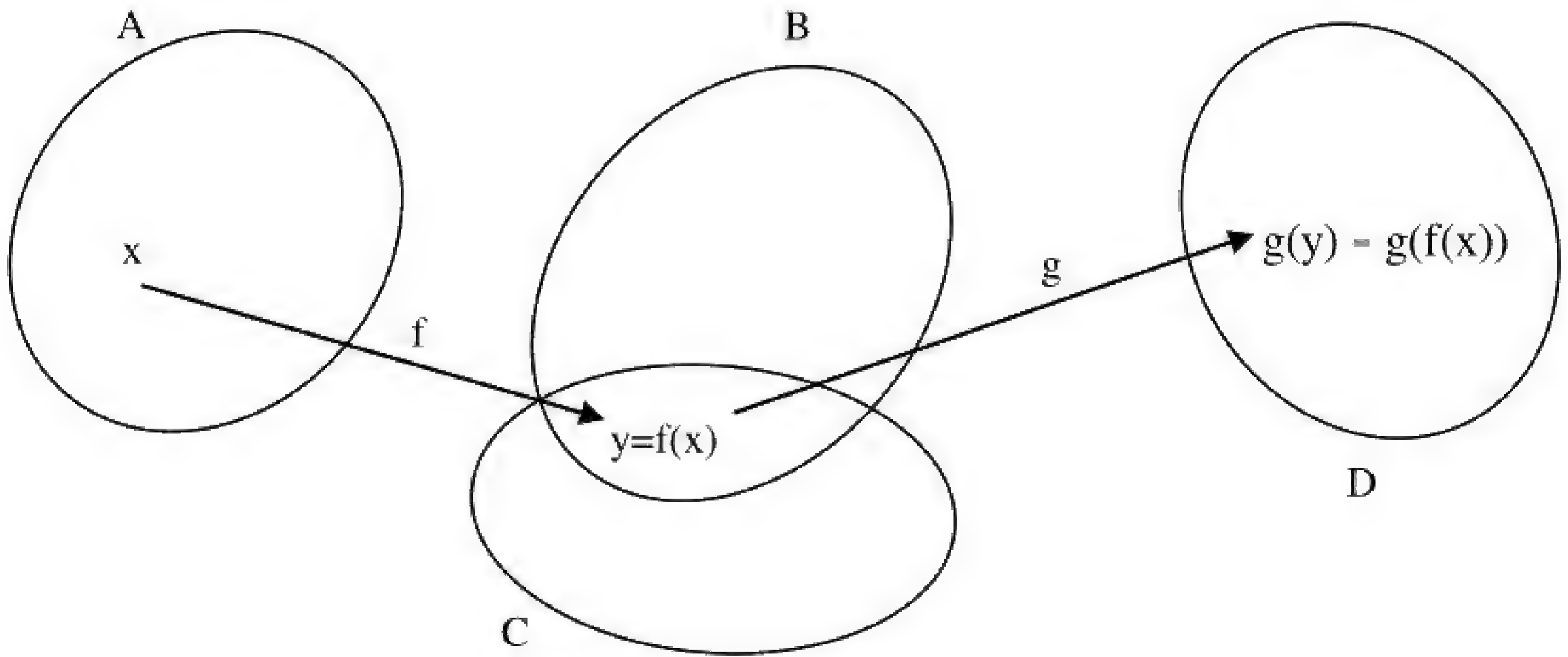
$$\Rightarrow (x_1)^2 = (x_2)^2 \Rightarrow x_1 = \pm x_2$$

إذن ليس لها دالة عكسية.

(٢) f ليست شاملة لأن مدى الدالة f هو $(0, \infty)$ ، وهو مجموعة جزئية فعلية من \mathbb{R} . فأي عدد سالب ليس صورة لأي عنصر من مجال الدالة. إذن ليس للدالة f دالة عكسية.

(٧، ٣) دالة التركيب

The Composite Function



شكل (١٥، ٣).

لتكن: $f: A \rightarrow B$

$g: C \rightarrow D$

نعرف دالة التركيب: $h = g \circ f$ بالشكل:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

مجال دالة التركيب هو مجموعة العناصر x حيث:

$$f(x) \in (\text{مجال } g) \text{ و } x \in (\text{مجال } f)$$

من التعريف نجد:

$$(1) \quad \boxed{\text{مجال } h \text{ هو نفس مجال } f, \text{ إذا كان مجال } g \text{ يساوي } \mathbb{R}}$$

مثال (١٠, ٣)

أوجد مجال h حيث: $h = g \circ f$ ، إذا كان:

$$(1) \quad g(x) = x^5 + x^3 + 1, \quad f(x) = x^2 + 5x + 7$$

$$(2) \quad g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, \quad f(x) = \sqrt{x - 1}$$

$$(3) \quad g(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}, \quad f(x) = \frac{1}{x - 1}$$

$$(4) \quad g(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}, \quad f(x) = |x| \sqrt{1 - x^2}$$

الحل

لاحظ أن مجال g ، هو \mathbb{R} في جميع الحالات: إذن مجال h هو مجال f ويساوي:

$$(1) \quad \mathbb{R} \text{ لأن مجال كثيرة الحدود هو } \mathbb{R}$$

$$(2) \quad [1, \infty) \text{ وهو حل المتباينة: } x - 1 \geq 0$$

$$(3) \quad \mathbb{R} - \{1\} \text{ (لاحظ أن مميز المقدار } x^2 + x + 1 \text{ هو } -3 \text{ فأشارته موجبة دوماً).}$$

$$(4) \quad [-1, 1] \text{ وهو مجموعة حل المتباينة } 1 - x^2 \geq 0 \text{ (الإشارة مابين الجذرين عكس إشارة معامل } x^2 \text{).}$$

(٢) إذا كان مجال g ، هو: $\mathbb{R} - \{a, b\}$ ، فإن مجال $h = g \circ f$ ، هو مجال f مستثنى منه حلول

$$\text{المعادلتين: } f(x) = a, \quad f(x) = b$$

مثال (١١, ٣)

أوجد مجال h حيث: $h = g \circ f$ ، إذا كان:

$$g(x) = \frac{x}{x-2} \quad , \quad f(x) = \frac{1}{x-1} \quad (١)$$

$$g(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}} \quad (٢)$$

$$g(x) = \frac{1}{x(x-6)} \quad , \quad f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 36} \quad (٣)$$

الحل

(١) مجال g، هو: $IR - \{2\}$ ومجال f، هو: $IR - \{1\}$ لنحل المعادلة: $f(x) = 2$ ، فنجد: $2 = \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow x-1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ إذا كان مجال h، هو: $IR - \left\{1, \frac{3}{2}\right\}$ (٢) مجال g، هو: $IR - \{0\}$ ومجال f، هو مجموعة حل المتباينة:

$$\frac{1-x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow x(1-x) \geq 0 \text{ حيث } x \neq 0 \text{ ويساوي } (0,1]$$

لنحل المعادلة: $f(x) = 0$ ، فنجد: $x = 1$ إذن مجال h، هو: $(0,1)$.(٣) مجال g، هو: $IR - \{0,6\}$. لنحل المعادلتين: $f(x) = 0$ ، $f(x) = 6$ فنجد: $x = 0, x = 5$ ومجالh، هو: $IR - \{0,5\}$ (لاحظ أن مجال f هو IR).(٣) إذا كان مجال g، هو: $IR - (a,b)$. فإن مجال $h = g \circ f$ ، هو مجال f مستثنى منه حلولالمتباينة: $a < f(x) < b$.

مثال (١٢، ٣)

أوجد مجال h حيث: $h(x) = (g \circ f)(x)$ ، إذا كان:

$$g(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6} \quad , \quad f(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$$

مجال f، هو: $[0,1)$. ومجال g، هو: $IR - (2,3)$

$$\text{لنحل المتباينة: } 2 > \sqrt{\frac{x}{1-x}} > 3 \Leftrightarrow 4 < \frac{x}{1-x} < 9$$

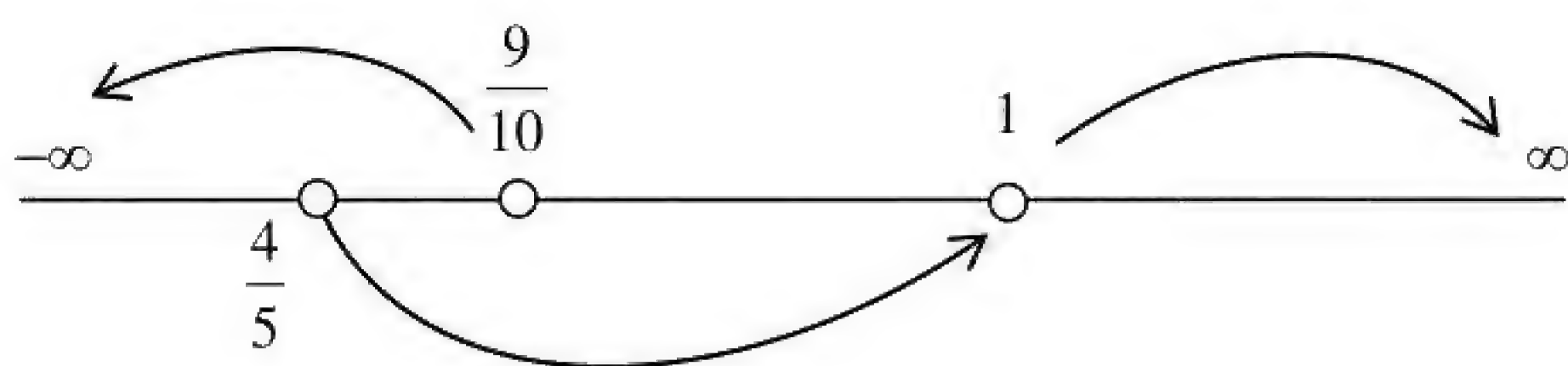
$$4(1-x)^2 < x(1-x) < 9(1-x)^2$$

(ضربنا الطرفين بالمقدار $(1-x)^2$ مع ملاحظة أن $x=1$ ليس حلاً لها).

المتباينة اليمنى ترد إلى الصورة: $(1-x)(10x-9) < 0$ وحلها: $IR - [\frac{9}{10}, 1]$

المتباينة اليسرى ترد إلى الصورة: $(4-5x)(1-x) < 0$ وحلها: $(\frac{4}{5}, 1)$

وتقاطع الحلين، هو: $(\frac{4}{5}, \frac{9}{10})$ ، إذن مجال h : $[0, 1) - (\frac{4}{5}, \frac{9}{10}) = [0, \frac{4}{5}] \cup [\frac{9}{10}, 1)$



تمارين (١, ٣)

أوجد مجال كل من الدوال المعرفة بمعادلاتها التالية:

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \quad (٢) \quad f(x) = x^3 - x^2 + 7 \quad (١)$$

$$f(x) = \frac{x}{(x-1)(x^2+4)} \quad (٤) \quad f(x) = \frac{x^2+4}{x^2-4} \quad (٣)$$

$$f(x) = \cos 2x \quad (٦) \quad f(x) = \sqrt{\sin x + 1} \quad (٥)$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 8} \quad (٨) \quad f(x) = \sqrt{x^2 + 4} \quad (٧)$$

$$f(x) = \sqrt{2x^2 - 10x + 12} \quad (١٠) \quad f(x) = \sqrt{1 + 4x + 4x^2} \quad (٩)$$

$$f(x) = (x+1)\sin\frac{1}{x} \quad (١٢) \quad f(x) = x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (١١)$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{1+|x|} \quad (١٤) \quad f(x) = \frac{\sqrt{x+4}}{1-\sqrt{1+x}} \quad (١٣)$$

$$f(x) = \sec 3x \quad (١٦) \quad f(x) = \csc x \quad (١٥)$$

$$f(x) = \tan\frac{1}{3}x \quad (١٨) \quad f(x) = \cot x + \frac{1}{\sin x} \quad (١٧)$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ x^2 & x < 0 \end{cases} \quad (٢٠) \quad f(x) = \sqrt{\frac{|x|}{1-|x|}} \quad (١٩)$$

(٢١) حدد الدوال الزوجية والفردية المعرفة في التمارين ٢, ٣, ٥, ٦, ٧, ٩, ١٢, ١٤,

(٢٢) حدد دور كل من الدوال المعرفة في التمارين ٥, ٦, ١٥, ١٦, ١٧, ١٨,

(٢٣) أوجد دالة مثلثية دورها $\frac{\pi}{6}$ ودالة أخرى دورها 6π . اختبر تباین (أحادية) الدوال المعرفة

بمعادلاتها التالية وأوجد الدالة العكسية إن وجدت.

$$f_2(x) = x^3 + 4 \quad (٢٥) \quad f_1(x) = 2x + 4 \quad (٢٤)$$

$$f_4(x) = x^2 + 5x + 4 \quad (٢٧) \quad f_3(x) = |x-1| \quad (٢٦)$$

$$f_6(x) = 2\sqrt{x-1} \quad (٢٩) \quad (x < 0) f_5(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad (٢٨)$$

$$f_8(x) = 2x^2 - 4x, x \geq 1 \quad (٣١) \quad f_7(x) = 2x + 7 \quad (٣٠)$$

$$f_{10}(x) = \frac{x}{x+1} \quad (٣٣) \quad f_9(x) = x^4, x > 0 \quad (٣٢)$$

$$f_{12}(x) = x^5 - 6 \quad (٣٥) \quad f_{11}(x) = \frac{2x-3}{7x-5} \quad (٣٤)$$

(٣٦) أوجد مدى كل من الدوال المعرفة في التمارين من (٢٤) إلى (٣٥).

ارسم بيان كل من الدوال المعرفة بقواعدها التالية وأوجد مجال كل منها ومداه.

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x > 0 \\ 4, & x < 0 \end{cases} \quad (٣٨)$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ 2x, & 0 > x \geq -1 \end{cases} \quad (٣٧)$$

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ -1, & 1 > x \geq 0 \\ -x-1, & x < 0 \end{cases} \quad (٤٠)$$

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ -1, & 0 \leq x < 1 \\ x^2-1, & x < 0 \end{cases} \quad (٣٩)$$

$$f(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \\ -\sqrt{4-x^2}, & 0 \geq x \geq -2 \end{cases} \quad (٤١)$$

(٤٢) في التمارين من (٢٤) حتى (٣٥) أوجد:

$$(f_2 \circ f_1)(x) \quad (\text{أ}) \quad (f_3 \circ f_4)(x) \quad (\text{ب})$$

$$(f_{10} \circ f_{11})(x) \quad (\text{د}) \quad (f_5 \circ f_6)(x) \quad (\text{ج})$$

$$\left(\frac{f_3}{f_7} \right)(1) \quad (\text{و}) \quad (f_{10} \circ f_9)(x) \quad (\text{هـ})$$

ثم أوجد مجال دوال التركيب (التحصيل) السابقة.

(٤٣) أوجد أيضًا:

$$(f_{10} \circ f_9)(1) \quad (\text{ب}) \quad (f_6 \circ f_7)(8) \quad (\text{أ})$$

$$(f_5 \circ f_5)(1) \quad (\text{د}) \quad (f_3 \circ f_6)(2) \quad (\text{ج})$$

(٤٤) بين أن الدوال المعرفة بمعادلاتها التالية دوال محدودة:

$$f(x) = 2 + 4\cos 2x \quad (\text{ب}) \quad f(x) = 1 - 3\sin x \quad (\text{أ})$$

$$f(x) = \frac{x^2}{1+4x^2} \quad (\text{د}) \quad f(x) = \frac{x}{1+x^2}, x > 0 \quad (\text{ج})$$

اعتمادًا على المنحنيات الممثلة بمعادلاتها التالية:

$$y = x^3 \quad (\text{ج}) \quad y = x^2 \quad (\text{ب}) \quad y = x \quad (\text{أ})$$

$$y = \sqrt{x} \quad (\text{هـ}) \quad y = |x| \quad (\text{د})$$

وباستخدام تناظرات أو انسحابات مناسبة، ارسم المنحنيات الممثلة بمعادلاتها التالية:

$$y = x-3 \quad (\text{ج}) \quad y = |x| \quad (\text{ب}) \quad y = -x \quad (\text{أ}) \quad (٤٥)$$

$$(٤٦) \quad (أ) \quad y = -x^2 \quad (ب) \quad x = y^2 \quad (ج) \quad x = -y^2$$

$$(٤٧) \quad (أ) \quad y = -x^3 \quad (ب) \quad x = y^3 \quad (ج) \quad x = -y^3$$

$$(٤٨) \quad (أ) \quad y = |x-1| \quad (ب) \quad y = |x|+1 \quad (ج) \quad y = -|x|$$

$$(٤٩) \quad (أ) \quad y = -\sqrt{x} \quad (ب) \quad y = \sqrt{x-1} \quad (ج) \quad y = \sqrt{x}-2$$

٥٠) أوجد باستخدام التمارين من (٢٤) إلى (٣٥):

$$(أ) \quad \left(\frac{f_2}{f_1}\right)(x) \quad (ب) \quad (f_1 f_6)(x) \quad (ج) \quad (f_5 + f_8)(1)$$

$$(د) \quad \left(\frac{f_{10}}{f_{11}}\right)(x) \quad (هـ) \quad (f_2 + f_7)(8) \quad (و) \quad (f_6 + f_{10})(x)$$

ثم أوجد مجال الدوال المعرفة في الفقرات (أ)، (ب)، (د)، (و).

٥١) أثبت أن الدوال التالية دوال تقابل ثم أوجد معكوس كل منها:

$$(أ) \quad f: (-\infty, 0] \rightarrow [1, \infty) \quad \text{حيث} \quad f(x) = x^2 + 1$$

$$(ب) \quad f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\} \quad \text{حيث} \quad f(x) = \frac{x}{x-1}$$

$$(ج) \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{حيث} \quad f(x) = (x-1)^{\frac{1}{3}} + 1$$

$$(د) \quad f: \mathbb{R}^+ \rightarrow (0, 1) \quad \text{حيث} \quad f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

٥٢) أي الدوال المعرفة كما يلي تقبل دالة عكسية باعتبار مجال كل منها \mathbb{R} ومجالها المقابل هو مداها:

$$(أ) \quad f(x) = \sqrt{x^2 + 5} \quad (ب) \quad f(x) = |x-5|$$

$$(ج) \quad f(x) = x^3 + 1 \quad (د) \quad f(x) = \frac{1}{x^2 + 9}$$

النهايات LIMITS

(١, ٤) نهاية دالة

The Limit of a function

لتكن f دالة معرفة بقاعدتها: $f(x) = x + 1$ حيث $x \neq 1$.

لنعط للمتغير x قيماً قريبة من 1، فنجد من الجدول التالي:

x	0.999	0.9999	1.0001	1.001	1.01
$f(x)=x+1$	1.999	1.9999	2.0001	2.001	2.01

أن $f(x)$ تأخذ قيماً قريبة من العدد 2.

من الملاحظ أيضاً أنه باستطاعتنا أن نجعل الفرق: $|f(x) - 2|$ أصغر من أي عدد موجب نختاره وذلك باختيار قيم مناسبة للمتغير x . فمثلاً إذا أردنا أن يكون الفرق أقل من 0.001 أي:

$$|x - 1| < 0.001 \Leftrightarrow |x + 1 - 2| < 0.001 \Leftrightarrow |f(x) - 2| < 0.001$$

لوجب أن تكون قيم x محققة للمتباعدة:

$$0.999 < x < 1.001 \Leftrightarrow -0.001 < x - 1 < 0.001$$

أي: $x \in (0.999, 1.001)$

ولو أردنا أن يكون الفرق أقل من عدد موجب ε اختياري (صغير بالقدر الذي نريد)، لوجب أن يكون:

$$\Leftrightarrow |x + 1 - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon$$

$$1 - \varepsilon < x < 1 + \varepsilon \Leftrightarrow |x - 1| < \varepsilon$$

أي: $x \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ وهذه فترة مركزها (منتصفها) 1 ونصف قطرها $\delta = \varepsilon$ ، وإذا أضفنا

الشرط $x \neq 1$ لوجدنا لكل عدد $\varepsilon > 0$ ، عدداً $\delta = \varepsilon > 0$ بحيث يكون:

$$x \neq 1, |x-1| < \delta \Rightarrow |f(x)-2| < \varepsilon$$

أو:

$$0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |f(x)-2| < \varepsilon$$

نقول عندها إن الدالة f تنتهي نحو 2 عندما x تنتهي نحو 1 ونكتب:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2 \quad \text{أو} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

مثال (١, ٤)

أوجد قيمة للعدد $\delta > 0$ بحيث يتحقق:

$$x \neq 3, |x-3| < \delta \Rightarrow |(3x-1)-8| < \varepsilon$$

الحل

من الممكن أن نكتب:

$$|3x-1-8| = |3x-9| = |3(x-3)| = 3|x-3| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-3| < \frac{\varepsilon}{3}$$

إذن، باختيار، $\frac{\varepsilon}{3} = \delta$ نجد:

$$|x-3| < \delta \Leftrightarrow |(3x-1)-8| < \varepsilon$$

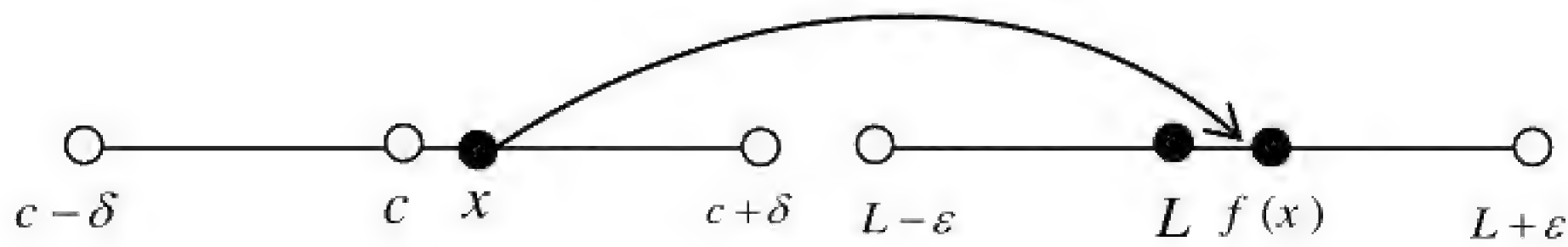
وبشكل خاص:

$$x \neq 3, |x-3| < \delta \Rightarrow |(3x-1)-8| < \varepsilon$$

تعريف (١, ٤)

لتكن f دالة معرفة على فترة (a,b) تحوي c وقد لا تكون معرفة عند c نفسها. نقول إن الدالة f تنتهي نحو العدد L عندما ينتهي متغيرها x نحو العدد c ، ونرمز لذلك بالرمز: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ إذا وجدنا من أجل كل عدد $\varepsilon > 0$ ، عددًا $\delta > 0$ بحيث يكون:

$$0 < |x-c| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$$

(في الواقع $0 < |x-c|$ تعني أن $x \neq c$).

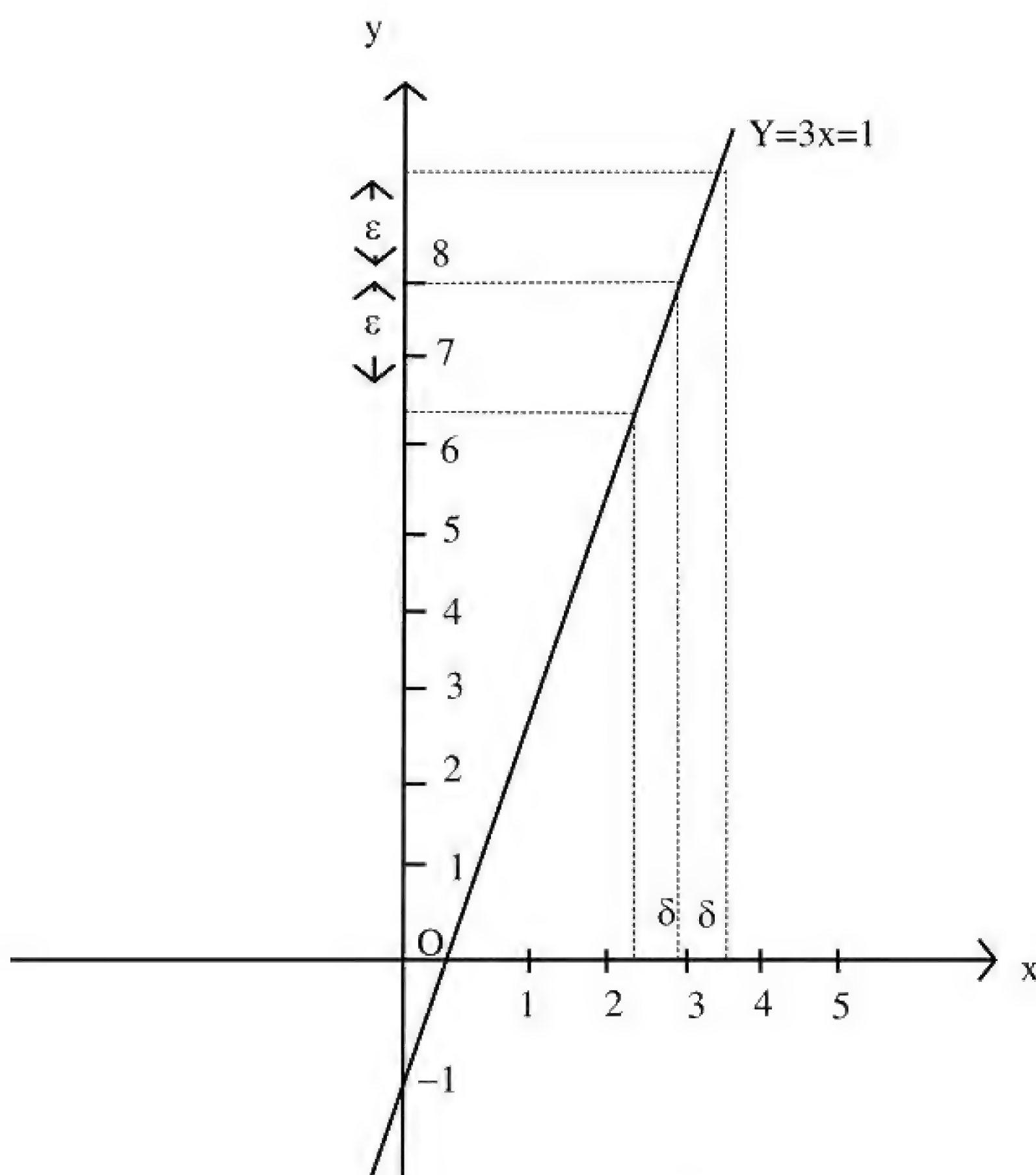
يمكن البرهان على أن نهاية الدالة f عندما $x \rightarrow c$ إن كانت موجودة فهي وحيدة.

مثال (٢, ٤)

أثبت باستخدام التعريف أن: $\lim_{x \rightarrow 3} (3x-1) = 8$

الحل

حسب التعريف، يجب أن نجد من أجل كل عدد $\varepsilon > 0$ ، عددًا $\delta > 0$ ، بحيث يكون:
 $0 < |x-3| < \delta \Rightarrow |(3x-1)-8| < \varepsilon$. وبذلك رد المثال إلى المثال الذي سبقه.



شكل (١, ٤).

لاحظ أن مجموعة قيم الدالة من أجل قيم x التي تنتمي للفترة التي مركزها 3 وطول نصف قطرها δ (وهي لا تحوي مركزها) تقع داخل الفترة التي مركزها 8 وطول نصف قطرها ε .

نظرية (١, ٤)

(١) نهاية الدالة الثابتة c عندما $x \rightarrow a$ هي c أيضًا.

(٢) $\lim_{x \rightarrow c} (ax + b) = ac + b$ (a, b ثابتان).

البرهان

(١) لنبرهن أن $\lim_{x \rightarrow a} c = c$

حسب التعريف يجب أن نجد لكل $\varepsilon > 0$ ، عددًا $\delta > 0$ بحيث يتحقق:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |c - c| < \varepsilon$$

من الملاحظ أن $0 < \varepsilon \Leftrightarrow |c - c| < \varepsilon$

وهذه المتباينة صحيحة مهما كان δ . إذن أي اختيار للعدد δ يحقق المطلوب.

(٢) إذا فرضنا أن $a = 0$ ، نحد:

$\lim_{x \rightarrow c} b = b$ وبذلك يتحقق المطلوب

إذا كانت $a \neq 0$ ، من التعريف يجب أن نجد لكل عدد $\varepsilon > 0$ ، عددًا $\delta > 0$ بحيث يكون:

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |ax + b - (ac + b)| < \varepsilon$$

$$|ax + b - ac - b| = |ax - ac| = |a||x - c| \quad \text{لكن:}$$

وبجعل هذا المقدار أقل من ε ، فإن:

$$|a||x - c| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - c| < \frac{\varepsilon}{|a|}$$

باختيار $\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$ ، نجد:

$$|x - c| < \delta \Leftrightarrow |ax + b - (ac + b)| < \varepsilon$$

وبشكل خاص:

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |ax + b - (ac + b)| < \varepsilon$$

نتيجة (١, ٤)

كحالة خاصة نجد أن: $\lim_{x \rightarrow c} x = c$

وأن: $\lim_{x \rightarrow c} ax = ac$

نظرية (٢, ٤)

بفرض أن الدالتين f, g معرفتان على فترة مفتوحة تحوي c

(وربما لا تكونان معرفتين عند c نفسها). إذا كانت النهايتان $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L_1$ ، $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L_2$ موجودتين، فإن:

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = L_1 + L_2 \quad (١)$$

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) g(x)) = L_1 L_2 \quad (٢)$$

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}, L_2 \neq 0 \quad (٣)$$

$$\lim_{x \rightarrow c} (af(x)) = aL_1 \quad (٤) \quad (a \text{ عدد ثابت}).$$

البرهان

سنبرهن فقط على صحة الفقرة الأولى والأخيرة من هذه النظرية:

(١) لنثبت أولاً أن:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) + g(x) = L_1 + L_2$$

حسب الفرض: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L_1$ ، $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L_2$

هذا يعني أنه لكل عدد $\varepsilon > 0$ ، يوجد عدداً موجبان δ_1, δ_2 بحيث يكون على التوالي:

$$0 < |x - c| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$0 < |x - c| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

وباختيار δ أصغر العددين δ_1, δ_2 ، فإن:

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |(f(x) + g(x)) - (L_1 + L_2)| =$$

$$|(f(x) - L_1) + (g(x) - L_2)| \leq |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

أو أنه يوجد لكل $\varepsilon > 0$ ، عدد $\delta > 0$ بحيث يكون:

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |(f(x) + g(x)) - (L_1 + L_2)| < \varepsilon$$

هذا يعني أن: $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = L_1 + L_2$

(١, ٤)

(٢) لنثبت أن: $\lim_{x \rightarrow c} (af(x)) = aL_1$ (a عدد ثابت)

حسب الفرض: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L_1$

هذا يعني أنه لكل عدد $\varepsilon > 0$ ، يوجد عدد $\delta > 0$ بحيث يتحقق:

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{|a|}, a \neq 0$$

$$\Rightarrow |a||f(x) - L_1| < \varepsilon \Rightarrow |af(x) - aL_1| < \varepsilon$$

إذن يوجد لكل $\varepsilon > 0$ ، عدد $\delta > 0$ بحيث يكون:

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |af(x) - aL_1| < \varepsilon$$

وهذا يعني:

$$\lim_{x \rightarrow c} (af(x)) = aL_1$$

إذا كانت $a = 0$ فالعلاقة (١، ٤) تبقى صحيحة.

ملحوظة (١، ٤)

تبقى الفقرة الأولى صحيحة من أجل أي عدد محدود من الدوال، فمثلاً:

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x) + h(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x) + \lim_{x \rightarrow c} h(x)$$

نتيجة (٢، ٤)

$$(c \in \mathbb{N}) \quad \lim_{x \rightarrow c} x^n = c^n$$

البرهان

إذا كانت $n = 1$ فإن (٢، ٤) صحيحة استناداً للنتيجة (١، ٤).

وإذا كانت $n = 2$ وحسب النظرية السابقة فإن العلاقة (٢، ٤) صحيحة لأن:

$$\lim_{x \rightarrow c} x^2 = \lim_{x \rightarrow c} (x \cdot x) = \lim_{x \rightarrow c} x \cdot \lim_{x \rightarrow c} x = c \cdot c = c^2$$

(٢، ٤)

ويمكن استخدام الاستقراء الرياضي لإثباتها من أجل أي عدد صحيح n .

نهاية كثيرة حدود (Polynomial):

بفرض أن $\varphi(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ كثيرة حدود من الدرجة n ($a_0 \neq 0$)، فإن:

$$\lim_{x \rightarrow c} \varphi(x) = \varphi(c)$$

أي أن نهاية كثيرة حدود تساوي قيمتها عندما $x \rightarrow c$.

البرهان

$$\lim_{x \rightarrow c} a_0 x^n = a_0 \lim_{x \rightarrow c} x^n = a_0 c^n \text{ نعلم أن:}$$

بالمثل نستنتج نهايات الحدود المتبقية من $\varphi(x)$. وحسب الملاحظة (١ , ٤) ، فإن:

$$\lim_{x \rightarrow c} \varphi(x) = a_0 c^n + a_1 c^{n-1} + \dots + a_n = \varphi(c)$$

مثال (٣ , ٤)

أوجد النهايتين التاليتين:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - x^2 + 1) \quad (١)$$

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - x}{x^2 + 1} \quad (٢)$$

الحل

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - x^2 + 1) = 2^3 - 2^2 + 1 = 8 - 4 + 1 = 5 \quad (١)$$

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - x}{x^2 + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 7} (x^2 - x)}{\lim_{x \rightarrow 7} (x^2 + 1)} = \frac{(7)^2 - 7}{7^2 + 1} = \frac{42}{50} = \frac{21}{25} \quad (٢)$$

نقبل فيما يلي بصحة النظرية التالية بدون برهان.

نظرية (٣ , ٤)

إذا كانت نهاية الدالة f موجودة عندما $x \rightarrow a$ ، فإن:

$$(n \in \mathbb{N}) \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)]^n \quad (١)$$

$$(n \in \mathbb{N}) \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} \quad (٢)$$

بشرط أن يكون الطرف الأيمن عددًا حقيقيًا.

مثال (٤ , ٤)

أوجد النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 3x)^4 \quad (١)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x-1} \quad (٢)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{x^2 - x^3} \quad (٣)$$

الحل

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 3x)^4 = [\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 3x)]^4 \quad (١)$$

$$= (4)^4 = 256$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x-1} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} (x-1)} = \sqrt{-1} \quad (٢)$$

والنهاية غير موجودة لأن الطرف الأيمن غير حقيقي.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{x^2 - x^3} = \sqrt[3]{-4} = -\sqrt[3]{4} \quad (٣)$$

(٢, ٤) النهاية عن يمين والنهاية عن يسار

The Right-hand and Left-hand Limits

إذا تحقق تعريف النهاية (١, ٤) من أجل قيم للمتغير x تكبر العدد c فقط فإننا نرمز للنهاية بالرمز:

$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$ ونسميها بالنهاية عن يمين c . وهنا يوجد لكل عدد $\varepsilon > 0$ ، عدد $\delta > 0$ بحيث يكون:

$$0 < x - c < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

(يجب أن تكون الدالة هنا معرفة على فترة من الشكل (c, b)).

مثال (٥, ٤)

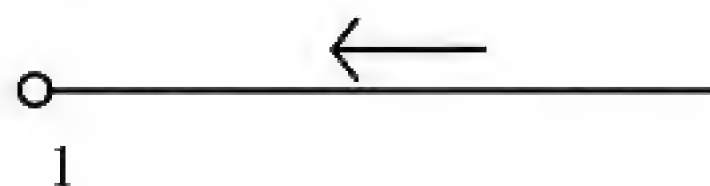
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1} \quad \text{أوجد قيمة النهاية:}$$

الحل

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)} = \sqrt{1-1} = 0$$

(الدالة معرفة من أجل $x \geq 1$).

من الواضح هنا لو أعطينا المتغير x القيم: $1.1, 1.01, 1.001, \dots$ وهكذا حصلنا على عدد قريب من الصفر، وعندما ننتهي نحو 1 تكون النهاية مساوية للصفر.



إذا تحقق تعريف النهاية (١, ٤) من أجل قيم للمتغير x تصغر العدد c فقط فإننا نرمز للنهاية بالرمز:
 $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L$ ونسميها بالنهاية عن يسار c . وهنا يوجد لكل عدد $\varepsilon > 0$ ، عدد $\delta > 0$ بحيث يكون:

$$0 < c - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

(يجب أن تكون الدالة هنا معرفة على فترة من الشكل (d, c)).

مثال (٦, ٤)

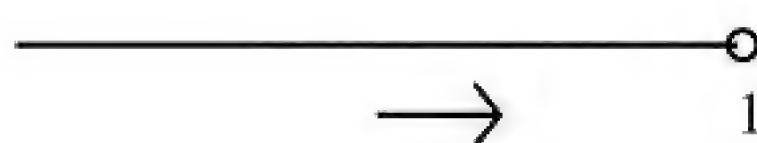
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x}$$

أوجد النهاية:

الحل

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)} = \sqrt{1-1} = 0$$

(الدالة معرفة من أجل $x \leq 1$)



من الواضح أننا لو أعطينا المتغير x القيم: $0.9, 0.99, 0.999, \dots$ ، وهكذا حصلنا على عدد قريب من الصفر وعندما تنتهي x نحو 1 تكون النهاية مساوية للصفر.

مثال (٧, ٤)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}$$

(٢)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$$

أوجد (١)

الحل

(١) إذا أعطينا المتغير x القيم

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \dots, 10^{-6}, \dots$$

نحصل على قيم للمقدار $\frac{1}{x}$ وهي:

$$10, 100, 1000, \dots, 10^6, \dots$$

فكلما صغر العدد الموجب x كبر المقدار $\frac{1}{x}$ وتزداد قيمته وتكبر بحيث يتجاوز في كبره أي

عدد موجب نفترضه.

نقول عندها إن نهاية المقدار عندما $x \rightarrow 0^+$ تساوي ∞ (أو فإن المقدار $\frac{1}{x}$ ينتهي نحو ∞)،

إذن:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

(٢) إذا أعطينا المتغير x القيم

$$-\frac{1}{10} = -10^{-1}, -10^{-2} = -\frac{1}{100}, -10^{-3} = -\frac{1}{1000}, \dots, -10^{-6}, \dots$$

نحصل على قيم للمقدار $\frac{1}{x}$ وهي:

$$-10, -100, -1000, \dots, -10^6, \dots, \dots$$

فكلما ازداد قرب العدد السالب x من الصفر صغرت قيمة المقدار $\frac{1}{x}$ وبقيت أصغر من أي

عدد سالب نفترضه.

نقول عندها إن نهاية المقدار عندما $x \rightarrow 0^-$ تساوي $-\infty$ (أو فإن المقدار $\frac{1}{x}$ ينتهي نحو

$-\infty$)، إذن:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

نتيجة (٣، ٤)

يتضح مما سبق أن الشرط الضروري والكافي لتكون النهاية $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ موجودة أن يكون:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

مثال (٨، ٤)

أوجد:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x} \quad (٢)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x} \quad (١)$$

الحل

(١) إذا أعطينا x القيم: $10, 10^2, 10^3, \dots, 10^6, \dots$ ، فإن المقدار $\frac{5}{x}$ يأخذ القيم:

$$\frac{5}{10}, \frac{5}{100}, \frac{5}{1000}, \dots, 5(10)^{-6}, \dots$$

وهكذا فإن المقدار $\frac{5}{x}$ يصغر كلما كبر x ويصبح أصغر من أي عدد موجب نفترضه. نقول عندها إن نهاية المقدار $\frac{5}{x}$ تساوي الصفر عندما $x \rightarrow \infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x} = 0 \quad \text{إذن:}$$

$$(٢) \text{ بالمثل يمكن أن نبرهن أن } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x} = 0$$

(٤, ٣) أوضاع عدم التعيين

Indeterminate Forms

(١) وضع عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

بسط الكسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ ومقامه ينتهيان نحو الصفر عندما $x \rightarrow a$.

مثال (٩, ٤)

أوجد النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 5x + 6}{\sqrt{x-2}} \quad (٢)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x - 2}{|1-x|} \quad (٤)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2} \quad (١)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 6x + 8} \quad (٣)$$

الحل

(١) البسط والمقام ينعدمان عندما $x=2$. فكلاهما يقبل $(x-2)$ عاملا له، إذن:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2}{x+1} = \frac{4}{3}$$

(اختصرنا العامل المشترك).

(٢) البسط والمقام ينعدمان عندما $x=2$. فالمقدار $(x-2)$ أحد عوامل البسط، إذن:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 5x + 6}{\sqrt{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x-3)}{\sqrt{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x-2}(x-3) = 0$$

$$((x-2) = \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x-2} \text{ لاحظ أن})$$

(٣) البسط والمقام ينعدمان عندما $x=4$. فالمقدار $(x-4)$ عامل لكليهما، وبالتالي:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 6x + 8} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+1)}{(x-4)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+1}{x-2} = \frac{5}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x - 2}{|1 - x|} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+2) = 3 \quad (\xi)$$

(لاحظ أن $x-1$ عامل للبسط وأن المقدار $1-x$ سالب من أجل قيم للمتغير x تكبر الواحد وقريبة منه، إذن: $|1-x| = -(1-x)$)

مثال (١٠، ٤)

أوجد النهايات التالية:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4-x}{\sqrt{x}-2} \quad (٢) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2)^3 - 8}{x} \quad (١) \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}} \quad (\xi) & \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^2 - x - 2} \quad (٣) \end{aligned}$$

الحل

طريقة أولى:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2)^3 - 8}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2-2)((x+2)^2 + 2(x+2) + 4)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (x+2)^2 + 2(x+2) + 4 = 12 \end{aligned}$$

(البسط فرق بين مكعبي مقدارين: $(a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2))$).

طريقة ثانية:

بملاحظة أن: $(x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$ استناداً للمتطابقة: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2)^3 - 8}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - 8}{x} \quad \text{بالتالي:}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 6x^2 + 12x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x^2 + 6x + 12)}{x} = 12$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4-x}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4-x)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4-x)(\sqrt{x}+2)}{x-4} \quad (٢)$$

(ضربنا البسط والمقام بمرافق المقام مع ملاحظة أن $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$)

$$= \lim_{x \rightarrow 4} -(\sqrt{x} + 2) = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 4)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)(x^2 + 4)}{(x-2)(x+1)} \quad (٣)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x^2 + 4)}{(x+1)} = \frac{4(8)}{3} = \frac{32}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{\sqrt{(x-2)^2}} \quad (٤)$$

(ما تحت إشارة الجذر مربع تام)

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{|x-2|} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = 4$$

(لأن $x-2$ موجب من أجل قيم قريبة من العدد 2 وتكبر هذا العدد).

(٢) وضع عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

بسط الكسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ ومقامه ينتهيان نحو اللانهاية عندما $x \rightarrow a$. (وقد تنتهي $x \rightarrow \infty$).

مثال (١١, ٤)

أوجد النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + x}{x^2 + 1} \quad (٢)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + x} \quad (١)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x + 1}{2x + 3} \quad (٤)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1} \quad (٣)$$

الحل

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1 + \frac{1}{x^2})}{x^4(1 + \frac{1}{x^3})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2(1 + \frac{1}{x^3})} \quad (١)$$

(أخرجنا الحد الأكبر أسًا في البسط والمقام خارج قوس).

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

(لاحظ أن $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3} = 0$. والنهاية للمقدار تساوي الصفر دومًا إذا كانت قوة المقام أكبر من قوة البسط).

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3(1 + \frac{1}{x^2})}{x^2(1 + \frac{1}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} \quad (٢)$$

(أخرجنا الحد الأكبر أسًا من البسط والمقام خارج قوس ثم اختصرنا)

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

(قوة البسط أكبر من قوة المقام والنهاية هي دومًا إما ∞ أو $-\infty$)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(2 - \frac{1}{x^2})}{x^2(1 + \frac{1}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 2 \quad (٣)$$

(قوة البسط مثل قوة المقام والنهاية تساوي معامل أكبر أس في البسط مقسومًا على معامل الأس المشابه في المقام)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x + 1}{2x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(-1 + \frac{1}{x})}{x(2 + \frac{3}{x})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1 + \frac{1}{x}}{2 + \frac{3}{x}} = -\frac{1}{2} \quad (٤)$$

(القاعدة نفسها في الفقرة السابقة)

مثال (١٢، ٤)

أوجد النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 3} \quad (٣)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{x + 3} \quad (٢)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2x} \quad (١)$$

الحل

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2(1 + \frac{1}{x^2})}}{2x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{2x} \quad (١) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

(لاحظ أن $|x| = -x$ عندما تكون x سالبة).

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2(1 + \frac{1}{x^2})} + x}{x(1 + \frac{3}{x})} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + x}{x(1 + \frac{3}{x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + x}{x(1 + \frac{3}{x})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1)}{x(1 + \frac{3}{x})} = 2 \end{aligned} \quad (2)$$

(أخرجنا x عاملاً خارج قوس ثم اختصرنا)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2(1 - \frac{4}{x^2})}}{x(1 - \frac{3}{x})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}}{x(1 - \frac{3}{x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}}{x(1 - \frac{3}{x})} = -1 \end{aligned} \quad (3)$$

(٣) وضع عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

نحصل على هذا الوضع عند إيجاد نهاية مقدار من الشكل: $f(x) + g(x)$ عندما $x \rightarrow a$ وذلك إذا كان $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ ، $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ (أو بالعكس).

مثال (١٣، ٤)

أوجد النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}) \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) \quad (1)$$

الحل

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \quad (1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0$$

(ضربنا البسط والمقام بمرافق البسط)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x^2} = -\infty \quad (٢)$$

(وحدنا المقامات ووجدنا أن البسط قد انتهى نحو -1 والمقام نحو الصفر بقيم موجبة).

(٤) وضع عدم التعيين من الشكل $0 \times \infty$

نحصل على هذا الوضع عند إيجاد نهاية مقدار من الشكل: $f(x)g(x)$ عندما $x \rightarrow a$ وذلك إذا

كان $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ ، $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$

شكل (١٤، ٤)

أوجد:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{x^3 + 1} (x^4 + 1) \right) \quad (٢) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} (\sqrt{x^2 + 1} - 1) \quad (١)$$

الحل

$$(١) \text{ من الواضح أن } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x^2 + 1} - 1) = 0$$

فوضع عدم التعيين هو من الشكل $0 \times \infty$ ، من جهة أخرى، فإن:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} (\sqrt{x^2 + 1} - 1) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}$$

(والوضع الناتج عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$)

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - 1)(\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{x(\sqrt{x^2 + 1} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 1 - 1}{x(\sqrt{x^2 + 1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x(\sqrt{x^2 + 1} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{(\sqrt{x^2 + 1} + 1)} = \frac{0}{2} = 0$$

(٢) من الملاحظ هنا أن:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^3 + 1} = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} (x^4 + 1) = \infty$$

فوضع عدم التعيين هو من الشكل $0 \times \infty$

من جهة أخرى، نجد:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{x^3 + 1} \cdot (x^4 + 1) \right) &= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 1}{x^3 + 1} = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 (1 + \frac{1}{x^4})}{x^3 (1 + \frac{1}{x^3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty \end{aligned}$$

(٤ , ٤) نظرية الشطيرة أو نظرية الساندويتش

Sandwich Theorem

نظرية (٤ , ٤)

إذا كانت الدوال f, g, h معرفة على فترة مفتوحة تحوي c (وربما لا تحوي c نفسها) وإذا كان:

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow c} h(x) \leq \lim_{x \rightarrow c} g(x) \quad \text{فإن:}$$

بشرط أن تكون النهايات كلها موجودة.

وبشكل خاص إذا تحققت المساواة:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$$

$$\lim_{x \rightarrow c} h(x) = L \quad \text{فإن:}$$

لنبرهن على صحة الفقرة (ب):

حسب الفرض، يوجد لكل عدد موجب $\varepsilon > 0$ عددان موجبان δ_1, δ_2 بحيث يكون:

$$0 < |x - c| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \Leftrightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

$$0 < |x - c| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - L| < \varepsilon \Leftrightarrow L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon$$

وباختيار δ مساويا أصغر العددين δ_1, δ_2 ، نجد:

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) \text{ و } g(x) < L + \varepsilon \Rightarrow$$

$$L - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < L + \varepsilon \Rightarrow$$

$$L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon \Rightarrow |h(x) - L| < \varepsilon$$

وهذا يعني أن: $\lim_{x \rightarrow c} h(x) = L$

مثال (١٥, ٤)

أوجد النهايات التالية:

(١) إذا كان: $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$

على فترة مفتوحة تحوي $x=1$ (وربما لا تحوي $x=1$ نفسها)

وإذا كان $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 10$ ، فأوجد:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (h(x) + 7)$$

(٢) إذا كان $\frac{x}{x+x^2} \geq f(x) \geq 3 - \sqrt{x+4}$ على فترة مفتوحة تحوي $x=0$.
فأوجد $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ إن وجدت.

الحل

(١) من الواضح أن: $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 10$ ، بالتالي فإن:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (h(x) + 7) = 10 + 7 = 17$$

(٢) من الملاحظ أن: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x+x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(1+x)} = 1$

وأيضًا: $\lim_{x \rightarrow 0} (3 - \sqrt{x+4}) = 3 - 2 = 1$

إذن: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ حسب النظرية السابقة.

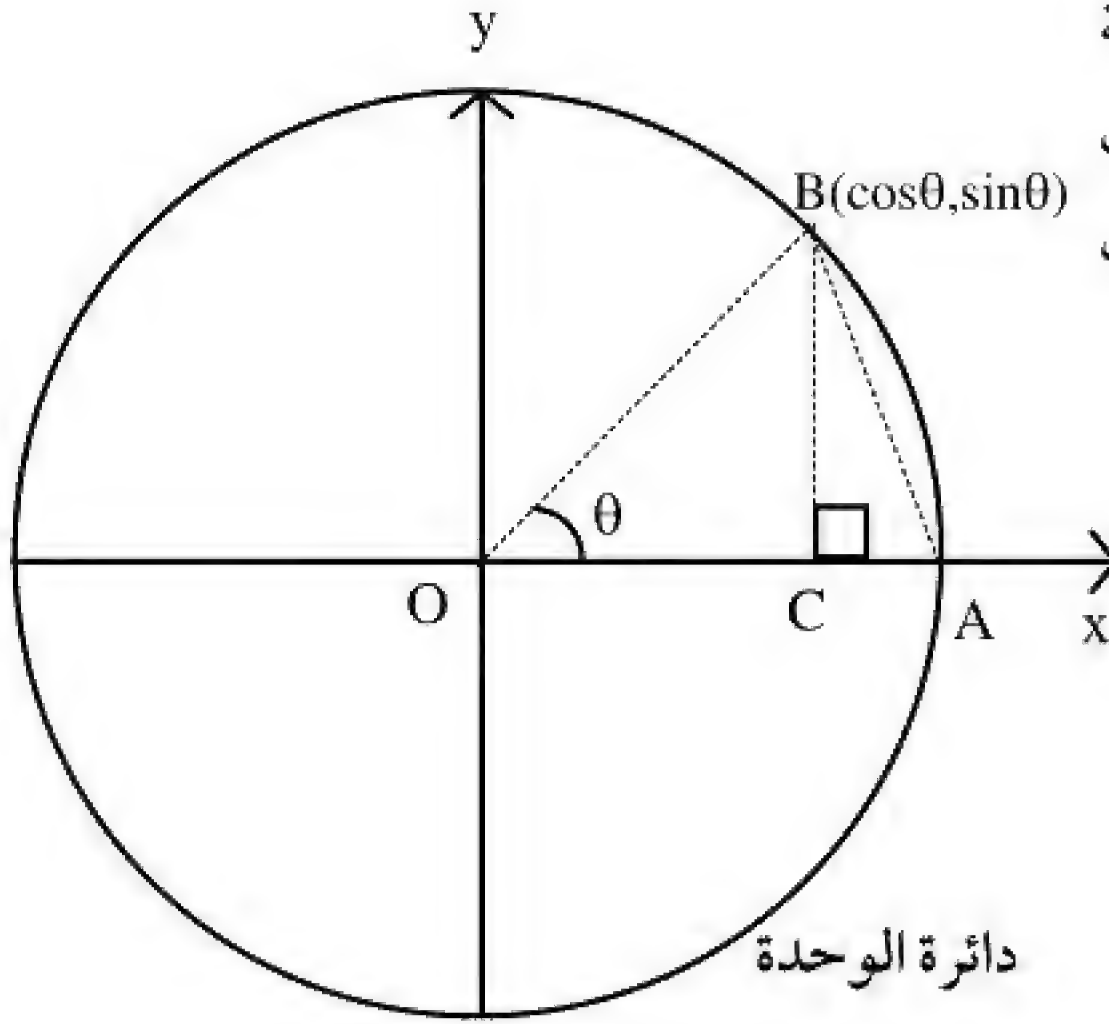
(٥, ٤) النهايات المثلثية

نظرية (٥, ٤)

$$\boxed{\lim_{\theta \rightarrow 0} \sin \theta = 0, \lim_{\theta \rightarrow 0} \cos \theta = 1}$$

البرهان

لنفرض أن $\frac{\pi}{2} > \theta > 0$.



شكل (٢، ٤).

من الواضح أن طول القوس المقابل للزاوية المركزية θ يساوي θ بالتقدير الدائري (حسب ((١، ١٩)) وأن $|BC| = \sin \theta$ ، حسب تعريف دالة \sin .

وبما أن طول القوس:

$$0 < |BC| < |AB| < \theta$$

$$\text{فإن: } 0 < \sin \theta < |AB| < \theta$$

$$\text{ومنه: } 0 < \sin \theta < \theta$$

$$\text{وبما أن: } \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \theta = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} 0 = 0$$

فحسب نظرية السندويتش فإن:

(٤، ٣)

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \sin \theta = 0$$

لنبرهن الآن أن:

(٤، ٤)

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^-} \sin \theta = 0$$

لنفرض أن $0 > \theta > -\frac{\pi}{2}$ ، واستنادا للمساواة $-\sin(-\theta) = \sin \theta$ ، فإن:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^-} \sin \theta = - \lim_{-\theta \rightarrow 0^+} \sin(-\theta) = 0$$

(لأن $0 < -\theta < \frac{\pi}{2}$ ، واستنادا للعلاقة ((٤، ٣))

من العلاقة ((٤، ٣))، ((٤، ٤)) نجد أن:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \sin \theta = 0$$

لنبرهن الآن أن: $\lim_{\theta \rightarrow 0} \cos \theta = 1$

لنأخذ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ، فنجد أن $\cos \theta > 0$.

بالتالي، فإن:

$$\Leftrightarrow \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta \Leftrightarrow \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \quad (\text{أهملنا إشارة } (-) \text{، لأن } \cos \theta > 0)$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \cos \theta = \sqrt{\lim_{\theta \rightarrow 0} (1 - \sin^2 \theta)} = \sqrt{1 - 0} = 1$$

ومنه:

$$(\lim_{\theta \rightarrow 0} \sin^2 \theta = \lim_{\theta \rightarrow 0} \sin \theta \cdot \lim_{\theta \rightarrow 0} \sin \theta = 0)$$

نظرية (٤, ٦)

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

البرهان

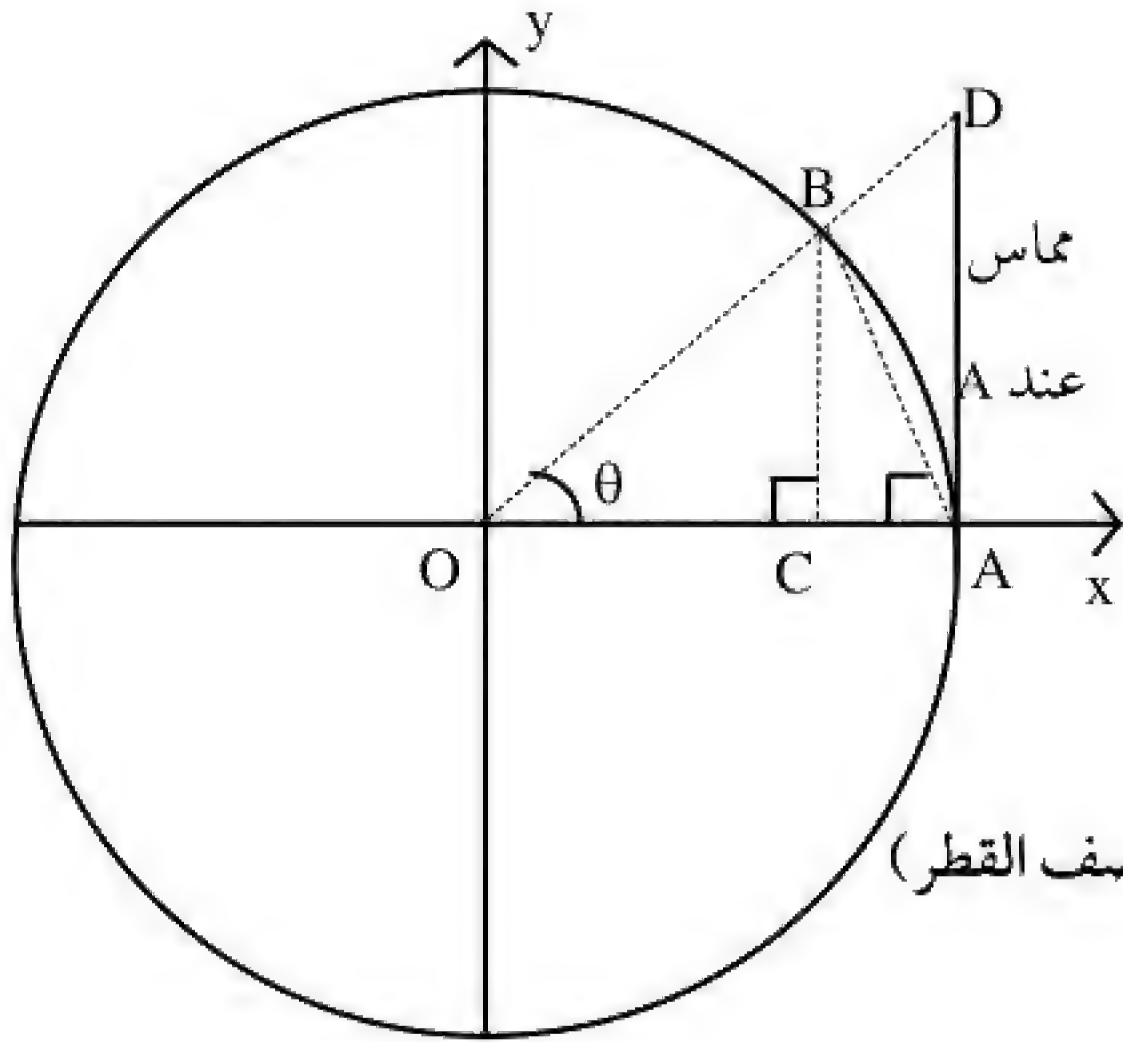
لنفرض: أن $\frac{\pi}{2} > \theta > 0$.

من المعلوم أن مساحة القطاع الدائري الذي زاويته المركزية θ تساوي $\frac{1}{2} r^2 \theta = \frac{1}{2} \theta$ (لأن الدائرة دائرة وحدة).

وأن مساحة المثلث OAB هي:

$$\frac{1}{2} |OA| |BC| = \frac{1}{2} \sin \theta$$

$$(|OA| = 1, |BC| = \sin \theta)$$



دائرة الوحدة

شكل (٤, ٣)

وأيضاً مساحة المثلث OAD هي:

$$\frac{1}{2} |OA| |AD| = \frac{1}{2} \tan \theta$$

($|AD| = \tan \theta$ من المثلث القائم OAD الذي طول ضلعه القائم $|OA| = 1$)

وبما أن:

مساحة المثلث $OAB <$ مساحة القطاع الدائري الذي زاويته $\theta <$ مساحة المثلث OAD ، فإن:

$$\frac{1}{2} \tan \theta > \frac{1}{2} \theta > \frac{1}{2} \sin \theta$$

وبتقسيم جميع الأطراف على $\frac{1}{2} \sin \theta$ ، فإن:

$$\frac{1}{\cos \theta} > \frac{\theta}{\sin \theta} > 1$$

(لاحظ أن $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$)

وبالقلب، نجد:

$$\cos \theta < \frac{\sin \theta}{\theta} < 1$$

(لاحظ أن جميع المقادير في بسط ومقام كل كسر هي موجبة، وأنا غيرنا جهة التباين)

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \cos \theta = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

وبما أن:

فحسب نظرية السندويتش:

(٤, ٥)

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

لنبرهن أن: $\lim_{\theta \rightarrow 0^-} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$. لنفرض أن $0 > \theta > -\frac{\pi}{2}$.
من الملاحظ أن:

$$\frac{\sin \theta}{\theta} = \frac{\sin(-\theta)}{-\theta}$$

ومنه:

(٤, ٦)

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^-} \frac{\sin \theta}{\theta} = \lim_{-\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin(-\theta)}{-\theta} = 1$$

(لأن $0 < -\theta < \frac{\pi}{2}$ وكذلك استنادًا للعلاقة (٤, ٥))

من (٤, ٥) و (٤, ٦)، نجد:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

نظرية (٤, ٧)

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta} = 0$$

البرهان

من الملاحظ أن: $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)}{\theta(1 + \cos \theta)}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 \theta}{\theta(1 + \cos \theta)} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \theta}{\theta(1 + \cos \theta)} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \frac{\sin \theta}{1} \cdot \frac{1}{1 + \cos \theta} \right) \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \lim_{\theta \rightarrow 0} \sin \theta \cdot \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos \theta} = 1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} = 0 \end{aligned}$$

نتيجة (٤, ٤)

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta}{\sin \theta} = 1, \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\tan \theta}{\theta} = 1, \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta}{\tan \theta} = 1$$

البرهان

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta}{\sin \theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin \theta}{\theta}} = \frac{1}{1} = 1 \quad (١)$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\tan \theta}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \frac{1}{\cos \theta} \right) = 1 \cdot 1 = 1 \quad (٢)$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta}{\tan \theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\tan \theta}{\theta}} = \frac{1}{1} = 1 \quad (٣)$$

مثال (٤, ١٦)

أوجد النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{x} \quad (٢)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} \quad (٤)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} \quad (١)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\tan bx} \quad (٣)$$

الحل

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(a \cdot \frac{\sin ax}{ax} \right) = a \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = a \quad (١)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(a \cdot \frac{\tan ax}{ax} \right) = a \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{ax} = a \quad (٢)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\tan bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\frac{\tan bx}{x}} = \frac{a}{b} \quad (٣)$$

(استنادا للفقرة (١) و (٢)).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{a}{b} \quad (٤)$$

(باتباع الطريقة نفسها في (٣)).

مثال (١٧, ٤)

أوجد النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x + \sin x} \quad (٢)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x \tan 3x} \quad (٤)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + \tan x}{3x} \quad (١)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos 2x - 3}{x} \quad (٣)$$

الحل

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + \tan x}{3x} &= \frac{1}{3} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \right) \quad (١) \\ &= \frac{1}{3} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \left(2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \right) + 1 \right) \\ &= \frac{1}{3} (2 + 1) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x + \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\tan x}{x} + \frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \quad (٢) \\ &\quad \text{(نقسم البسط والمقام على } x \text{)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos 2x - 3}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3(1 - \cos 2x)}{x} = -3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x} \quad (٣) \\ &= -3 \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2x} = -6 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{2x} = -6(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x \tan 3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\tan 3x} \quad (٤) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{\tan 3x}{3x}} \\ &= 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

مثال (١٨, ٤)

أوجد النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x \csc(\cos x) \quad (٢)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin t}{\pi - t} \quad (٤)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad (١)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\tan 2x} \quad (٣)$$

الحل

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (١)$$

(الوضع من الشكل $\frac{0}{0}$)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x \csc(\cos x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin(\cos x)} \quad (٢)$$

(الوضع من الشكل $0 \times \infty$)

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = 1$$

(وضعنا $\cos x = t$ ولاحظنا أن $x \rightarrow \frac{\pi}{2} \Rightarrow t \rightarrow 0$)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\tan 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cos x}{x}}{\frac{\tan 2x}{x}} = \frac{0}{2} = 0 \quad (٣)$$

(قسمنا البسط والمقام على x)

$$\lim_{t \rightarrow \pi} \frac{\sin t}{\pi - t} \quad (الوضع من الشكل \frac{0}{0}) \quad (٤)$$

نضع: $\pi - t = x \Leftrightarrow \pi - x = t$ وعندما $x \rightarrow 0 \Leftrightarrow t \rightarrow \pi$

بالتالي:

$$\lim_{t \rightarrow \pi} \frac{\sin t}{\pi - t} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi - x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(لأن $\sin(\pi - x) = \sin \pi \cos x - \cos \pi \sin x = 0 - (-1) \sin x = \sin x$)

مثال (١٩، ٤)

أوجد النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin 2x}{1 + x^4} \quad (٢) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \sqrt{x}}{x} \quad (١)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x + x^2} \quad (\xi) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x^2} \quad (٣)$$

الحل

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \sqrt{x}}{x} \quad (١)$$

من الملاحظ أن: $\sqrt{x} \rightarrow \infty$ عندما $x \rightarrow \infty$ ، إذن: لا يوجد نهاية للمقدار: $\sin \sqrt{x}$ عندما $x \rightarrow \infty$.

من الملاحظ أن: $-1 \leq \sin \sqrt{x} \leq 1$

وبضرب جميع الأطراف بالمقدار الموجب $\frac{1}{x}$ ، نجد:

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin \sqrt{x}}{x} \leq \frac{1}{x}$$

لكن: $\lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ ، فحسب نظرية السندويتش:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \sqrt{x}}{x} = 0$$

(٢) أيضا هنا لا يوجد للمقدار $\sin 2x$ نهاية عندما $x \rightarrow \infty$ ، من الملاحظ أن:

$$-1 \leq \sin 2x \leq 1$$

وبضرب جميع الأطراف بالمقدار $\frac{1}{1+x^4}$ ، نجد:

$$-\frac{1}{1+x^4} \leq \frac{\sin 2x}{1+x^4} \leq \frac{1}{1+x^4}$$

وبما أن: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^4} = \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{1+x^4} = 0$ ، فإن:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 2x}{1+x^4} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\sin \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} \quad (٣)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = 0 \cdot 1 = 0$$

(لاحظ أن الزاوية $\frac{1}{x^2}$ تنتهي نحو الصفر عندما $x \rightarrow \infty$)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} \quad (\xi)$$

$$= 1 \cdot 1 = 1$$

تمارين (١, ٤)

(١) أثبت باستخدام التعريف أن:

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4 \quad (\text{ج}) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4 \quad (\text{ب}) \quad \lim_{x \rightarrow 1} (2x - 3) = -1 \quad (\text{أ})$$

أوجد النهايات التالية إن وجدت:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - x^2}{x^2 - x} \quad (\text{ب}) \quad \lim_{x \rightarrow 4} (x^2 - 2x + 3) \quad (\text{أ}) \quad (٢)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{5} \quad (\xi) \quad \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{3}} (x^2 + 4) \quad (\text{٣})$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{5x - 4} \quad (\text{٦}) \quad \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{\pi} + 3) \quad (\text{٥})$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x - 3)^{\frac{2}{3}} \quad (\text{٨}) \quad \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x + 3}{|x + 3|} \quad (\text{٧})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{|x|} \quad (\text{١٠}) \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x}{x - 1} \quad (\text{٩})$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x^2 - 4} \quad (\text{١٢}) \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x} \quad (\text{١١})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \quad (\text{١٤}) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \quad (\text{١٣})$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}} \quad (\text{١٦}) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x - 2|}{x - 2} \quad (\text{١٥})$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 4x)^{-5} \quad (\text{١٨}) \quad \lim_{x \rightarrow 1} (2x - 3)^{\frac{1}{3}} \quad (\text{١٧})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{x + \sqrt{x}}{x^2 + 1}} \quad (\text{٢٠}) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x} + \sqrt{x^3 + 1} \right)^{-3} \quad (\text{١٩})$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{|x - 2|} \quad (\text{٢٢}) \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{\sqrt{x - 3}} \quad (\text{٢١})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 + x) \quad (٢٤)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} \quad (٢٣)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 5 \quad (٢٦)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2 + 1} \quad (٢٥)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x}{5} \quad (٢٨)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x-3} \quad (٢٧)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{\sqrt{x-3}} \quad (٣٠)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x^2 + 4x} \quad (٢٩)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x^3} - 5 \right) \quad (٣٢)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{x+1} \quad (٣١)$$

(٣٣) حدد قيمة K لتكون النهايات التالية موجودة:

$$f(x) \begin{cases} \frac{2}{x+1}, x \geq 1 \\ Kx + 3, x < 1 \end{cases} \quad \text{إذا كان: } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad (أ)$$

$$f(x) \begin{cases} \sqrt{x+4}, x \geq 0 \\ 2K + x^2, x < 0 \end{cases} \quad \text{إذا كان: } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad (ب)$$

أوجد النهايات التالية إن وجدت:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^2 - 4} \quad (٣٥)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} \quad (٣٤)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 3x + 2} \quad (٣٧)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-2)^3 + 8}{x^2 + x} \quad (٣٦)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 - x - 2)}{(x^2 - 4)(x^2 - 1)} \quad (٣٩)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 2x^2 + x - 4}{x - 1} \quad (٣٨)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x^2 - 2x} \quad (٤١)$$

$$\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{x - 16} \quad (٤٠)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{\sqrt{x+3} - 2} \quad (٤٣)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \quad (٤٢)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x + 1}{2x^2 - 4x + 2} \quad (٤٥)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{\sqrt{x+1} - 1} \quad (٤٤)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5 - x^4 + 1}{x^2 + 2x} \quad (٤٧)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1}{x^4 + 6x} \quad (٤٦)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4x}}{x + 3} \quad (٤٩)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x} \quad (٤٨)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^2} \quad (٥١)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - x}{x + 1} \quad (٥٠)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 4x} - x) \quad (٥٣)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + 1} - \sqrt{x}) \quad (٥٢)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) \quad (٥٥)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} \quad (٥٤)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) \left(\frac{1 + x^2}{x^2 - x} \right) \quad (٥٧)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x}{x^2 - 1} - \frac{1}{x^2 - 1} \right) \quad (٥٦)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\tan 5x}{x + \sin x}} \quad (٥٩)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin 3x}{2x} \quad (٥٨)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sin 9x} \quad (٦١)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x} \quad (٦٠)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x + 4)^{\frac{1}{4}} \quad (٦٣)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 - 5 \cos 2x}{3x} \quad (٦٢)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x^2 \tan^2 x} \quad (٦٥)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin^2 x}{\tan^3 x} \quad (٦٤)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} \quad (٦٧)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - \tan^3 4x}{x^4 + \sin^3 2x} \quad (٦٦)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt[5]{x} \sin \frac{1}{x} \quad (٦٩)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x} \quad (٦٨)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x^2}{\sqrt{x}} \quad (٧١)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + x^2}{\sin x^2} \quad (٧٠)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\csc x - \cot x) \quad (٧٣)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x} \quad (٧٢)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x \cos x \quad (٧٥)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi - x} \quad (٧٤)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2 + \cos x)^3}{x^4 + x^2} \quad (\vee\vee)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x^2}{x^2 + 1} \quad (\vee\vee)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{x - \frac{\pi}{2}} \quad (\vee\vartheta)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cot 2x \quad (\vee\wedge)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 2x}{1 - \sin x} \quad (\wedge\vee)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{(x - \frac{\pi}{2})^2} \quad (\wedge\vee)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{\sin x + \sin 5x} \quad (\wedge\vartheta)$$

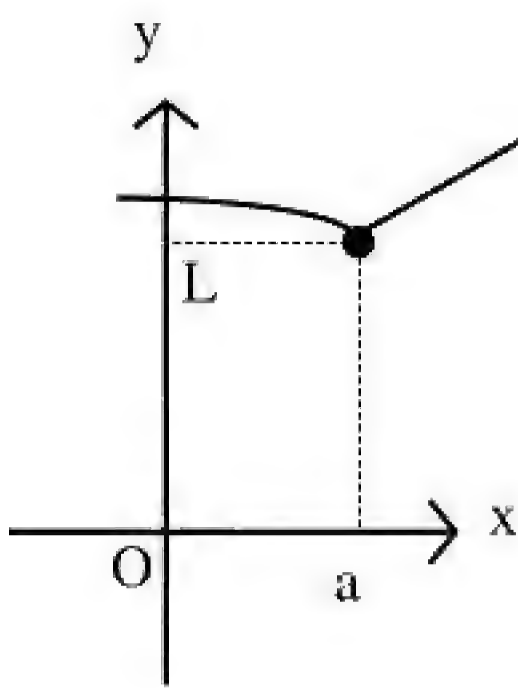
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 3x}{\sin 2x - \sin 3x} \quad (\wedge\vartheta)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec x - 1}{x} \quad (\wedge\vartheta)$$

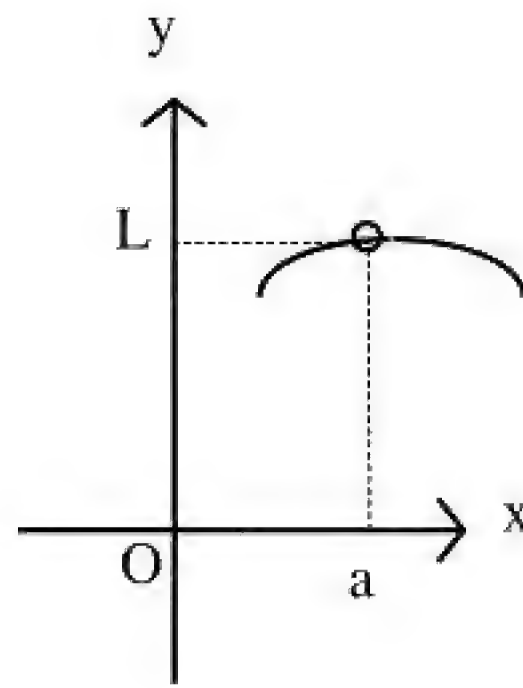
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x + 1 - \cos x}{2x} \quad (\wedge\vartheta)$$

الاتصال Continuity

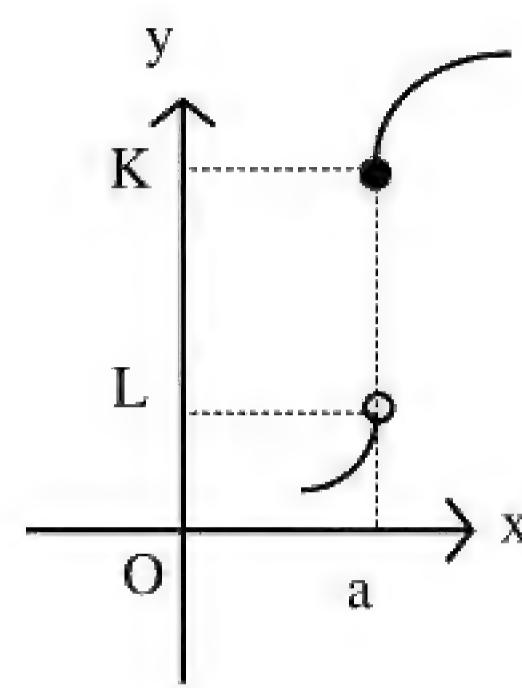
(١, ٥) اتصال دالة



(أ)



(ب)



(ج)

شكل (١, ٥).

لاحظ في منحنيات الدوال أعلاه أن:

(أ) الدالة معرفة عند a وأن $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = K$ (النهاية عن يمين a)، $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ (النهاية عن يسار a)

(ب) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ والدالة غير معرفة عند a

(ج) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

نقول عن الدالة في (أ) والدالة في (ب)، إنها غير متصلتين عند $x = a$ وبهما انقطاع أو عدم اتصال. كما نقول عن الدالة في (ج) إنها متصلة عند a .

تعريف (١, ٥)

لتكن f دالة معرفة على فترة مفتوحة تنتمي إليها النقطة a .

نقول إن الدالة f متصلة عند $x = a$ ، إذا كان:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

أو بلغة أخرى إذا كانت نهاية الدالة عندما $x \rightarrow a$ تساوي قيمتها عند a .

وهكذا نرى أن الدالة في (أ) غير متصلة عند $x = a$ لأن النهاية عن يمين a لا تساوي النهاية عن يسار a ، أي لكون النهاية غير موجودة. وفي (ب) غير متصلة لأن الدالة غير معرفة عند $x = a$. أما في (ج) فإن الدالة متصلة عند $x = a$.

مثال (١, ٥)

ادرس اتصال الدالة f عند النقطة المرافقة:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x}, & x > 0 \\ 2, & x = 0 \\ \frac{2x + x^2}{x}, & x < 0 \end{cases} \quad (٢) \quad \text{عند } x = 0$$

$$f(x) = |2x - 5| \quad \text{عند } x = \frac{5}{2} \quad (١)$$

الحل

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 5, & x \geq \frac{5}{2} \\ -(2x - 5), & x < \frac{5}{2} \end{cases} \quad (١)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{5}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{5}{2}^+} (2x - 5) = 0 \quad \text{من الملاحظ أن:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{5^-}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{5^-}{2}} -(2x - 5) = 0$$

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = 0$$

إذن الدالة f متصلة عند $x = \frac{5}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2 \frac{\sin 2x}{2x}\right) = 2 \quad (٢)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x + x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(2 + x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2 + x) = 2$$

إذن الدالة f متصلة عند $x = 0$

مثال (٢, ٥)

أوجد نقاط عدم الاتصال للدالة f حيث:

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-4)}$$

الحل

من الملاحظ أن عناصر المجموعة $\{1, 2, 4\}$ ، هي نقاط عدم اتصال. فمثلاً لو أخذنا $x = 1$ ، لوجدنا أن الدالة f غير معرفة عندها. بالمثل بقية النقاط.

مثال (٣, ٥)

أوجد قيمة K التي تجعل الدالة f متصلة عند $x = 0$ ، حيث:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\tan Kx}{x}, & x \neq 0, \cos Kx \neq 0 \\ 5K - 2, & x = 0 \end{cases}$$

الحل

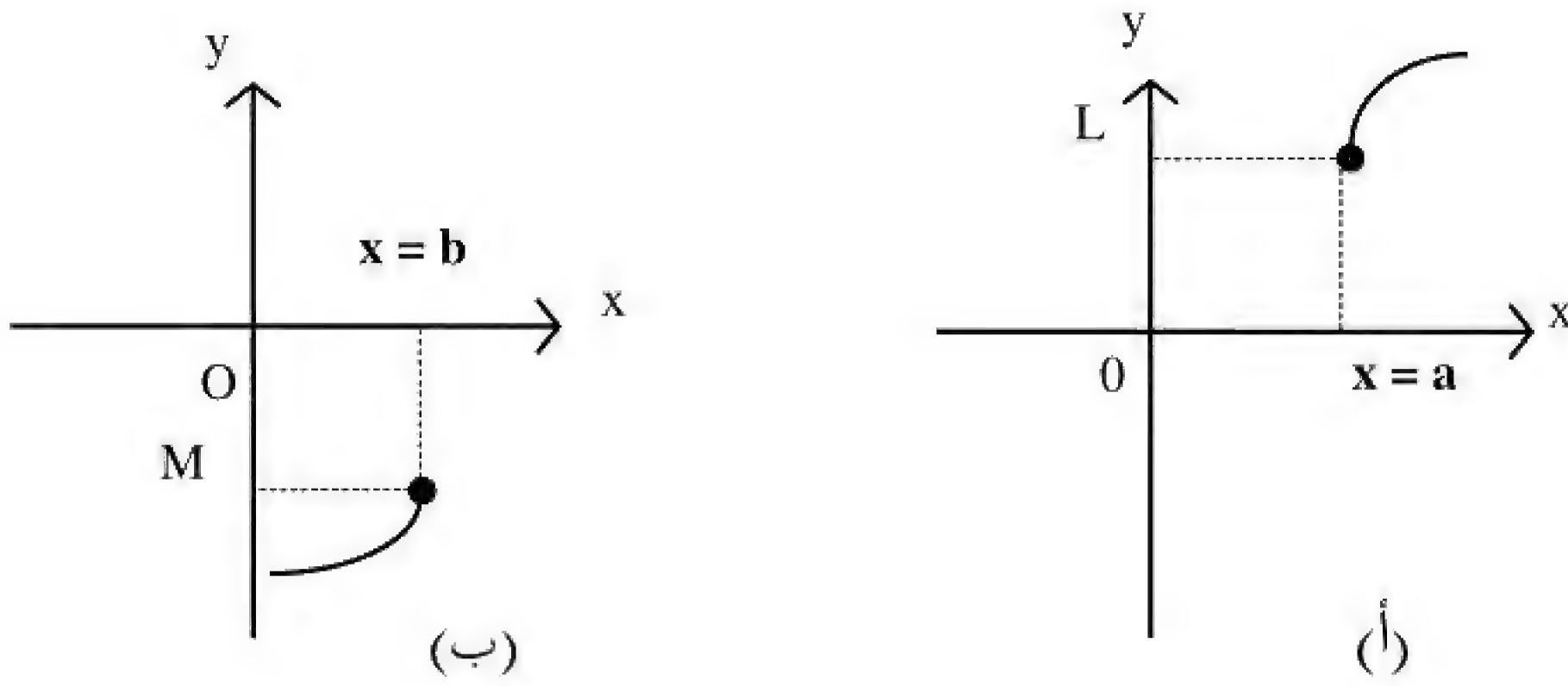
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan Kx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(K \cdot \frac{\tan Kx}{Kx}\right) = K$$

وبما أن: $f(0) = 5K - 2$

فشرط الاتصال:

$$K = 5K - 2 \Rightarrow 2 = 4K \Rightarrow K = \frac{1}{2}$$

(٥, ٢) الاتصال عن يمين والاتصال عن يسار
The Continuity from right and left



شكل (٥, ٢).

لاحظ في (أ) أن: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ وأن: $f(a) = L$
وكذلك في (ب) أن: $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = M$ وأن: $f(b) = M$

نقول عن الدالة f في (أ) إنها متصلة عن يمين $x = a$.
كما نقول عن الدالة f في (ب) إنها متصلة عن يسار $x = b$.

تعريف (٥, ٢)

لتكن f دالة معرفة على الفترة $[a, b)$.

نقول إن الدالة f متصلة عند $x = a$ يميناً، إذا تحقق:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

تعريف (٥, ٣)

لتكن f دالة معرفة على الفترة $(a, b]$.

نقول إن الدالة f متصلة عند $x = b$ يسارًا (عن يسار b)، إذا تحقق:

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$$

لاحظ في الشكل (٥, ٢) أن الدالة متصلة عند $x = a$ يمينًا وأن الدالة في الشكل (٥, ٢) (ب) متصلة عند $x = b$ يسارًا.

فمثلاً الدالة $f(x) = \sqrt{x-3}$ متصلة عند $x = 3$ يمينًا لأن:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{x-3} = 0 = f(3)$$

وكذلك الدالة f ، حيث $f(x) = \sqrt{2-x}$ متصلة عند $x = 2$ يسارًا لأن:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{2-x} = 0 = f(2)$$

تعريف (٥, ٤)

نقول إن الدالة f متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ ، إذا كانت f :

(١) متصلة عند كل نقطة من نقاط (a, b)

(٢) متصلة عند a يمينًا

(٣) متصلة عند b يسارًا

كما نقول إن الدالة f متصلة على مجالها، فيما إذا كانت متصلة عند كل نقطة من عناصر مجالها.

مثال (٥, ٤)

ادرس اتصال الدالة f على مجالها، حيث:

$$f(x) = \sqrt{4-x^2}$$

الحل

من الملاحظ أن الدالة معرفة على الفترة $[-2, 2]$

وأنها متصلة عند كل $a \in (-2, 2)$ ، لأن:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-a^2} = f(a)$$

وأيضاً: $\lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4} = 0 = f(2)$
 فالدالة متصلة عند $x = 2$ يساراً. بالمثل الدالة متصلة عند $x = -2$ يميناً.
 إذن، الدالة متصلة على الفترة المغلقة $[-2, 2]$ والتي هي مجال الدالة.

تعريف (٥, ٥)

نقول إن العدد M هو قيمة عظمى (مطلقة) للدالة f على الفترة $[a, b]$ ، إذا كان:
 M أكبر قيم الدالة من أجل جميع نقاط هذه الفترة

تعريف (٥, ٦)

نقول إن العدد m هو قيمة صغرى (مطلقة) للدالة f على الفترة $[a, b]$ ، إذا كان:
 m أصغر قيم الدالة من أجل جميع نقاط هذه الفترة

مثال (٥, ٥)

أوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة f على الفترة $[-4, 5]$ ، حيث:
 $f(x) = 2x - 3$

الحل

من الملاحظ أن: $-4 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow -8 \leq 2x \leq 10 \Leftrightarrow -11 \leq 2x - 3 \leq 7$

إذن القيمة العظمى للدالة f هي 7 والقيمة الصغرى هي -11.

(٥, ٣) خواص الدوال المتصلة

نظرية (٥, ١)

إذا كانت الدالتان f, g متصلتين عند $x = a$ فإن الدوال:

$$(١) \quad f \pm g$$

$$(٢) \quad fg$$

$$(٣) \quad \frac{f}{g} \quad \text{بفرض أن } g(a) \neq 0$$

متصلة أيضاً عند a .

البرهان

يمكن استنتاجه مباشرة من خواص النهايات ومن تعريف الاتصال عند نقطة.

نظرية (٥, ٢)

إذا كانت الدالة f متصلة عند b وحققت الدالة g المساواة: $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ ، فإن

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(b) = f(\lim_{x \rightarrow a} g(x))$$

نظرية (٥, ٣) (تركيب دوال متصلة)

إذا كانت g دالة متصلة عند $x = c$ وكانت f دالة متصلة عند $g(c)$ ، فإن الدالة $f \circ g$ متصلة عند c :

$$\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow c} g(x)) = f(g(c))$$

مثال (٥, ٦)

- (١) أثبت أن الدالة f ، حيث $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ متصلة على \mathbb{R}
 (٢) أثبت أن الدالة h ، حيث $h(x) = |x^2 - 1|$ متصلة على \mathbb{R}

الحل

(١) f دالة متصلة: لأن بسطها يُعرّف دالة متصلة لأنه كثيرة حدود، وكذلك المقام يُعرّف دالة متصلة للسبب نفسه، وبما أن المقام لا يساوي الصفر دومًا، فإن الدالة f متصلة على \mathbb{R} .

(٢) بما أن الدالة f ، حيث $f(x) = |x|$ دالة متصلة كما يظهر لنا بعد إعادة تعريفها. وأيضا الدالة g ، حيث $g(x) = x^2 - 1$ متصلة على \mathbb{R} لأنها دالة كثيرة حدود، فإن الدالة h ، حيث:

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(x^2 - 1) = |x^2 - 1|$$

متصلة على \mathbb{R} .

نظرية (٥, ٤)

إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ ، فإن:

(١) الدالة f محدودة على هذه الفترة.

(٢) للدالة f على الفترة قيمة عظمى (مطلقة) M وقيمة صغرى مطلقة m . أي يوجد عدنان α, β ينتميان للفترة $[a, b]$ بحيث يكون:

$$m = f(\alpha) \quad , \quad M = f(\beta)$$

(٣) فإن مدى f هي الفترة $[m, M]$

نظرية (٥, ٥) (نظرية القيمة الوسطى)

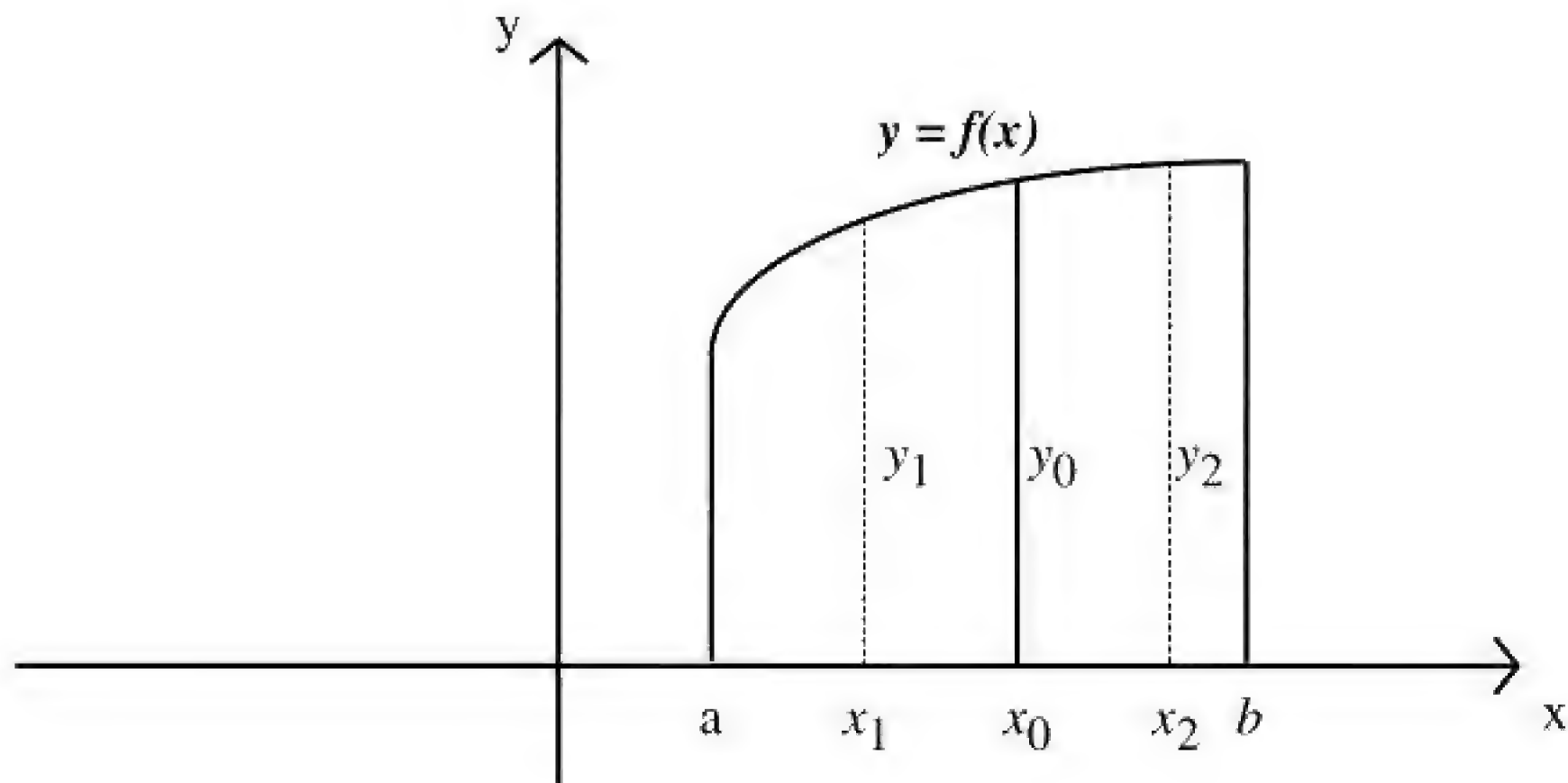
The Intermediate value Theorem

إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a, b]$ وكانت $y_1 = f(x_1)$ ، $y_2 = f(x_2)$ قيمتين للدالة من أجل نقطتين x_1, x_2 تنتميان للفترة $[a, b]$ ، فإذا

كان: $y_2 > y_0 > y_1$ (بفرض $y_2 > y_1$) فعندئذ يوجد عدد: $x_0 \in [x_1, x_2]$ ، بحيث يكون:

$$y_0 = f(x_0) \quad , \quad \text{شكل (٥, ٣).}$$

(نقبل هذه النظريات دون برهان).



شكل (٥, ٣).

مثال (٧, ٥)

أثبت أن للدالة f ، حيث: $f(x) = x + \cos x + 1$ جذراً على الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

الحل

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} + 1 \approx -0.57, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + 1 \approx 1.57 + 1 \approx 2.57$$

وبما أن $2.57 > 0 > -0.57$

وأن f دالة متصلة على \mathbb{R} لأنها مجموع دوال متصلة فحسب النظرية $(0, 0)$ ، يوجد عدد

$$f(x_0) = 0 \text{ حيث } x_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

تمارين (١, ٥)

أوجد مجموعة نقاط عدم اتصال الدوال المعرفة على النحو التالي:

$$f(x) = \frac{1}{x^3 + 8} \quad (٢)$$

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)} \quad (١)$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \\ x^2 + x, & 0 > x > -1 \\ 0, & x \leq -1 \end{cases} \quad (٤)$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases} \quad (٢)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{3x}, & x \neq 0 \\ 5, & x = 0 \end{cases} \quad (٦)$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leq 0 \\ \tan x, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 2x, & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (٥)$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x, & x < 0 \\ 5, & 0 \leq x < 2 \\ \frac{x}{2}, & 2 \leq x < 3 \\ \frac{1}{2} \sqrt{3x}, & x \geq 3 \end{cases} \quad (٨)$$

$$f(x) = \begin{cases} |x+1| - 1, & x < 0 \\ \cos 2x, & x \geq 0 \end{cases} \quad (٧)$$

(٩) أثبت أن الدالتين \sin و \cos متصلتان على \mathbb{R} :

أي أن: $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$ ، $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$
وذلك لكل $a \in \mathbb{R}$

إرشاد: اكتب $\sin x$ على الشكل:

$$\sin x = \sin[(x-a) + a] = \sin(x-a)\cos a + \cos(x-a)\sin a$$

وبالمثل اكتب $\cos x$ على الشكل:

$$\cos x = \cos[(x-a) + a] = \cos(x-a)\cos a - \sin(x-a)\sin a$$

باستخدام خواص النهايات، أثبت أن الدوال المعرفة كما يلي متصلة على مجالها:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 9} \quad (١٠)$$

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2} \quad (١١)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}} \quad (١٢)$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x} \quad (١٣)$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1} \quad (١٤)$$

$$f(x) = \left| \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right| \quad (١٥)$$

$$f(x) = \frac{\sin 3x}{x^2 + x} \quad (١٦)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{\sin x - \cos x + 3}{1 + \cos 3x}} \quad (١٧)$$

حدد قيم L, K لتكون الدوال المعرفة كما يلي، متصلة عند النقطة المرافقة:

$$x = 1, f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 1 \\ L, & x = 1 \\ (K^2 + 1)x - K, & x < 1 \end{cases} \quad (١٨)$$

$$x = 0, f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{x + L^2 x^3}{x}}, & x > 0 \\ x^2 - L, & x < 0 \\ 2K, & x = 0 \end{cases} \quad (١٩)$$

$$x = 4 \text{ على } f(x) = \begin{cases} K - x, x < 4 \\ 1 + 2L, x = 4 \\ \sqrt{x}, x > 4 \end{cases} \quad (٢٠)$$

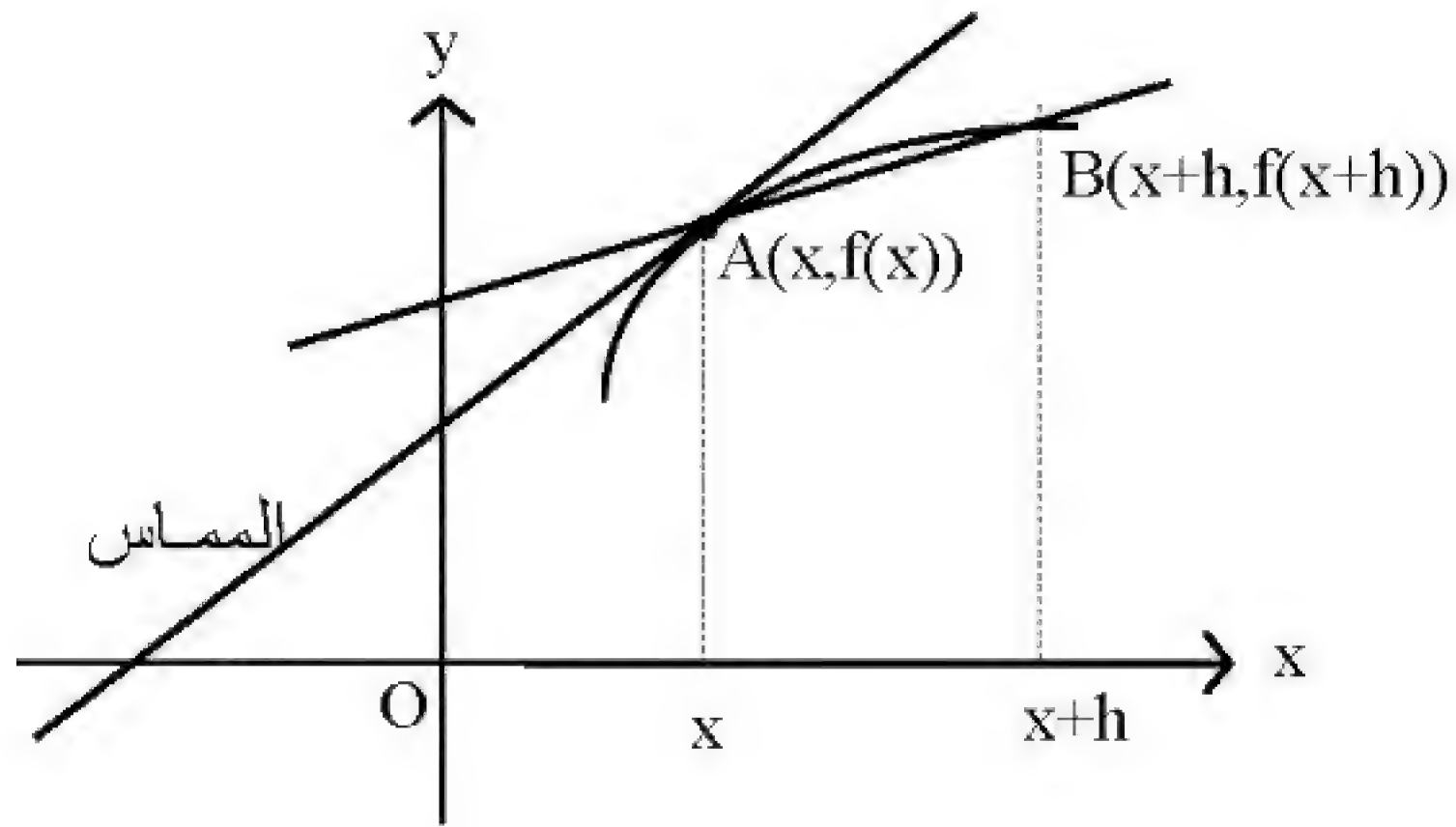
$$x = 0 \text{ على } f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{x+1}{x+4}}, x > 0 \\ K + 1, x = 0 \\ \frac{\sin(Lx)}{x}, x < 0 \end{cases} \quad (٢١)$$

$$\mathbb{R} \text{ على } f(x) = \begin{cases} -5 \sin x, x \leq -\frac{\pi}{2} \\ L \sin x + K, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 3 + \cos x, x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (٢٢)$$

المشتقات

THE DERIVATIVES

(١, ٦) المعنى الهندسي للمشتقة



شكل (١, ٦).

نفرض أن f دالة معرفة على الفترة المفتوحة (a, b) . لاحظ في الشكل أن نقطة $A(x, f(x))$ من منحنى الدالة f (حيث: $y = f(x)$) ، وأن نقطة أخرى من المنحنى نفسه قريبة من A حيث h هو التغير الذي طرأ على x .

من الملاحظ أن ميل القاطع AB هو:

$$(٦, ١) \quad m_{AB} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

إذا كان لهذه النسبة نهاية عندما $h \rightarrow 0$ ، فإن ميل القاطع AB ينتهي نحو ميل المماس لمنحني الدالة f عند x وينتهي القاطع نحو المماس للمنحني f عند النقطة $(x, f(x))$. إذن ميل المماس عند x هو:

$$(٦, ٢) \quad m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(٦, ٢) تعريف المشتقة

The Definition of The Derivative

تعريف (٦, ١)

لتكن f دالة معرفة على الفترة (a,b) . إذا كانت $x \in (a,b)$ وكانت نهاية النسبة: $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ موجودة عندما $h \rightarrow 0$ ، فإننا نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق عند x . نرمز لهذه النهاية بالرمز $f'(x)$ أو y' أو $\frac{dy}{dx}$ ونسميها بمشتقة الدالة عند x . إذن:

(٦, ٣)

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

إذا كانت نهاية النسبة السابقة موجودة عندما $h \rightarrow 0^+$ ، فإننا نسمي هذه النهاية بالمشتقة اليمنى للدالة f عند x . بالمثل نعرف المشتقة اليسرى للدالة f عند x . ومنه نجد أن: الشرط الضروري والكافي لوجود المشتقة الأولى للدالة f عند x أن تكون المشتقتان اليمنى واليسرى للدالة f عند x متساويتين.

نتيجة (٦, ١)

ميل المماس للمنحني الذي معادلته $y = f(x)$ عند النقطة $(x, f(x))$ يساوي قيمة المشتقة عند x ، أي أن:

(٦, ٤)

$$m = f'(x)$$

مثال (٦, ١)

باستخدام التعريف، أوجد مشتقات الدوال المعرفة فيما يلي عند x :

$$(١) \quad f(x) = x^2 - x \quad (٢) \quad f(x) = \frac{x}{1+x} \quad x \neq -1$$

$$(٣) \quad f(x) = \sqrt{2x-3}$$

الحل

$$(١) \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - (x+h) - (x^2 - x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x - h - x^2 + x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2 - h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h - 1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h - 1) = 2x - 1 \end{aligned}$$

(٢) لاحظ أن:

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{1}{h} \left(\frac{x+h}{1+x+h} - \frac{x}{1+x} \right) \\ &= \frac{1}{h} \cdot \frac{(x+h)(1+x) - x(1+x+h)}{(1+x)(1+x+h)} = \frac{1}{h} \cdot \frac{x + x^2 + h + hx - x - x^2 - xh}{(1+x)(1+x+h)} \\ &= \frac{1}{h} \cdot \frac{h}{(1+x)(1+x+h)} = \frac{1}{(1+x)(1+x+h)} \end{aligned}$$

$$h \neq 0, \text{ ومنه:}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(1+x)(1+x+h)} = \frac{1}{(1+x)(1+x)} = \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2(x+h)-3} - \sqrt{2x-3}}{h} \quad (٣)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2x+2h-3} - \sqrt{2x-3})(\sqrt{2x+2h-3} + \sqrt{2x-3})}{h(\sqrt{2x+2h-3} + \sqrt{2x-3})}$$

(ضربنا البسط والمقام بمرافق البسط)

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2x+2h-3) - (2x-3)}{h(\sqrt{2x+2h-3} + \sqrt{2x-3})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{h(\sqrt{2x+2h-3} + \sqrt{2x-3})}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{2x+2h-3} + \sqrt{2x-3}} = \frac{2}{\sqrt{2x-3} + \sqrt{2x-3}} = \frac{2}{2\sqrt{2x-3}} = \frac{1}{\sqrt{2x-3}}$$

(٦, ٣) مشتقة دالة عند نقطة

نعلم أن:

(٦, ٥)

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

لنضع: $t = c$ ، $t + h = x$ ، نجد:

$h = x - c$ وعندما $h \rightarrow 0$ ، فإن $x \rightarrow c$

وبالتعويض في (٦, ٥) ، نجد:

(٦, ٦)

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

مثال (٦, ٢)

أوجد مشتقة الدالة f ، حيث:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

عند النقطة $x = 0$ وذلك باستخدام التعريف.

الحل

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$$

من الملاحظ أن: $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ ، ومنه: $-x \leq x \sin \frac{1}{x} \leq x$ ($x > 0$) .
وبما أن: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0$ ، فحسب نظرية السندويتش:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

بالمثل، نجد: $\lim_{x \rightarrow 0^-} x \sin \frac{1}{x} = 0$. وبالتالي فإن: $f'(0) = 0$

مثال (٦, ٣)

ادرس قابلية الاشتقاق للدالة f ، حيث $f(x) = |x-1|$ عند $x = 1$ ، وذلك باستخدام التعريف.

الحل

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ -(x-1), & x < 1 \end{cases}$$

لنحسب المشتقة اليمنى عندما $x \rightarrow 1^+$ ، فنجد:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1) - 0}{x - 1} = 1$$

لنحسب المشتقة اليسرى عندما $x \rightarrow 1^-$ ، فنجد:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1) - 0}{x - 1} = -1$$

وبما أن المشتقة اليمنى لا تساوي المشتقة اليسرى عند $x = 1$ ، فالمشتقة غير موجودة عند 1.

تعريف (٦, ٢)

نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق على فترة مفتوحة، إذا كانت قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من نقاط هذه الفترة.

(٦, ٤) مشتقات الدوال الجبرية

نظرية (٦, ١)

إذا كانت: $f(x) = x^n$ ، $n \in \mathbb{N}$ (عدد طبيعي) فإن: $f'(x) = nx^{n-1}$

البرهان

حسب التعريف: $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$
وحسب صيغة ذي الحدين:

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n}{h}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \dots + nxh^{n-2} + h^{n-1})}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \dots + h^{n-1}) = nx^{n-1} \end{aligned}$$

مثال (٤, ٦)

أوجد معادلة المماس لمنحني الدالة المعرفة كما يلي:

$$f(x) = x^2, \text{ عند النقطة } (1,1)$$

الحل

نعلم أن ميل المماس عند 1 يساوي:

$$m = f'(1) = [2x]_1 = 2 \quad (\text{قيمة المشتقة عند } x = 1)$$

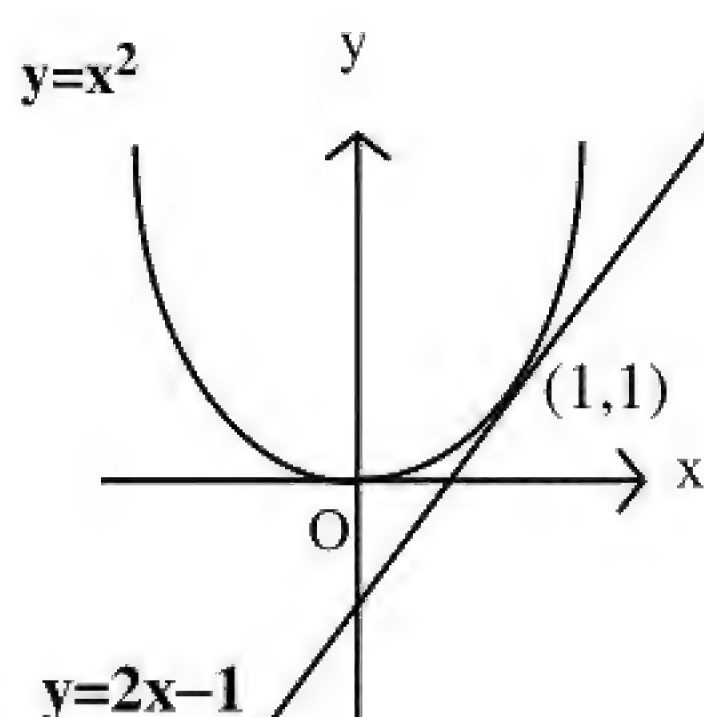
فمعادلة المماس هي:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m \Rightarrow \frac{y - 1}{x - 1} = 2 \Rightarrow y = 2x - 1$$

نظرية (٢, ٦)

(١) إذا كانت $f(x) = c$ (c ثابت)، فإن: $f'(x) = 0$

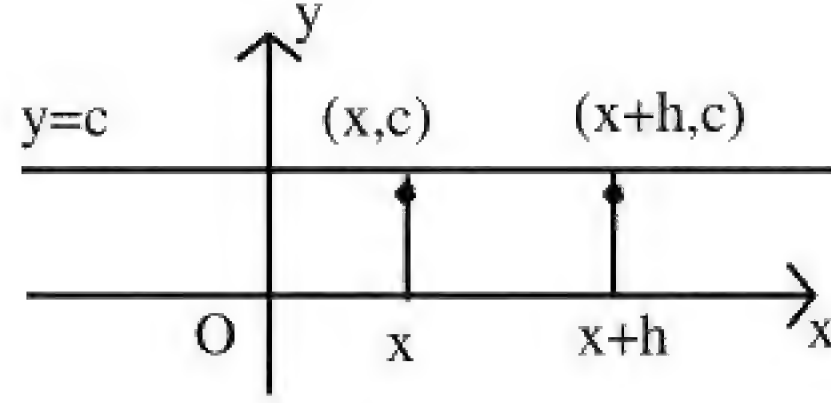
(٢) إذا كانت g دالة قابلة للاشتقاق عند x ، فإن: $y' = cg'(x) \Leftrightarrow y = cg(x)$



شكل (٢, ٦).

البرهان

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0 \end{aligned} \quad (١)$$



شكل (٣, ٦).

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{cg(x+h) - cg(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} c \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = c \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
 &= cg'(x)
 \end{aligned} \quad (٢)$$

نظرية (٣, ٦)

إذا كانت الدالتان f, g قابلتين للاشتقاق عند x ، فإن:

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x) \quad (١)$$

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad (٢)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \quad (٣)$$

بشرط أن يكون $g(x) \neq 0$

البرهان

$$\begin{aligned}
 (f + g)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - (f(x) + g(x))}{h} \quad (١) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)]}{h}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(x) + g'(x)
\end{aligned}$$

$$(f \cdot g)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \quad (٢)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

(أضفنا وطرحنا في البسط المقدار: $f(x)g(x+h)$)

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) - f(x)]g(x+h) + f(x)[g(x+h) - g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) \right] + \lim_{h \rightarrow 0} \left[f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right]$$

(وزعنا المقدار السابق إلى مجموعين)

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) + f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

($\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) = g(x)$ ، لأن g دالة قابلة للاشتقاق فهي متصلة)

لاحظ أن f, g دالتان قابلتان للاشتقاق عند x حسب المعطى.

(٣) لنبرهن أولاً أن:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{g(x)} \right) = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}, g(x) \neq 0$$

من الملاحظ أن:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{g(x)} \right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(x+h)}{hg(x)g(x+h)} \\
&= - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \bigg/ \lim_{h \rightarrow 0} [g(x+h)g(x)] \\
&= - \frac{g'(x)}{g(x) \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h)} = - \frac{g'(x)}{g(x)g(x)} = - \frac{g'(x)}{(g(x))^2}
\end{aligned}$$

من جهة أخرى:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g} \right)'(x) &= \frac{d}{dx} \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right) = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{g(x)} \right) \\
&= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{(g(x))^2} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}
\end{aligned}$$

مثال (٥, ٦)

أوجد مشتقات الدوال المعرفة كما يلي:

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1 \quad (٢) \quad f(x) = ax + b \quad (١)$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \quad (٤) \quad f(x) = (x^3 + 4)(x^2 - 2) \quad (٣)$$

الحل

$$f'(x) = a \quad (١)$$

$$f'(x) = 6x^2 + 6x \quad (٢)$$

$$f'(x) = 3x^2(x^2 - 2) + (x^3 + 4)(2x) \quad (٣)$$

$$= 3x^4 - 6x^2 + 2x^4 + 8x = 5x^4 - 6x^2 + 8x$$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 + 1) - (x^2 - 1)(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3 + 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} \quad (٤)$$

نظرية (٤, ٦)

إذا كانت: $f(x) = x^n$ و n عدد كسري فإن: $f'(x) = nx^{n-1}$ ، (وذلك من أجل قيم x التي تكون عندها المشتقة f' موجودة).

مثال (٦, ٦)

أوجد مشتقات الدوال المعرفة كما يلي:

$$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2} \quad (٢)$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{4}} \quad (١)$$

$$f(x) = (x^{\frac{1}{7}} + x^{\frac{1}{3}})(x^{\frac{1}{2}} + 2) \quad (٤)$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x^{\frac{2}{3}} + 1} \quad (٣)$$

الحل

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} \quad (١)$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} \quad (٢)$$

$$f'(x) = \frac{2x(x^{\frac{2}{3}} + 1) - x^2(\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}})}{(x^{\frac{2}{3}} + 1)^2} = \frac{2x^{\frac{5}{3}} + 2x - \frac{2}{3} x^{\frac{5}{3}}}{(x^{\frac{2}{3}} + 1)^2} \quad (٣)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\frac{4}{3}x^{\frac{5}{3}} + 2x}{\frac{2}{3}} \\
 f'(x) &= \left(\frac{1}{7}x^{-\frac{6}{7}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right)(x^{\frac{1}{2}} + 2) + (x^{\frac{1}{7}} + x^{\frac{1}{3}})\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) \quad (\varepsilon)
 \end{aligned}$$

نظرية (٥, ٦)

كل دالة قابلة للاشتقاق عند نقطة $x = a$ ، هي متصلة عند هذه النقطة.

البرهان

$$\begin{aligned}
 &\text{من الملاحظ أن: } f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)} \cdot (x-a) \quad , x \neq a \\
 &\text{ومنه: } f(x) = f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)} \cdot (x-a) \\
 &\text{بالتالي، فإن: } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) + \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)} \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x-a) \\
 &= f(a) + f'(a) \cdot 0 = f(a)
 \end{aligned}$$

(لأن $f(a)$ ثابت فنهيته نفسه، ولأن $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)} = f'(a)$ حسب (٦, ٦)) هذا يعني أن نهاية الدالة عندما $x \rightarrow a$ تساوي قيمتها عند a ، أي أن الدالة متصلة عند a .

نظرية (٦, ٦)

لتكن f دالة معرفة على الفترة (a, b) ، ولتكن $c \in (a, b)$. إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق على الفترة (a, b) (وربما لا تكون قابلة للاشتقاق عند c)، وكانت f :

(١) متصلة عند c

(٢) والنهائتان $\lim_{x \rightarrow c^-} f'(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow c^+} f'(x)$ موجودتان، فإن الشرط الضروري والكافي لوجود المشتقة f' عند c أن يكون $\lim_{x \rightarrow c^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} f'(x)$

مثال (٧, ٦)

ادرس قابلية الاشتقاق للدوال المعرفة على مجالها كما يلي:

$$f(x) = |x-2| \quad (٣) \quad f(x) = \begin{cases} 1, x \geq 0 \\ -1, x < 0 \end{cases} \quad (٢) \quad f(x) = |x|^3 \quad (١)$$

الحل

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2, x > 0 \\ -3x^2, x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} x^3, x \geq 0 \\ -x^3, x < 0 \end{cases} \quad (١)$$

(استبعدنا $x=0$). من الملاحظ أن الدالة قابلة للاشتقاق على المجموعة $\mathbb{R} - \{0\}$ ، إذن هي

متصلة على $\mathbb{R} - \{0\}$. لندرس قابلية الاشتقاق عند $x=0$ وفقا للنظرية (٦, ٦)

(أ) ندرس الاتصال عند $x=0$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 = 0 & \text{من الملاحظ أن:} \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x^3 = 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

إذن شرط الاتصال متحقق فالدالة متصلة عند $x=0$.

(ب) لنأخذ نهاية: $f'(x)$ عندما $x \rightarrow 0^+$ ، فنجد:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 3x^2 = 0$$

وكذلك نهاية $f'(x)$ عندما $x \rightarrow 0^-$ ، فنجد:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-3x^2) = 0$$

وبما أن الدالة متصلة عند $x=0$ ونهاية المشتقة عندما $x \rightarrow 0^+$ تساوي نهايتها عندما $x \rightarrow 0^-$

فالدالة قابلة للاشتقاق عند $x=0$ ، بالتالي f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} .

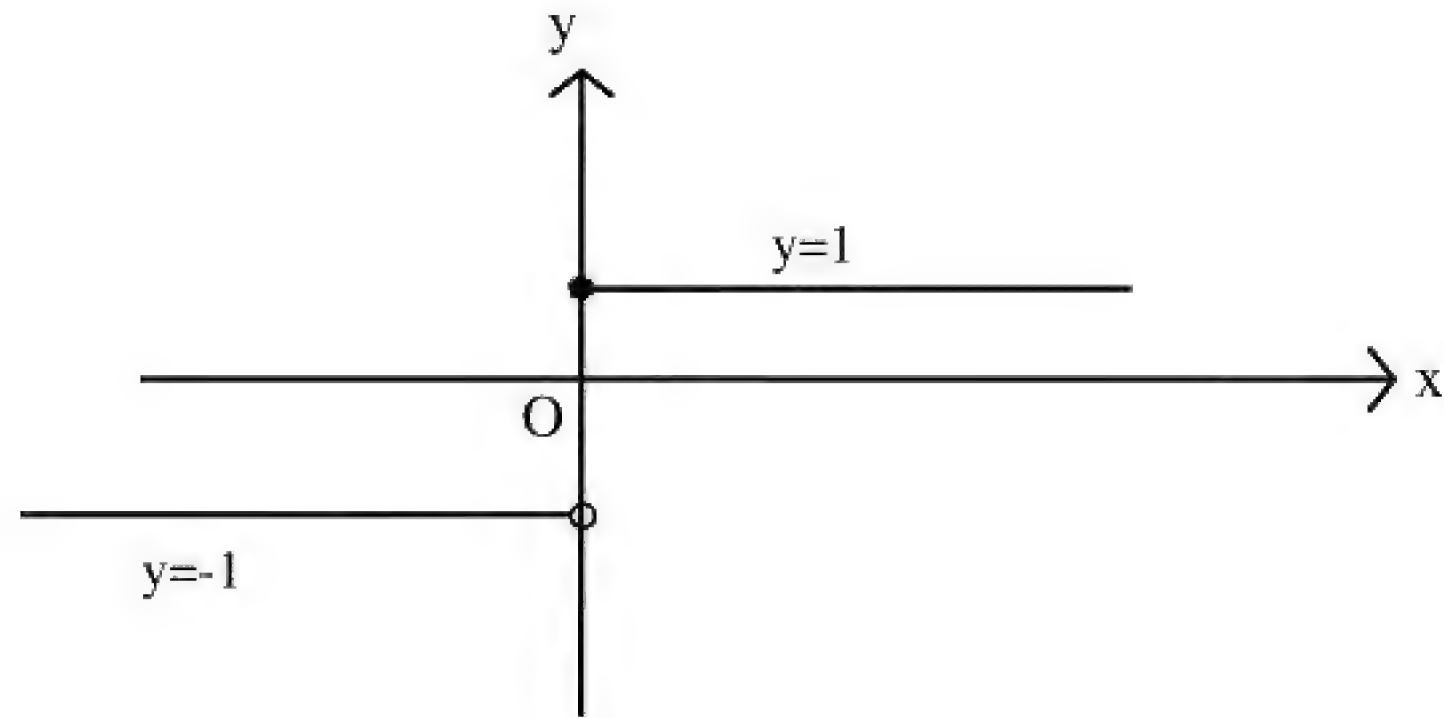
(٢)(أ) دراسة الاتصال عند $x=0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 = -1 \\ f(0) &= 1 \end{aligned}$$

فالدالة غير متصلة عند $x=0$ فهي غير قابلة للاشتقاق عند $x=0$.

فالدالة متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} - \{0\}$ ومشتقتها على $\mathbb{R} - \{0\}$ تساوي الصفر.

(شكل (٤, ٦)).

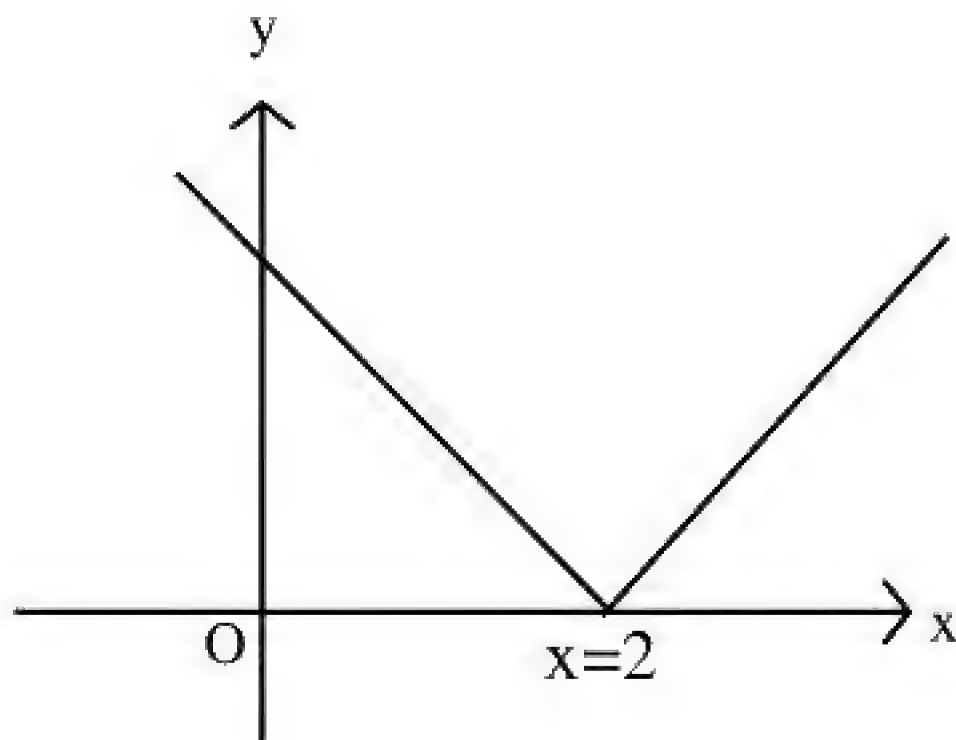


شكل (٤, ٦).

$$f(x) = |x - 2|$$

$$f(x) = \begin{cases} x - 2, & x \geq 2 \\ -(x - 2), & x < 2 \end{cases} \quad (٣)$$

من الواضح أنها متصلة عند $x=2$ لتحقيقها شروط الاتصال، وكذلك متصلة على $\mathbb{R} - \{2\}$ لأنها على شكل كثيرة حدود يسار ويمين $x=2$. إذن، هي متصلة على \mathbb{R} .



شكل (٥, ٦).

دراسة قابلية الاشتقاق عند $x=2$:

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 2 \\ -1, & x < 2 \end{cases} \quad \text{من الواضح أن:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x)$$

فإن الدالة غير قابلة للاشتقاق عند

$x=2$ ، ومن الواضح أنها قابلة

للاشتقاق على $\mathbb{R} - \{2\}$. شكل (٥, ٦).

(٥, ٦) مشتقات الدوال المثلثية

Derivatives of the Trigonometric Functions

نظرية (٦, ٧)

$$f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$$

$$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$$

انظر شكل (٦, ٦).

البرهان

(١) مشتقة دالة الجيب:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cosh + \cos x \sinh - \sin x}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin x(1 - \cosh) + \sinh \cos x}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin x(1 - \cosh)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh \cos x}{h} \\
 &= -\sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cosh}{h} + \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh}{h} = -\sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x
 \end{aligned}$$

(٢) مشتقة دالة جيب التمام

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cosh - \sin x \sinh - \cos x}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\cos x(1 - \cosh) - \sin x \sinh}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\cos x(1 - \cosh)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \sinh}{h} \\
 &= -\cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cosh}{h} - \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh}{h} = -\cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1 = -\sin x
 \end{aligned}$$

نتيجة (٢, ٦)

(١)

$$y' = -\csc^2 x \Leftarrow y = \cot x \quad (٢)$$

$$y' = \sec x \tan x \Leftarrow y = \sec x \quad (٣)$$

$$y' = -\csc x \cot x \Leftarrow y = \csc x \quad (٤)$$

(انظر شكل (٦, ٦)).

البرهان

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

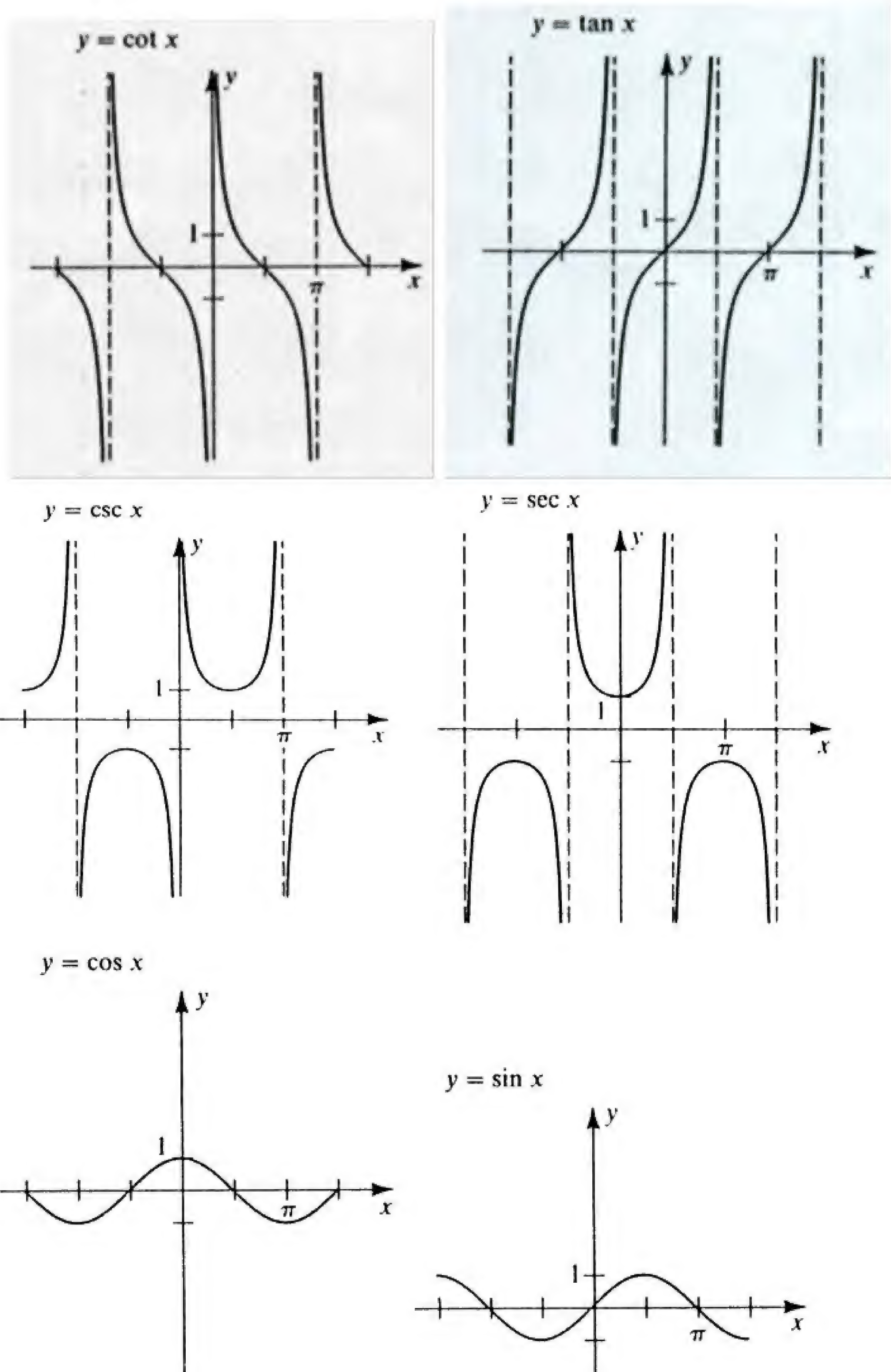
$$y' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \quad (١)$$

$$y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad (٢) \text{ بالمثل نجد مشتقة:}$$

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x} \quad (٣)$$

$$y' = \frac{0 \cdot \cos x - 1(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \sec x \tan x$$

$$y = \csc x = \frac{1}{\sin x} \quad (٤) \text{ بالمثل نجد مشتقة:}$$



شكل (٦, ٦).

مثال (٨, ٦)

أوجد مشتقات الدوال المعرفة فيما يلي:

$$y = \frac{\sec x}{1 + \tan x} \quad (٢)$$

$$y = \frac{1 - \cos x}{1 + \sin x} \quad (١)$$

$$y = \sin \theta \cos \theta \quad (٤)$$

$$y = \cot x (1 + \csc x) \quad (٣)$$

الحل

$$y = \frac{1 - \cos x}{1 + \sin x} \Rightarrow y' = \frac{\sin x (1 + \sin x) - (1 - \cos x)(\cos x)}{(1 + \sin x)^2} \quad (١)$$

$$= \frac{\sin x + \sin^2 x - \cos x + \cos^2 x}{(1 + \sin x)^2} = \frac{1 + \sin x - \cos x}{(1 + \sin x)^2}$$

$$y = \frac{\sec x}{1 + \tan x} \Rightarrow y' = \frac{\sec x \tan x (1 + \tan x) - \sec x (\sec^2 x)}{(1 + \tan x)^2} \quad (٢)$$

$$= \frac{\sec x \tan x + \sec x \tan^2 x - \sec^3 x}{(1 + \tan x)^2}$$

$$y = \cot x (1 + \csc x) \Rightarrow y' = -\csc^2 x (1 + \csc x) + \cot x (-\csc x \cot x) \quad (٣)$$

$$= -\csc^2 x - \csc^3 x - \cot^2 x \csc x$$

$$y' = \cos \theta \cos \theta + \sin \theta (-\sin \theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad (٤)$$

قاعدة السلسلة (٦, ٦)

The Chain Rule

نعلم أنه إذا كان: $y = f(u)$ حيث $u = g(x)$ فإن: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(u)$ فمثلاً إذا كان: $y = (x^2 + 1)^2$ فبالإمكان أن نضع: $y = f(u) = u^2 \Leftrightarrow u = g(x) = x^2 + 1$ عندئذ: $(f \circ g)(x) = f(u) = u^2 = (x^2 + 1)^2$ من الملاحظ أن: $\frac{du}{dx} = 2x$ ، $\frac{dy}{du} = 2u = 2(x^2 + 1)$ وبما أن: $y = x^4 + 2x^2 + 1$ ، فإن: $\frac{dy}{dx} = 4x^3 + 4x$ ، بالتالي فإن: $\frac{dy}{dx} = 2(x^2 + 1).2x = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

نتساءل الآن إن كانت النتيجة التي حصلنا عليها وهي:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

صحيحة دومًا. والنظرية التالية التي تسمى بقاعدة السلسلة تجيب على ذلك.

نظرية (٦, ٨) (قاعدة السلسلة)

إذا كانت: $y = f(u)$ حيث $u = g(x)$ ، وكانت:

المشتقتان: $\frac{dy}{du}$ ، $\frac{du}{dx}$ موجودتين (عند u ، x على الترتيب)، فإن:

مشتقة دالة التركيب: $y = f(g(x))$ (عند x) تعطى بالصيغة:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot g'(x) = f'(g(x))g'(x) \quad (٦, ٧)$$

ومنه:

(٦, ٨)

$$u = g(x) \text{ حيث } \frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}u'$$

مثال (٦, ٩)

أوجد مشتقات الدوال التالية:

$$y = (x^2 + 1)^7 \quad (٢)$$

$$y = \cos 2x \quad (١)$$

$$y = x(1 + x^{\frac{1}{2}})^3 \quad (٤)$$

$$y = \sin^2 x \quad (٣)$$

الحل

$$y = \cos 2x = \cos u \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\sin u u' = -\sin(2x)(2) \quad (١)$$

$$y = (x^2 + 1)^7 = u^7 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 7u^6 u' = 7(x^2 + 1)^6 (2x) \quad (٢)$$

$$y = \sin^2 x = u^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2uu' = 2\sin x \cos x \quad (٣)$$

$$y = x(1 + x^{\frac{1}{2}})^3 \Rightarrow y' = (1 + x^{\frac{1}{2}})^3 + x \frac{d}{dx}(1 + x^{\frac{1}{2}})^3 \Rightarrow (٤)$$

$$y' = (1 + x^{\frac{1}{2}})^3 + x[3(1 + x^{\frac{1}{2}})^2(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}})] = (1 + x^{\frac{1}{2}})^3 + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}(1 + x^{\frac{1}{2}})^2$$

(٦, ٧) الاشتقاق الضمني

The Implicit Differentiation

(أ) لتأمل في المساواة التالية:

$$(٦, ٩) \quad y + xy + x - 3 = 0$$

تجد أنه باستطاعتنا حساب y بدلالة x والحصول على الصيغة:

$$(٦, ١٠) \quad y(1+x) = 3-x \Rightarrow y = f(x) = \frac{3-x}{1+x}, x \neq -1$$

ولكن بدون تحمل هذا العناء يمكن إيجاد المشتقة: $\frac{dy}{dx}$ وذلك باشتقاق طرفي المعادلة (٦, ٩) بالنسبة للمتغير x مستفيدين من قاعدة السلسلة،

ف نجد:

$$y' + y + xy' + 1 = 0$$

$$y'(1+x) = -(1+y) \quad \text{ومنه:}$$

$$y' = -\frac{1+y}{1+x}, x \neq -1 \quad \text{إذن:}$$

إن الدالة f المعرفة بالقاعدة (٦, ١٠) والتي تزودنا بالقيمة y تسمى بالدالة المباشرة أو الظاهرة، أما المعادلة (٦, ٩) فتحدد تبعية المقدار y للمتغير x بشكل ضمني ونقول إن y معرفة ضمناً بالمعادلة (٦, ٩) أو أن f دالة ضمنية بالمتغير x . أو أن f محددة بشكل ضمني بالمعادلة (٦, ٩).
فمثلاً f المعرفة بالقاعدة $y = f(x) = \cos 3x + \tan 2x$ هي دالة مباشرة أو ظاهرة.

(ب) لاحظ في المعادلة التالية:

$$(٦, ١١) \quad x \sin y + y \cos x = 0$$

أنه يستحيل إيجاد y بدلالة x ، لكن يمكن إيجاد مشتقها f' باشتقاق طرفي المعادلة (٦, ١١) بالنسبة للمتغير x ، فنجد:

$$\sin y + x \cos y y' + y' \cos x - y \sin x = 0 \Rightarrow$$

$$y'(x \cos y + \cos x) = y \sin x - \sin y \Rightarrow$$

$$(٦, ١٢) \quad y' = \frac{y \sin x - \sin y}{x \cos y + \cos x}, x \cos y + \cos x \neq 0$$

مثال (٦, ١٠)

أوجد ميل المماس للمنحني المعرف بالقاعدة (٦, ١١)، عند النقطة $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ منه.

الحل

$$m = y'(\frac{\pi}{2}, \pi) = \frac{\pi \sin \frac{\pi}{2} - \sin \pi}{\frac{\pi}{2} \cos \pi + \cos \frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{-\frac{\pi}{2}} = -2 \quad \text{من (٦, ١٢)، نجد}$$

مثال (٦, ١١)

أوجد $y'' = \frac{d}{dx}(y')$ للدالة f المعرفة ضمناً بالمعادلة:

$$3y^2 + 4x^2 = 7$$

ثم أوجد معادلتى المماس والعمود على المماس للمنحني عند النقطة (1,1) الواقعة عليه.

الحل

$$3y^2 + 4x^2 = 7 \Rightarrow 6yy' + 8x = 0 \Rightarrow y' = -\frac{4x}{3y} \Rightarrow$$

$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = -\frac{4}{3} \cdot \frac{y - xy'}{y^2} = -\frac{4}{3} \cdot \frac{y + \frac{4}{3} \frac{x^2}{y}}{y^2} = -\frac{4}{3} \cdot \frac{3y^2 + 4x^2}{3y^3}$$

(عوضنا عن y' بما يساويها)

$$= -\frac{4}{3} \cdot \frac{7}{3y^3} = -\frac{28}{9y^3}$$

(لاحظنا أن $3y^2 + 4x^2 = 7$)ميل المماس للمنحني: $m = y'(1,1) = -\frac{4}{3}$ ميل العمود على المماس: $m' = -\frac{1}{m} = \frac{3}{4}$ معادلة المماس عند النقطة (1,1): $\frac{y-1}{x-1} = -\frac{4}{3} \Rightarrow 3y + 4x = 7$ معادلة العمود على المماس عند النقطة نفسها: $\frac{y-1}{x-1} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4y - 3x = 1$

مثال (٦, ١٢)

أوجد $\frac{dy}{dx}$ فيما يأتي:

$$y = \sec(\tan 2x) \quad (٢)$$

$$y = \tan^2 x + \sin^3 x^2 \quad (١)$$

$$y = \sin x^3 + \sin^3 2x \quad (٤)$$

$$xy^2 + y \sec x^2 + 3 = 0 \quad (٣)$$

الحل

$$y' = 2 \tan x \sec^2 x + 3 \sin^2 x^2 \cos x^2 (2x) \quad (١)$$

$$y = \sec u \Rightarrow y' = \sec(\tan 2x) \tan(\tan 2x) \sec^2 2x (2) \quad (٢)$$

$$y^2 + 2xyy' + y' \sec x^2 + y \sec x^2 \tan x^2 (2x) = 0 \Rightarrow (٣)$$

$$y'(2xy + \sec x^2) = -(y^2 + 2xy \sec x^2 \tan x^2) \Rightarrow$$

$$y' = -\frac{y^2 + 2xy \sec x^2 \tan x^2}{2xy + \sec x^2}$$

$$y' = \cos x^3 (3x^2) + 3 \sin^2 (2x) \cos 2x (2) \quad (٤)$$

نظرية (٩، ٦)

مشتقة: $y = x^n$ حيث n عدد نسبي (كسري)، هي $y' = nx^{n-1}$ (من أجل جميع قيم x التي تكون عندها المشتقة y' موجودة).

البرهان

(أ) $n \in \mathbb{N}^-$ (عدد صحيح سالب)

نضع: $n = -m$ ($m \in \mathbb{N}$)، فنجد: $y = x^{-m} = \frac{1}{x^m}$
بالاشتقاق، نجد:

$$y' = \frac{-m x^{m-1}}{x^{2m}} = -m x^{m-1-2m}$$

$$= -m x^{-m-1} = n x^{n-1}$$

(ب) $n \in \mathbb{Q}^+$ (عدد نسبي موجب)

نضع: $n = \frac{p}{q}$ ($p, q \in \mathbb{Z}^+$)، فنجد: $y = x^{\frac{p}{q}}$
ومنه: $y^q = x^p$

بالاشتقاق، نجد:

$$\Leftrightarrow q y^{q-1} y' = p x^{p-1}$$

$$y' = \frac{p}{q} \frac{x^{p-1}}{(x^{\frac{p}{q}})^{q-1}} = \frac{p}{q} \frac{x^{p-1}}{x^{p-\frac{p}{q}}}$$

$$= \frac{p}{q} x^{p-1-p+\frac{p}{q}} = n x^{n-1}$$

(ج) $n \in \mathbb{Q}^-$ (عدد نسبي سالب)

نضع: $n = -m$ ($m \in \mathbb{Q}^+$)، فنجد $y = x^{-m} = \frac{1}{x^m}$

وبالأسلوب نفسه الذي اتبعناه في (أ)، نجد أن:

$$y' = n x^{n-1}$$

ومن الواضح أن النظرية صحيحة إذا كان $n = 0$.

نظرية (٦, ١٠)

إذا قبلت الدالة f المعرفة على الفترة (a, b) التي تنتمي إليها النقطة x دالة عكسية f^{-1} ، وإذا كانت f قابلة للاشتقاق عند x ومشتقتها $f'(x) \neq 0$. وإذا كان $y = f(x)$ ، فإن الدالة f^{-1} قابلة للاشتقاق عند y وإن مشتقتها تساوي:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

مثال (٦, ١٣)

لتكن f دالة معرفة بقاعدتها:

$$f : x \mapsto x^{\frac{1}{3}} + 1$$

أوجد: $(f^{-1})'(3)$

الحل

إن هذه الدالة تقبل دالة عكسية على \mathbb{R} ، ومن الواضح أن حل المعادلة: $y = f(x)$ إذا كان $y = 3$ هو:

$$3 = x^{\frac{1}{3}} + 1 \Rightarrow x = 8$$

إذن:

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(8)} = \frac{1}{\frac{1}{3}(8)^{-\frac{2}{3}}} = 3(8)^{\frac{2}{3}} = 3(4) = 12$$

$$(f'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}})$$

طريقة أخرى:

قاعدة الدالة العكسية f^{-1} هي: $f^{-1} : x \mapsto (x - 1)^3$

بالتالي، فإن:

$$(f^{-1})'(x) = 3(x-1)^2 \Rightarrow (f^{-1})'(3) = 3(2)^2 = 12$$

جدول المشتقات

ملاحظات	المشتقة	الدالة
c ثابت	0	c
c عدد ثابت، n عدد قياسي	cnx^{n-1}	cx^n
n عدد قياسي، $u=g(x)$ قابلة للاشتقاق	$cnu^{n-1}u'$	cu^n
f, g قابلتان للاشتقاق	$f'(x) + g'(x)$	$f(x) + g(x)$
f, g قابلتان للاشتقاق	$f'(x).g(x) + f(x)g'(x)$	$f(x).g(x)$
f, g قابلتان للاشتقاق، $g(x) \neq 0$	$\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$	$\frac{f(x)}{g(x)}$
$u=g(x)$ قابلة للاشتقاق	$(\cos u)u'$	$\sin u$
u قابلة للاشتقاق	$(-\sin u)u'$	$\cos u$
u قابلة للاشتقاق	$(\sec^2 u)u'$	$\tan u$
u قابلة للاشتقاق	$(-\csc^2 u)u'$	$\cot u$
u قابلة للاشتقاق	$(\sec u \tan u)u'$	$\sec u$
u قابلة للاشتقاق	$(-\csc u \cot u)u'$	$\csc u$
$u=g(x)$ قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير x $f(u)$ قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير u	$cf'(u)u'$	$c f(u)$

(٦, ٨) المشتقات من مراتب عليا

The Higher Order Derivatives

تعريف (٦, ٣)

إذا كانت الدالة f' قابلة للاشتقاق عند x ، فإننا نسمي مشتقتها بالمشتقة الثانية للدالة f ونرمز لها بالرمز f'' وهكذا فإن:

$$f''(x) = [f'(x)]' = \frac{d}{dx}(f'(x))$$
$$f''(x) = \frac{d^2(f(x))}{dx^2}$$

ويرمز لها أيضا بالرمز:

وبالطريقة نفسها نحصل على المشتقة الثالثة وهي تساوي:

$$f^{(3)}(x) = f'''(x) = \frac{d}{dx}(f''(x)) = \frac{d^3(f(x))}{dx^3}$$

وأخيرا نرمز للمشتقة من الرتبة n بالرمز:

(٦, ١٣)

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n(f(x))}{dx^n}$$

مثال (٦, ١٤)

أوجد المشتقات من الرتب الموضحة أمام كل دالة:

$$n=2, f(x)=x^{\frac{1}{5}} \quad (٢) \quad n=4, f(x)=x^5 \quad (١)$$

$$n \text{ من الرتبة } f(x)=\sin x \quad (٤)$$

$$n \text{ من الرتبة } f(x)=\frac{1}{x+1} \quad (٣)$$

$$f(x)=x^{20} \text{ من الرتبة 20 والرتبة 21} \quad (٦)$$

$$n \text{ من الرتبة } f(x)=\sin 2x \quad (٥)$$

الحل

$$f^{(4)}(x)=5!x \Leftarrow f^{(3)}(x)=3.4.5x^2 \Leftarrow f''(x)=4.5x^3 \Leftarrow f'(x)=5x^4 \quad (١)$$

$$f''(x)=-\frac{4}{25}x^{-\frac{9}{5}} \Leftarrow f'(x)=\frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} \quad (٢)$$

$$\dots \Leftarrow f''(x)=1.2(x+1)^{-3} \Leftarrow f'(x)=-1(x+1)^{-2} \Leftarrow f(x)=(x+1)^{-1} \quad (٣)$$

$$\dots \Leftarrow f^{(3)}(x)=-3!(x+1)^{-4} \Leftarrow$$

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n n!(x+1)^{-(n+1)} \Leftarrow$$

$$\Leftarrow f''(x)=\sin(x+2\frac{\pi}{2}) \Leftarrow f'(x)=\sin(x+\frac{\pi}{2}) \Leftarrow f(x)=\sin x \quad (٤)$$

$$f^{(n)}(x)=\sin(x+n\frac{\pi}{2}) \Leftarrow$$

$$\Leftarrow f'(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{2}) \Leftarrow f(x)=\sin 2x \quad (٥)$$

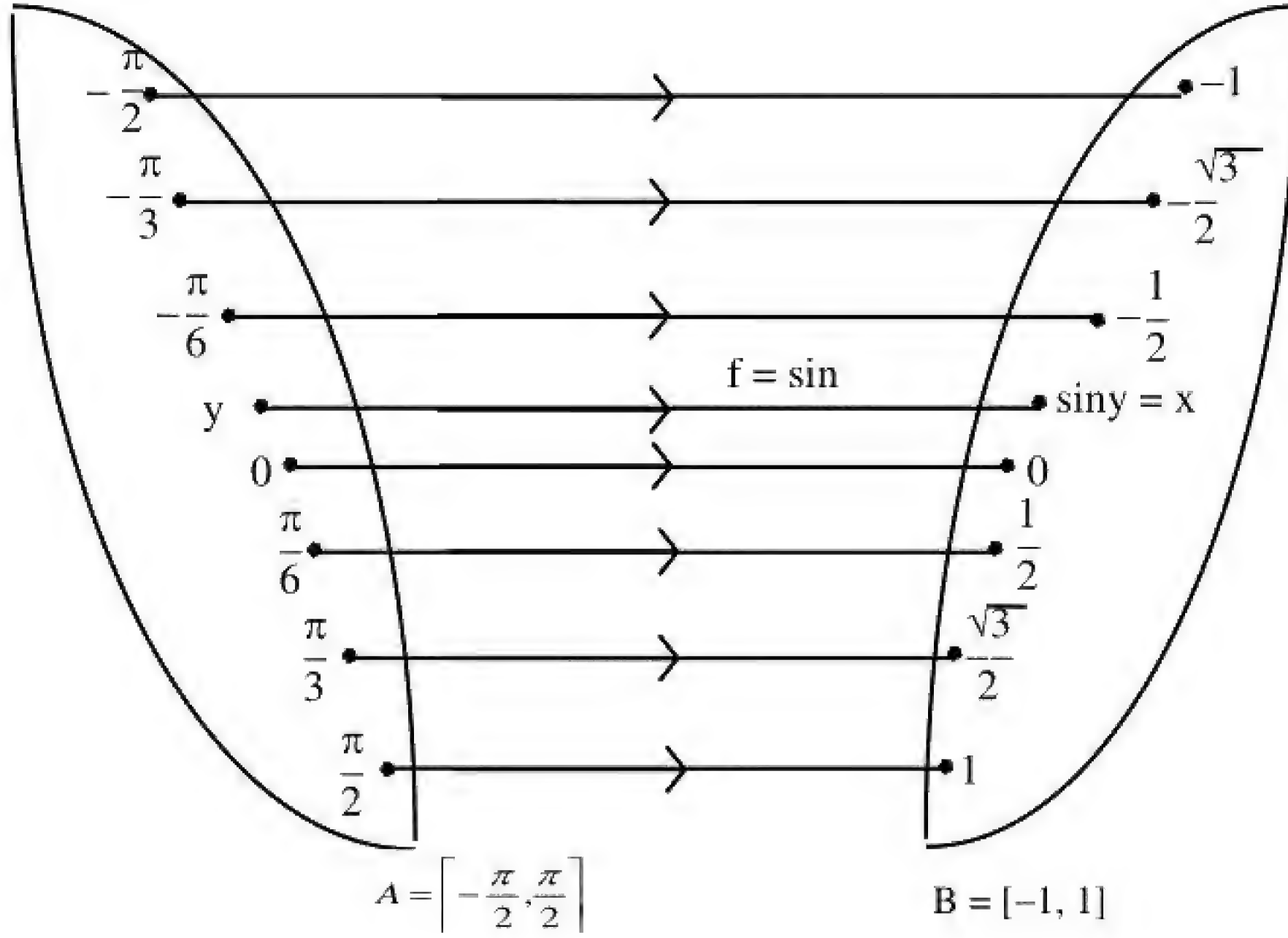
$$f^{(n)}(x)=2^n \sin(2x+n\frac{\pi}{2}) \Leftarrow$$

$$\Leftarrow f''(x)=19.20x^{18} \Leftarrow f'(x)=20x^{19} \Leftarrow f(x)=x^{20} \quad (٦)$$

$$f^{(21)}(x)=0 \Leftarrow f^{(20)}(x)=20!x^0=20! \Leftarrow f^{(3)}(x)=18.19.20x^{17}$$

(٦, ٩) الدوال المثلثية العكسية
The Inverse Trigonometric Functions

(أ) دالة الجيب العكسية \sin^{-1} (The inverse sine function)



شكل (٦, ٧).

$$\sin = f : y \mapsto x = \sin y$$

$$\frac{\pi}{2} \geq y \geq -\frac{\pi}{2}$$

تأمل في دالة الجيب \sin تجد أن كل زاوية تنتمي للمجموعة A يقابلها عدد وحيد ينتمي للمجموعة B ، وبالعكس كل عدد x ينتمي للمجموعة B يوافق زاوية وحيدة تنتمي للمجموعة A . إذن هذه الدالة تقبل دالة عكسية نسميها بدالة الجيب العكسية ونرمز لها بالرمز \sin^{-1} ، إذن:

$$f^{-1} = \sin^{-1} : x \mapsto y = \sin^{-1} x$$

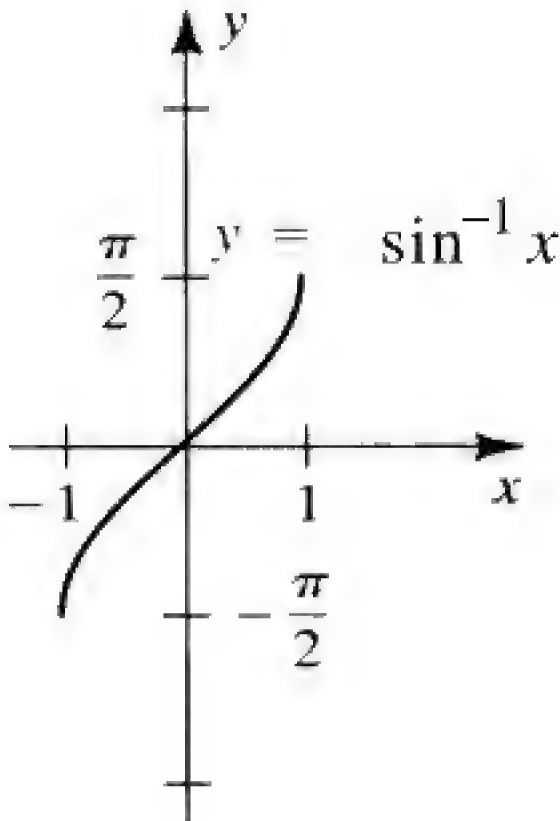
(٦, ١٤)

$$x = \sin y \Leftrightarrow y = \sin^{-1} x$$
$$\frac{\pi}{2} \geq y \geq -\frac{\pi}{2} \quad \text{حيث}$$

باختصار:

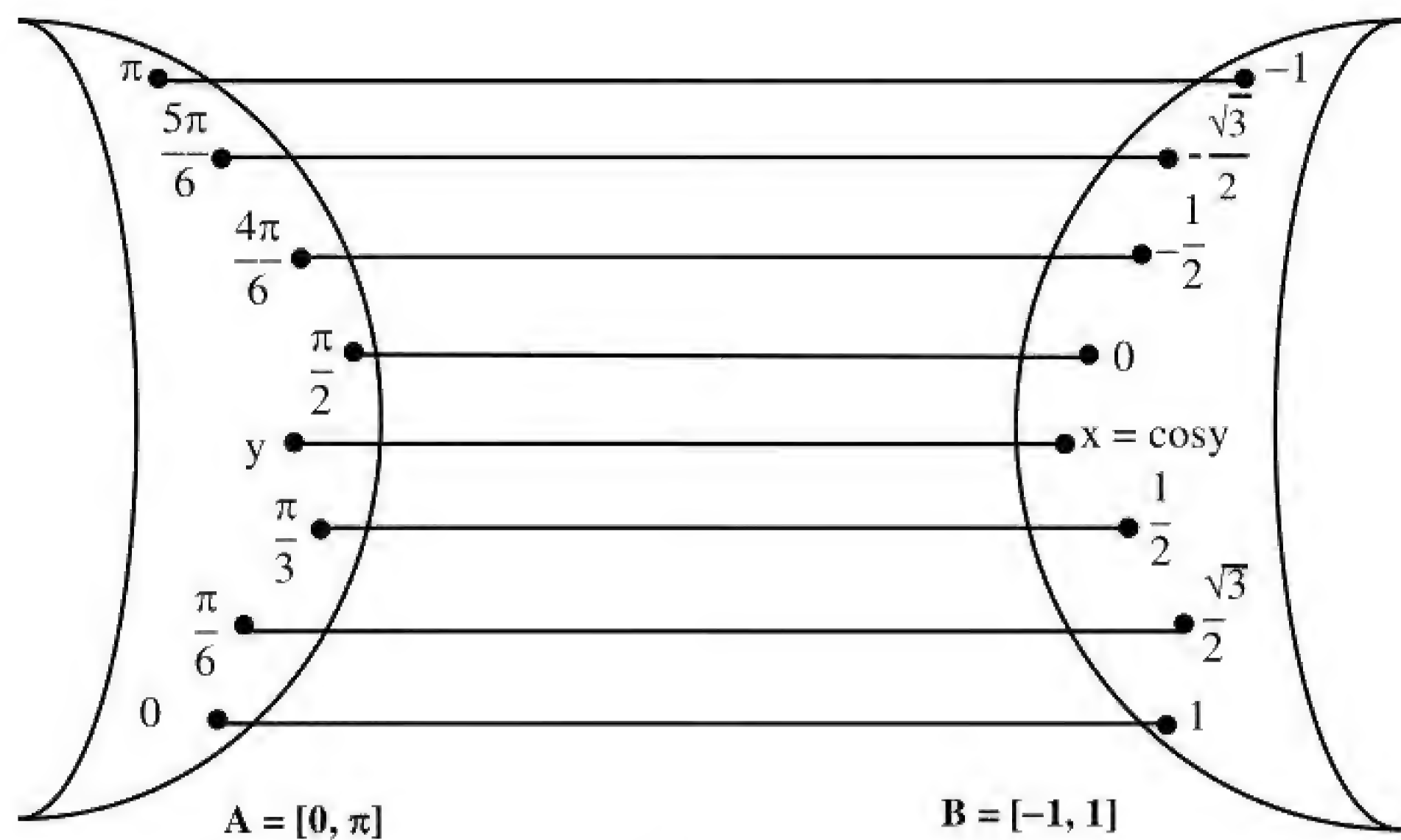
فمثلاً: $\sin^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{2}, \sin^{-1}(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{\pi}{3}, \dots, \sin^{-1} 1 = \frac{\pi}{2}$
(شكل (٦, ٧)).

مجال الدالة: $[-1, 1]$
مداهها: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



شكل (٦, ٨).

(ب) دالة جيب التمام العكسية \cos^{-1} (The inverse cosine function)



شكل (٩, ٦).

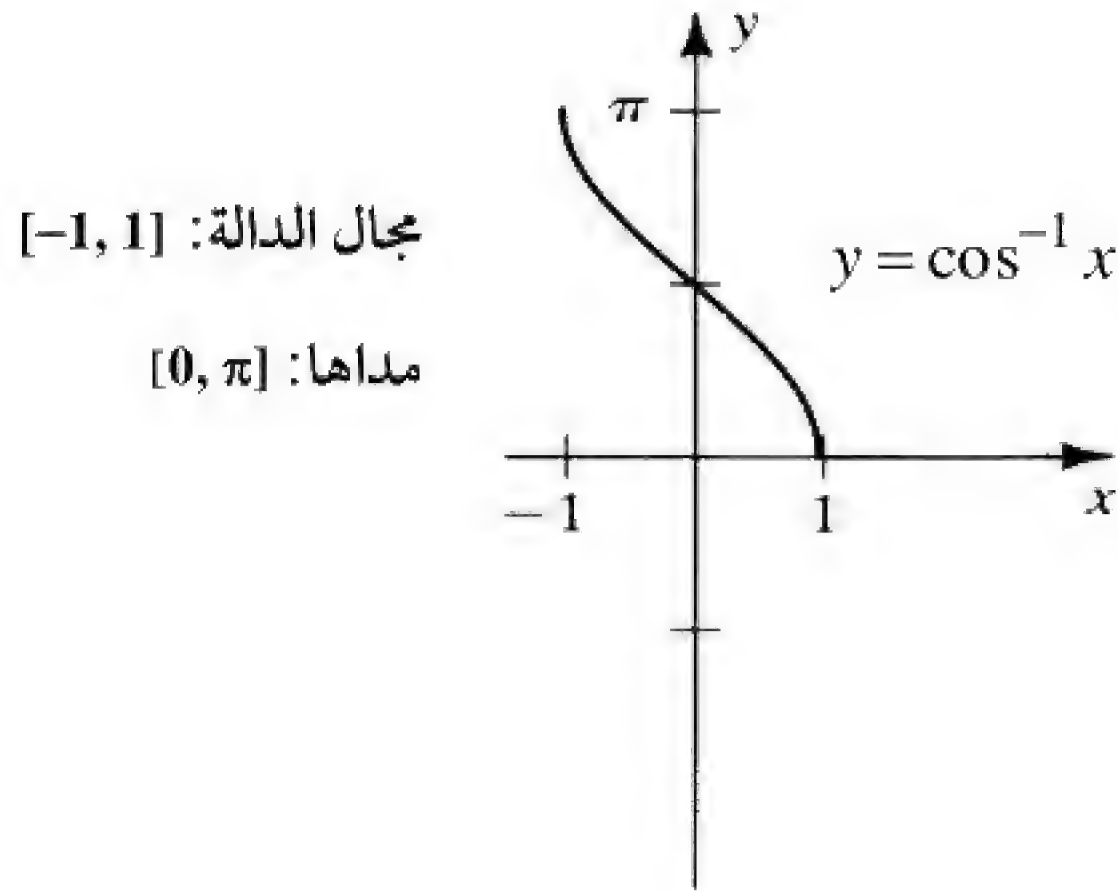
$$\cos = f: y \mapsto x = \cos y$$
$$\pi \geq y \geq 0$$

بالأسلوب نفسه الذي وجدناه عند دراسة دالة الجيب العكسية، نجد هنا:

(١٥, ٦)

$$\begin{cases} x = \cos y \Leftrightarrow y = \cos^{-1} x \\ \pi \geq y \geq 0 \end{cases}$$

نسمي الدالة \cos^{-1} بدالة جيب التمام العكسية.



شكل (١٠, ٦).

نظرية (١١, ٦)

(١) إذا كانت $y = f(x) = \sin^{-1} x$ حيث: $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ ، فإن:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(٢) إذا كانت $y = f(x) = \cos^{-1} x$ حيث: $0 < y < \pi$ ، فإن:

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

البرهان

(٦, ١٦)

$$x = \sin y \Leftrightarrow y = \sin^{-1} x$$

(١)

$$\left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$$

لنشتق طرفي المساواة في (٦, ١٦) بالنسبة للمتغير x ، فنجد:

$$1 = \cos y y'$$

(٦, ١٧)

$$y' = \frac{1}{\cos y}$$

ومنه:

واستناداً إلى العلاقة (٦, ١٦)، وللمتطابقة: $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$ ، نجد $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y = 1 - x^2$

(بالاستفادة من (٦, ١٦))، وبما أن:

$\cos y > 0$ لأن $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ ، فإن:

$$\cos y = \sqrt{1-x^2}$$

بالتعويض في العلاقة (١٧, ٦)، نجد:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(٢) برهان هذه الفقرة مشابه تمامًا لبرهان الفقرة (١) ونتركه كتمرين للقارئ.

مثال (١٥, ٦)

أوجد قيم المقادير التالية:

$$\sin[\cos^{-1}(-\frac{\sqrt{3}}{2})] \quad (١)$$

$$\sin(2\cos^{-1}\frac{4}{5}) , \cos(2\sin^{-1}\frac{3}{5}) \quad (٢)$$

$$\sin(\cos^{-1}\frac{1}{3} + \sin^{-1}\frac{1}{5}) \quad (٣)$$

الحل

(١) نضع $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \cos^{-1}(-\frac{\sqrt{3}}{2})$ لكن فترة تعريف x هي: $\pi \geq x \geq 0$ فالزاوية تقع في الربع الثاني. إذن:

$$\sin x > 0 \text{ وهي تساوي: } \sin x = \frac{1}{2}$$

(من الملاحظ أن الزاوية $x = \frac{5\pi}{6}$ ، إذن:

$$(\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2})$$

(٢) نضع $\frac{3}{5} = \sin x \Leftrightarrow x = \sin^{-1}\frac{3}{5}$ والزاوية حادة.

$$\text{إذن: } \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

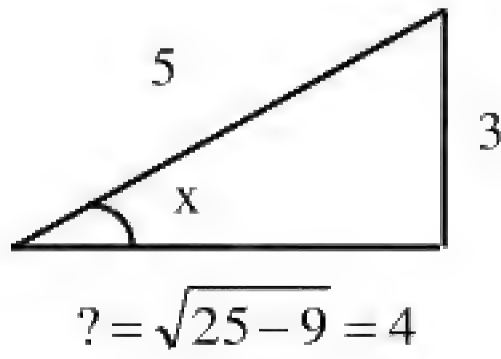
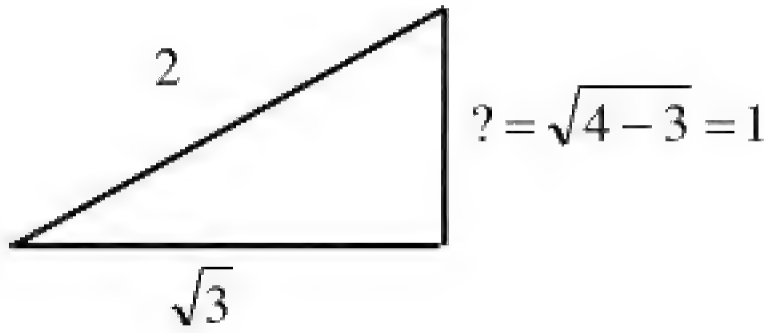
$$= (\frac{4}{5})^2 - (\frac{3}{5})^2 = \frac{7}{25}$$

$$\cos x = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \cos^{-1}\frac{4}{5} = x \text{ بالمثل: نضع}$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x = 2(\frac{3}{5})(\frac{4}{5}) = \frac{24}{25} \text{ إذن:}$$

$$\sin x = -\frac{1}{5} \Leftrightarrow x = \sin^{-1}(-\frac{1}{5}) \text{ نضع: (٣)}$$

$$\cos y = \frac{1}{3} \Leftrightarrow y = \cos^{-1}\frac{1}{3} \text{ نضع:}$$

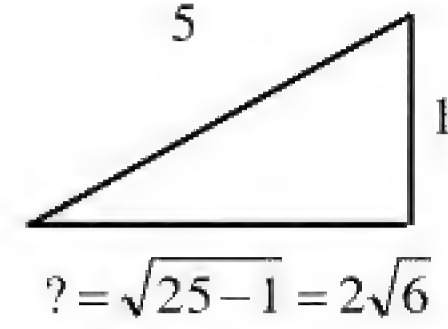
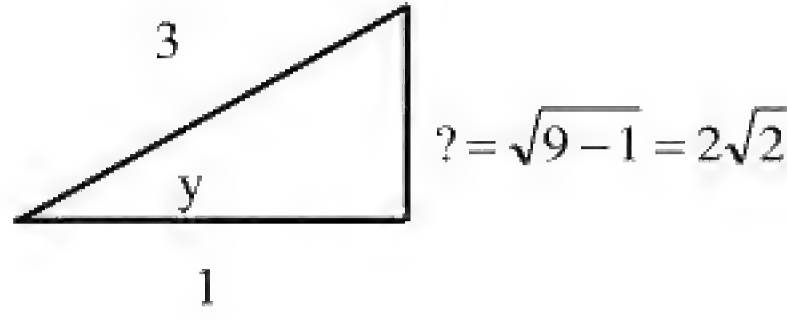


لكن: $\frac{\pi}{2} \geq x \geq -\frac{\pi}{2}$ ، $\pi \geq y \geq 0$ (من تعريف الدوال المثلثية العكسية)

إذن: x تقع في الربع الرابع، و y زاوية حادة

بالتالي: $\sin(y+x) = \sin y \cos x + \cos y \sin x$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5} + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{15}(8\sqrt{3}-1)$$



$$\cos x = \frac{2\sqrt{6}}{5} \text{ (تقع } x \text{ في الربع الرابع)، } \sin y = \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ (} y \text{ حادة).}$$

مثال (١٦، ٦)

أوجد مشتقة كل مما يأتي:

$$y = (\cos^{-1}(x-1)^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \quad (٢)$$

$$y = \sin^{-1} \sqrt{1-2x} \quad (١)$$

الحل

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{2x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-2x}} \Leftrightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-(1-2x)}} \cdot \frac{-2}{2\sqrt{1-2x}} \quad (١)$$

$$y' = \frac{3}{2} (\cos^{-1}(x-1)^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^4}} \cdot 2(x-1) \right) \quad (٢)$$

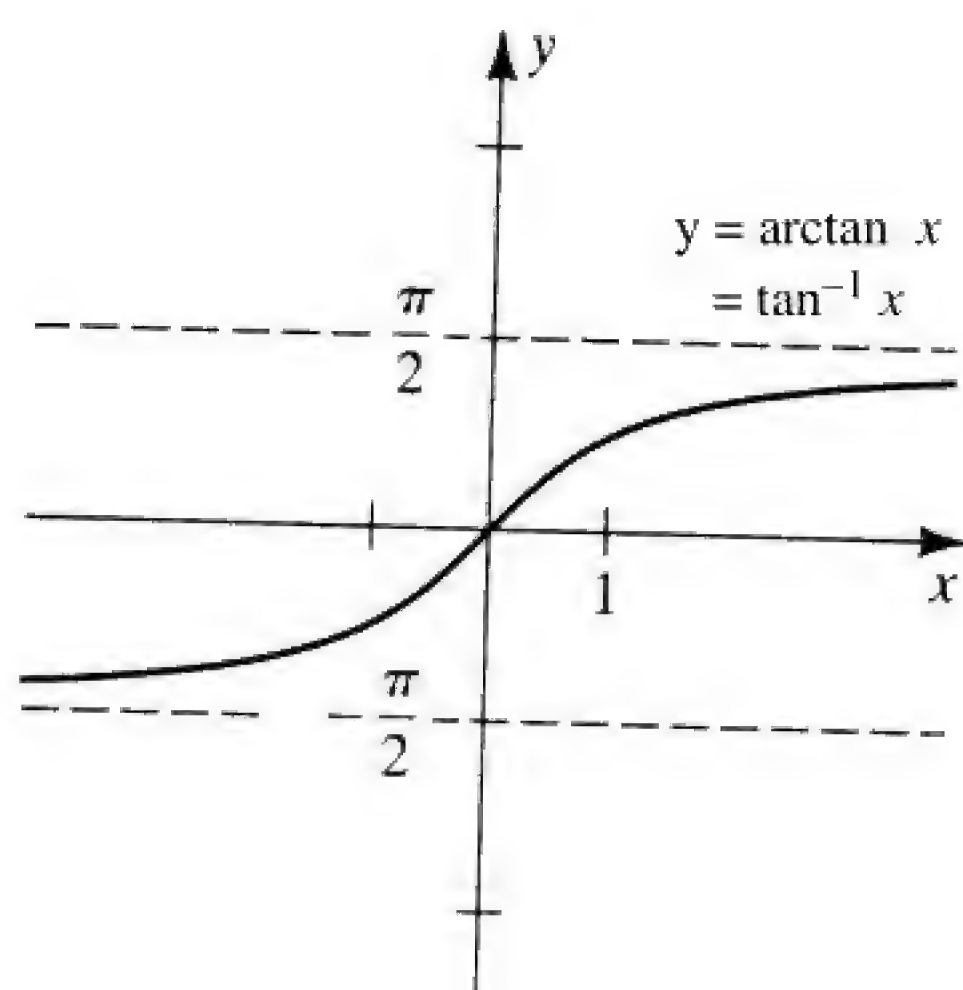
$$= -3 \frac{(\cos^{-1}(x-1)^2 + 1)^{\frac{1}{2}} (x-1)}{\sqrt{1-(x-1)^4}}$$

(ج) بالمثل نعرف دالة الظل العكسية \tan^{-1} (The inverse tangent function)

ودالة ظل التمام العكسية \cot^{-1} بالمثل (The inverse Cotangent function):

(٦, ١٨)

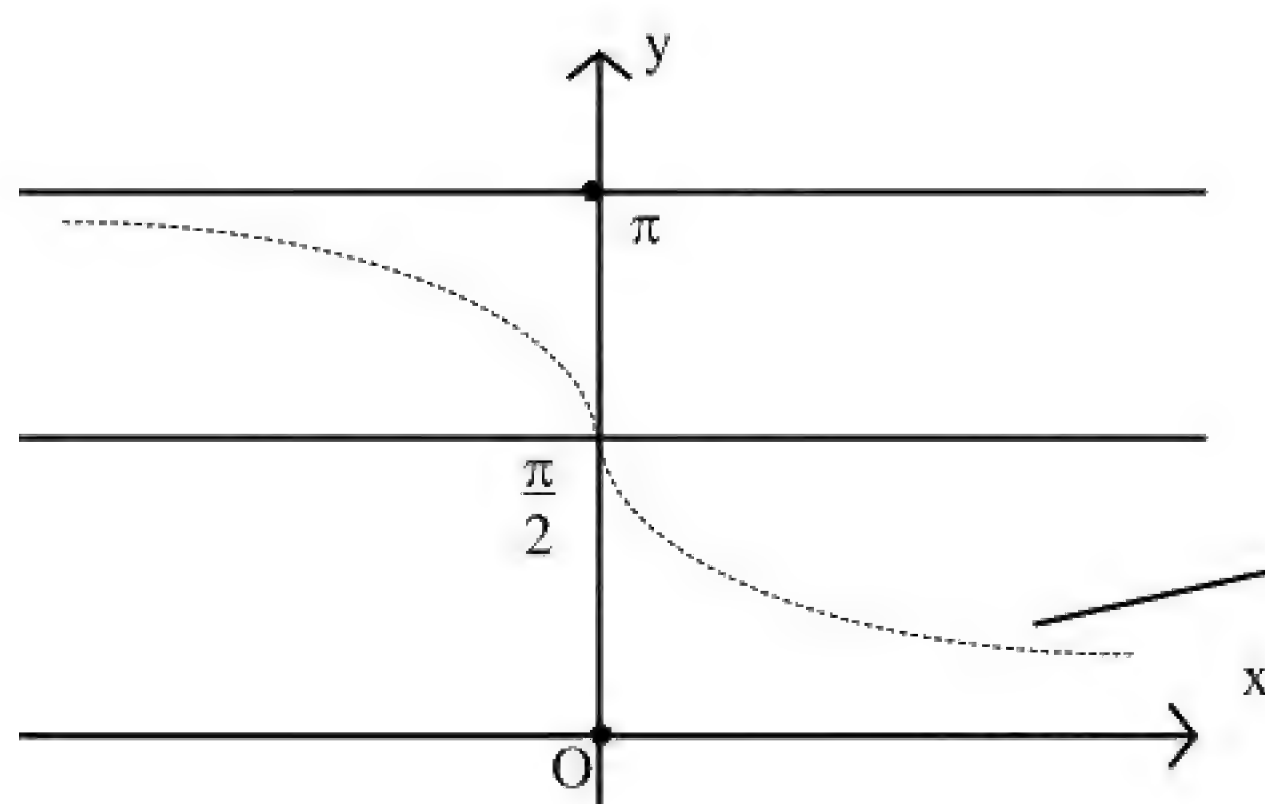
$$\begin{aligned} x = \tan y &\Leftrightarrow y = \tan^{-1} x \quad (١) \\ \text{حيث: } \frac{\pi}{2} > y > -\frac{\pi}{2} &\text{ شكل (٦, ١١)} \\ x = \cot y &\Leftrightarrow y = \cot^{-1} x \quad (٢) \\ \text{حيث } \pi > y > 0 &\text{ شكل (٦, ١٢)} \end{aligned}$$



$$y = \tan^{-1} x$$

مجال الدالة: \mathbb{R}
مداها: $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

شكل (٦, ١١).



$$y = \cot^{-1} x$$

مجال الدالة: \mathbb{R}
مداها: $(0, \pi)$

شكل (٦, ١٢).

نظرية (٦, ١٢)

$$y = \tan^{-1} x, \frac{\pi}{2} > y > -\frac{\pi}{2} \Rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2} \quad (١)$$

$$y = \cot^{-1} x, \pi > y > 0 \Rightarrow y' = -\frac{1}{1+x^2} \quad (٢)$$

البرهان

(٦, ١٩)

$x = \tan y \Leftrightarrow y = \tan^{-1} x$ (١)

لنشتق طرفي المعادلة (٦, ١٩) بالنسبة للمتغير x ، فنجد:

$$1 = \sec^2 y y' = (1 + \tan^2 y) y'$$
$$= (1 + x^2) y'$$

(استنادا للمعادلة (٦, ١٩))

$$y' = \frac{1}{1+x^2}$$
 ومنه:

(٢) بالمثل نبرهن الحالة الثانية.

(د) وأيضا نعرف دالة القاطع العكسية \sec^{-1} ودالة قاطع التمام العكسية \csc^{-1} (The inverse cosecant function) بالشكل:

$$x = \sec y \Leftrightarrow y = \sec^{-1} x \quad (١)$$

حيث: $\frac{3\pi}{2} > y \geq \pi$ و $\frac{\pi}{2} > y \geq 0$

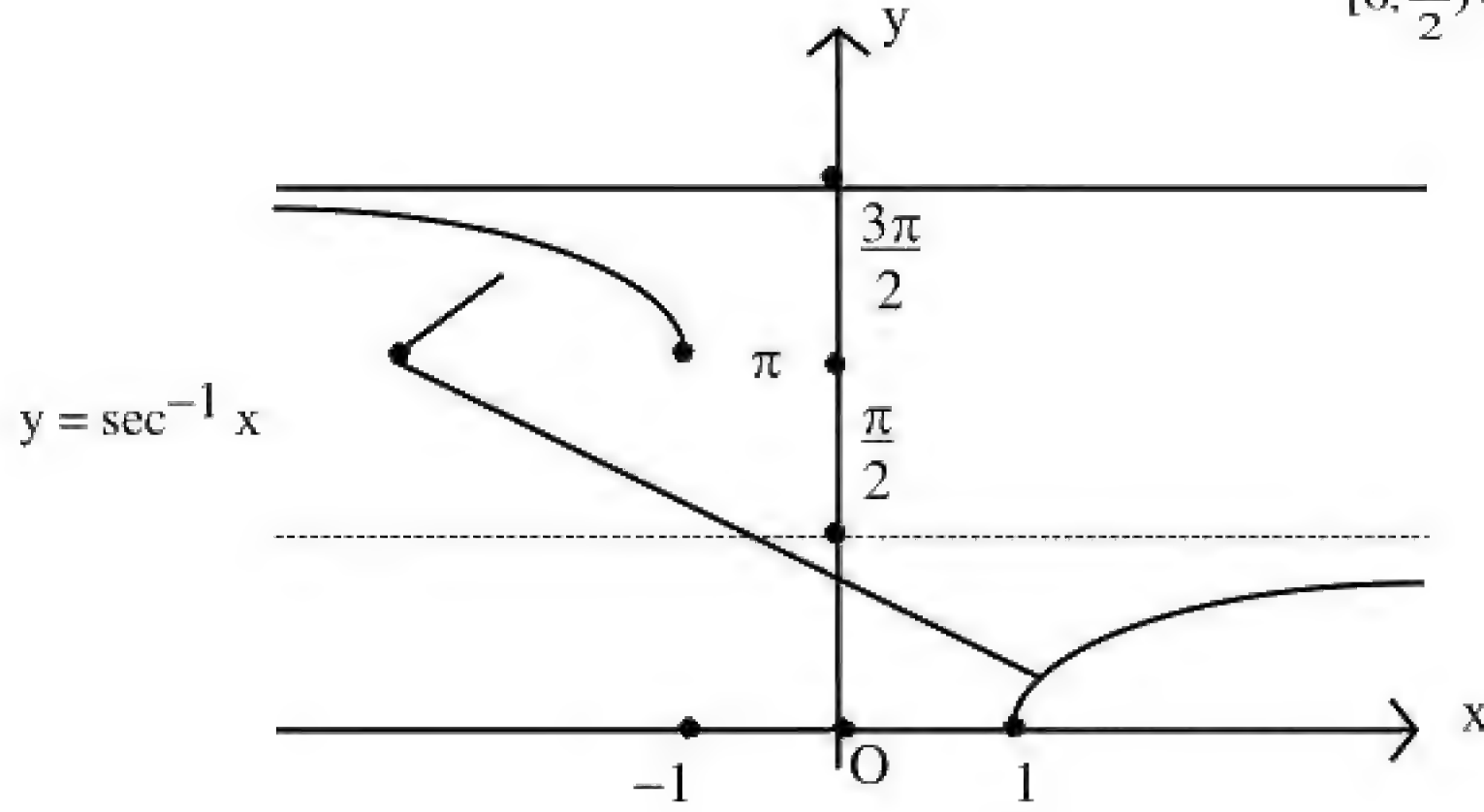
$$x = \csc y \Leftrightarrow y = \csc^{-1} x \quad (٢)$$

حيث: $\frac{3\pi}{2} \geq y > \pi$ و $\frac{\pi}{2} \geq y > 0$

(٦, ٢٠)

مجال الدالة: $\mathbb{R} - (-1, 1) = \{x : |x| \geq 1\}$

مداهها: $[0, \frac{\pi}{2}) \cup [\pi, \frac{3\pi}{2})$



شكل (٦, ١٣).

نظرية (٦, ١٣)

$$y = \sec^{-1} x \Rightarrow y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} \quad (١)$$

حيث: $\frac{3\pi}{2} > y > \pi$ و $\frac{\pi}{2} > y > 0$

$$y = \csc^{-1} x \Rightarrow y' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} \quad (٢)$$

حيث: $\frac{3\pi}{2} > y > \pi$ و $\frac{\pi}{2} > y > 0$

البرهان

لنثبت الفقرة الأولى فقط وبالمثل تُبرهن الثانية.

من الملاحظ أن:

(٦, ٢١)

$$x = \sec y \Leftrightarrow y = \sec^{-1} x$$

باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة للمتغير x ، نجد:

$$\begin{aligned}
 1 &= \sec y \tan y y' \\
 y' &= \frac{1}{\sec y \tan y} \quad \text{ومنه:} \\
 \Leftrightarrow \tan^2 y &= \sec^2 y - 1 \Leftrightarrow \sec^2 y = 1 + \tan^2 y \quad \text{لكن:} \\
 \tan y &= \pm \sqrt{\sec^2 y - 1} \quad \text{ونهمل إشارة السالب لأن } y \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\pi, \frac{3\pi}{2}) \\
 \text{إذن: } \tan y &= \sqrt{\sec^2 y - 1} = \sqrt{x^2 - 1} \quad \text{(استنادا للعلاقات (٦, ٢١)).} \\
 y' &= \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} \quad \text{ومنه: (استنادا للعلاقة (٦, ٢١) وللعلاقة (٦, ٢٢)).}
 \end{aligned}$$

مثال (٦, ١٧)

أوجد مشتقات الدوال المعرفة كالاتي:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (1 + \cot^{-1} x^2)^{\frac{3}{2}} \quad (٢) & f(x) &= x \tan^{-1} \sqrt{x} \quad (١) \\
 f(x) &= \sec^{-1} 2x - 2 \csc^{-1} 3x \quad (٤) & f(x) &= \frac{x}{\sec^{-1} x} \quad (٣)
 \end{aligned}$$

الحل

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \tan^{-1} \sqrt{x} + \frac{x}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (١) \\
 f'(x) &= \frac{3}{2} (1 + \cot^{-1} x^2)^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{1+x^4} \cdot 2x \right) \quad (٢) \\
 &= \frac{-3x(1 + \cot^{-1} x^2)^{\frac{1}{2}}}{1+x^4} \\
 f'(x) &= \left(\sec^{-1} x - \frac{x}{x\sqrt{x^2-1}} \right) \frac{1}{(\sec^{-1} x)^2} \quad (٣) \\
 &= \frac{1}{\sec^{-1} x} - \frac{1}{\sqrt{x^2-1} (\sec^{-1} x)^2} \\
 f'(x) &= \frac{2}{2x\sqrt{4x^2-1}} + 2 \cdot \frac{3}{3x\sqrt{9x^2-1}} = \frac{1}{x\sqrt{4x^2-1}} + \frac{2}{x\sqrt{9x^2-1}} \quad (٤)
 \end{aligned}$$

مثال (٦, ١٨)

أوجد مشتقات الدوال المعرفة كالاتي:

$$\begin{aligned}
 y &= \cot^{-1} \sqrt{x+1} \quad (٢) & y &= \tan^{-1} (x^2 + 1) \quad (١) \\
 y &= \csc^{-1} \left(\frac{1}{x} \right) \quad (٤) & y &= x \sec^{-1} (2x+1) \quad (٣) \\
 (1 > x > 0)
 \end{aligned}$$

الحل

$$y = \tan^{-1}(x^2 + 1) \Rightarrow y' = \frac{2x}{1 + (x^2 + 1)^2} \quad (١)$$

$$y = \cot^{-1} \sqrt{x+1} \Rightarrow y' = \frac{-1}{1+x+1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \quad (٢)$$

$$= \frac{-1}{2+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$y = x \sec^{-1}(2x+1) \quad (٣)$$

$$y' = \sec^{-1}(2x+1) + x \frac{2}{(2x+1)\sqrt{(2x+1)^2 - 1}}$$

$$y = \csc^{-1} \frac{1}{x} \Rightarrow y' = -\frac{1}{\frac{1}{x} \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \quad (٤)$$

$$= \frac{1}{x \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}} = \frac{|x|}{x \sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

(لأن $1 > x > 0$)

طريقة ثانية:

$$y = \csc^{-1} \frac{1}{x} \Rightarrow \csc y = \frac{1}{x} \Rightarrow \sin y = x \Rightarrow y = \sin^{-1} x$$

$$\text{ومنه: } (1 > x > 0) y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

مثال (١٩, ٦)

أوجد قيمة كل من:

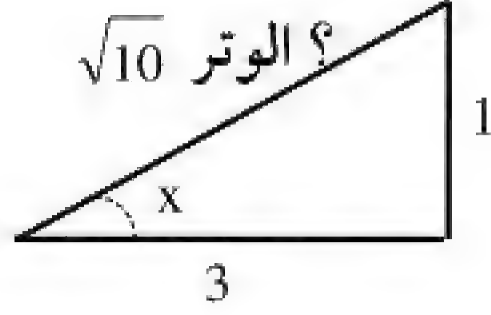
$$\sin(\sec^{-1}(-2)) \quad (٢)$$

$$\sin(\tan^{-1} \frac{1}{3}) \quad (١)$$

الحل

$$\tan x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \tan^{-1} \frac{1}{3} \quad (١)$$

(والزاوية x تقع في الربع الأول)



$$\text{ومنه: } \sin x = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\Leftrightarrow -2 = \sec x \Leftrightarrow x = \sec^{-1}(-2) \quad (٢)$$

(والزاوية تقع في الربع الثالث)

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$$

(٦, ١٠) التقريب الخطي

Linear Approximation

لنفرض أن: $p(x, f(x))$ نقطة محددة من منحنى الدالة f المعروف بالمعادلة:

$$y = f(x)$$

والمعرف على الفترة (a, b) شكل (٦, ١٤)، وأن: $Q(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ نقطة أخرى من

المنحنى قريبة من الموضع الابتدائي p ، حيث Δx التغير الذي طرأ على المتغير x . بفرض أن Δy هو التغير الذي طرأ على المتغير y ، فإن:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \quad (٦, ٢٣)$$

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند x ، فإن:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

هذا يعني أن $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ قريب جداً من $f'(x)$ عندما يكون $|\Delta x|$ صغيراً جداً.

إذن: $f'(x) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$ عندما يكون $|\Delta x|$ صغيراً جداً.

ومنه نحصل على الصيغ المتكافئة الآتية:

$$\Delta y \approx f'(x) \Delta x$$

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x) \Delta x$$

(٦, ٢٤)

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \Delta x$$

($|\Delta x|$ صغير جداً)

تعريف (٦, ٤)

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند x ، فإن تفاضل هذه الدالة عند x يُرمز له بالرمز dy ويُعرّف بالصيغة التالية:

(٦, ٢٥)
$$dy = f'(x)\Delta x$$

تكتب الصيغة (٦, ٢٤) بالشكل:

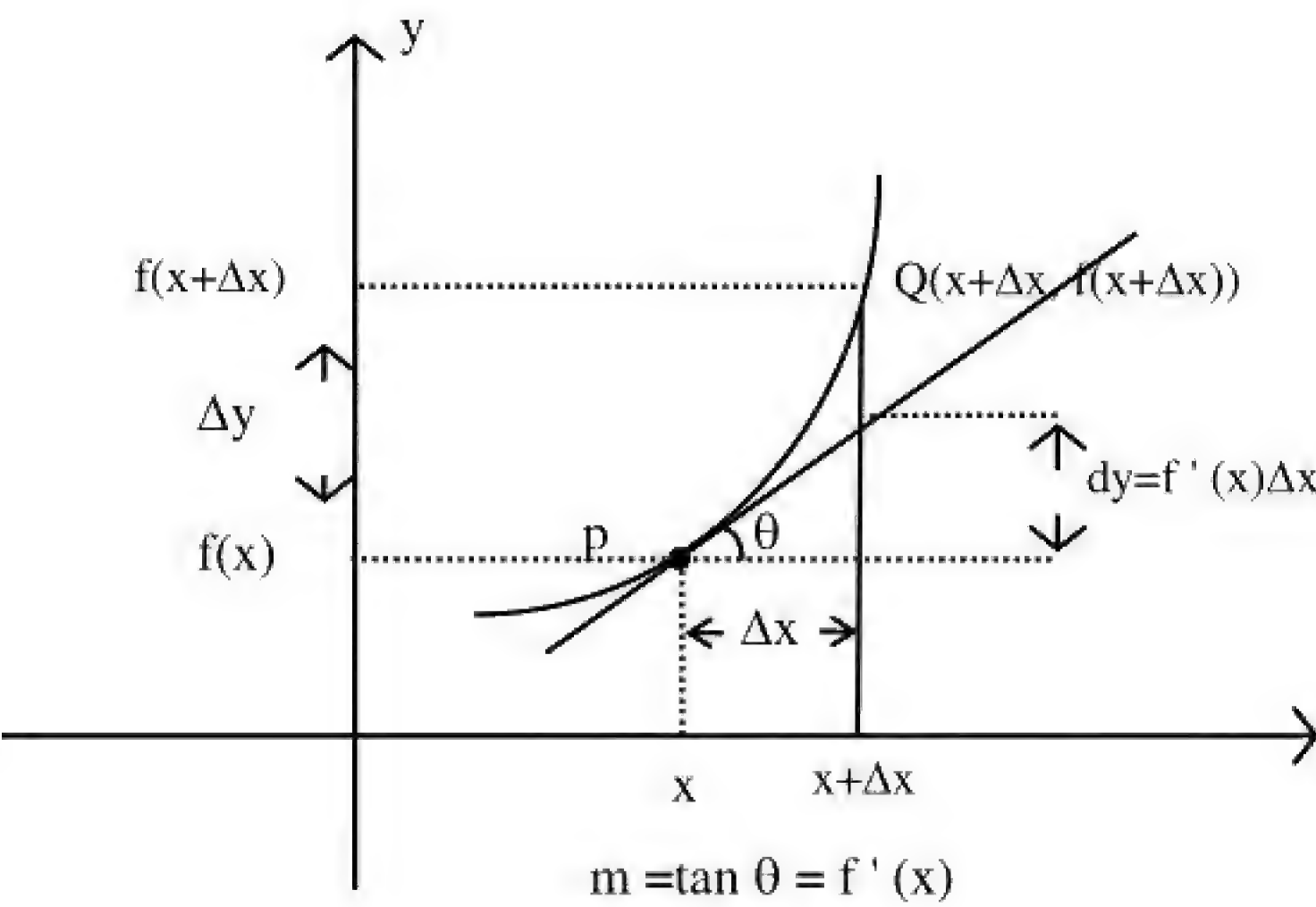
$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy$$

($|\Delta x|$ صغير جدًا)

المقدار:

(٦, ٢٦)
$$L(x) = f(x) + dy$$

نسميه بالتقريب الخطي للمقدار: $f(x + \Delta x)$ (عندما يكون $|\Delta x|$ صغيرًا جدًا).



شكل (٦, ١٤).

مثال (١٩, ٦)

إذا كانت f دالة معرفة بالشكل: $f(x) = x^3$ ، فأجب عما يأتي:(١) أوجد: dy ، Δy (٢) إذا تغيرت x من القيمة 1 إلى القيمة 1.1 ، فأوجد: dy ، Δy ، وتقريبًا خطيًا للمقدار $f(1.1)$.

الحل

$$dy = f'(x)\Delta x = 3x^2\Delta x \quad (١)$$

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^3 - x^3 \\ &= x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3 \\ &= 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 \\ &= \Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2) \end{aligned}$$

$$(٢) \Delta x = 1.1 - 1 = 0.1 ، إذن:$$

$$dy = 3(1)^2(0.1) = 0.3$$

$$\Delta y = 0.1(3 + 0.3 + 0.01) = 0.1(3.31) = 0.331$$

$$f(1.1) \approx L(1) = f(1) + dy = 1 + 0.3 = 1.3$$

مثال (٢٠, ٦)

بالاستفادة من الدالة f المعرفة بالمعادلة:

$$y = f(x) = \sqrt{x}$$

أوجد قيمًا تقريبية للأعداد:

$$\sqrt{3.9}, \sqrt{4.1}$$

قارن ما تحصل عليه بما تجده من قيم لهذه الأعداد باستخدام الآلة الحاسبة.

الحل

لنغير x من القيمة 4 إلى القيمة 4.1 ، فنجد: $\Delta x = 0.1$

وباستخدام العلاقة (٢٦, ٦) ، نجد:

$$\begin{aligned}
 f(4.1) &\approx f(4) + f'(4)(0.1) \\
 &\approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(0.1) \\
 &\approx 2 + \frac{0.1}{4} = 2 + 0.025 \\
 &\approx 2.025
 \end{aligned}$$

وباستخدام الآلة الحاسبة، نجد: $\sqrt{4.1} \approx 2.0248456$ وأيضًا:

$$\begin{aligned}
 f(3.9) &\approx f(4) + f'(4)(-0.1) \\
 &\approx 2 - 0.025 \\
 &\approx 1.975
 \end{aligned}$$

وباستخدام الآلة الحاسبة، نجد: $\sqrt{3.9} \approx 1.9748417$

مثال (٦, ٢١)

استفد من الدالة f المعرفة بالمعادلة: $y = f(x) = \sin 2x$ لإيجاد قيمة تقريبية للمقدار: $f(0.01)$.

الحل

$$\begin{aligned}
 f(0.01) &\approx f(0) + 2\cos 0(0.01) \\
 &\approx 0.02
 \end{aligned}$$

نتيجة (٦, ٣)

من العلاقة (٦, ٢٥) نجد أن تفاضل المتغير (المستقل) x ، هو:

$$dx = \Delta x$$

إذن، تكتب العلاقة (٦, ٢٥) على الشكل:

$$dy = f'(x)dx$$

هذا يعني أن تفاضل الدالة f المعرفة بالقاعدة:

$$y = f(x)$$

عند x يساوي مشتقة الدالة عند x مضروبًا بتفاضل المتغير (المستقل) x .
ومنه، فإن:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

فمشتقة الدالة f عند x تساوي قسمة تفاضل الدالة عند x على تفاضل المتغير (المستقل) x .

(٦, ١١) طريقة نيوتن لإيجاد الجذور التقريبية للدوال

تأمل الدالة التالية:

$$f(x) = x^3 + x - 1$$

تجد أن f متصلة على \mathbb{R} وأن: $f(0) = -1, f(1) = 1$

حسب نظرية القيمة الوسطى، يوجد جذر c لهذه الدالة يحقق الشرط: $1 > c > 0$.

يتضح من بيان الدالة f أن هذا الجذر وحيد شكل

(٦, ١٥). لنختار العدد $x_1 = \frac{1}{2}$ منتصف الفترة $(0, 1)$

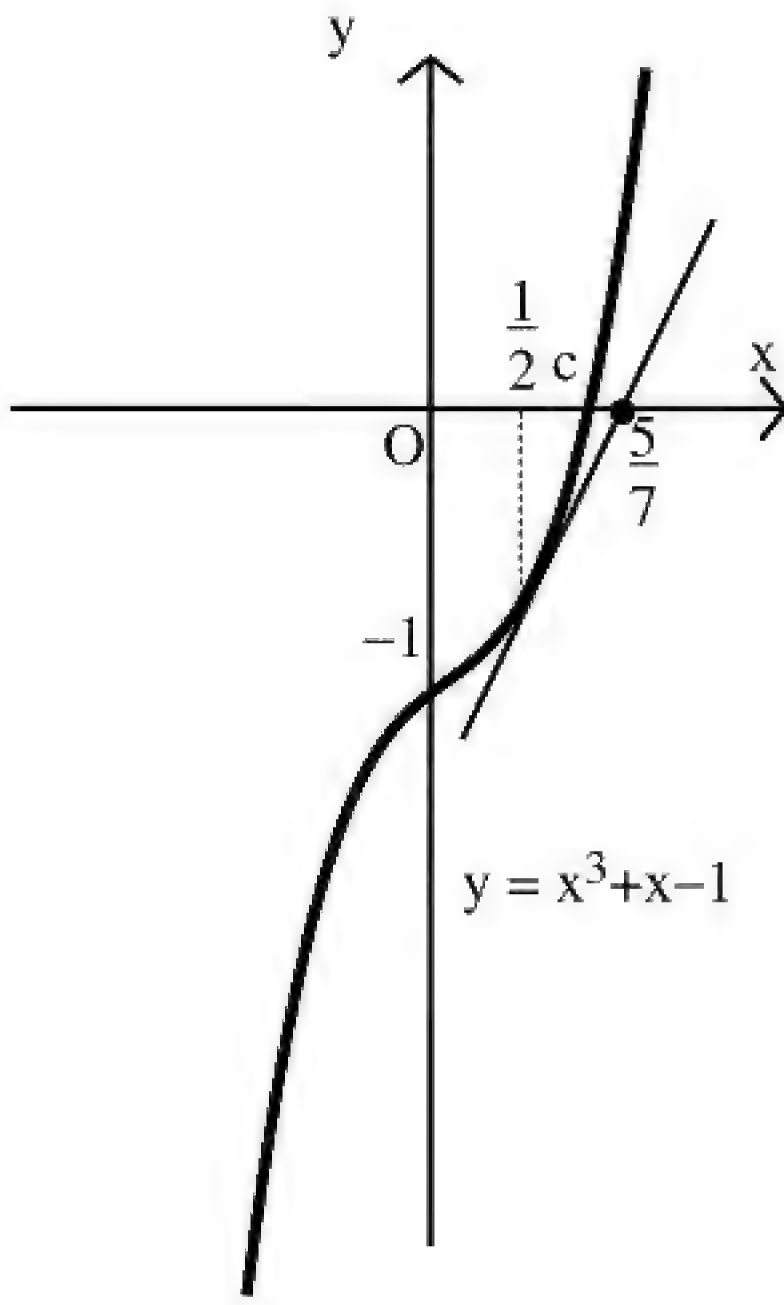
كتقريب أول لهذا الجذر، ولنكتب معادلة المماس لمنحني الدالة عند النقطة $(x_1, f(x_1))$ ، فنجد:

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \quad \text{وبافتراض } x_2$$

هو الإحداثي السيني لنقطة تقاطع هذا المماس مع المحور x ، فإن:

$$0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1) \quad \text{ومنه:}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, \quad f'(x_1) \neq 0 \quad (٦, ٢٦)$$



شكل (٦, ١٥).

وبما أن: $f'(x) = 3x^2 + 1$ ، فإن:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{8}, \quad f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4}$$

وحسب (٦, ٢٦)، نجد:

$$x_2 = \frac{1}{2} - \frac{-\frac{3}{8}}{\frac{7}{4}} = \frac{5}{7} \approx 0.7142857$$

لنعتبر x_2 كتقريب ثان للجذر c ، ولنكتب من جديد معادلة المماس للمنحني عند النقطة $(x_2, f(x_2))$ ، فنجد:

$$y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2)$$

إن الإحداثي السيني لنقطة تقاطع هذا المستقيم مع المحور x هو:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}, f'(x_2) \neq 0 \quad (٦, ٢٧)$$

لنعتبر x_3 تقريبًا جديدًا ولتتابع بنفس الأسلوب، فنجد:

(٦, ٢٨)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, f'(x_n) \neq 0$$

وهكذا، فإن:

$$x_3 = \frac{5}{7} - \frac{\left(\frac{5}{7}\right)^3 + \frac{5}{7} - 1}{3\left(\frac{5}{7}\right)^2 + 1} = \frac{593}{868} \approx 0.6831797$$

$$x_4 = x_3 - \frac{(x_3)^3 + x_3 - 1}{3(x_3)^2 + 1} \approx 0.6823285$$

$$x_5 = x_4 - \frac{(x_4)^3 + x_4 - 1}{3(x_4)^2 + 1} \approx 0.6823279$$

من الملاحظ أن: $(x_5)^3 + x_5 - 1 \approx 0.0000001$

يمكن أن نبين أنه إذا كان: $x_1 \approx c$ وكانت f'' متصلة بالقرب من c ، $f'(c) \neq 0$ ، فإن الأعداد x_2, x_3, x_4, \dots تقترب سريعًا من العدد c . من الملاحظ أن هذه الشروط محققة للدالة f دالة كثيرة حدود، $f'(x) > 0$ دومًا، x_1 قريبة من c . من جهة أخرى للحصول على جذر مقرب إلى K عدد عشري، علينا متابعة العملية السابقة حتى نحصل على تقريبين متتابعين تكون فيهما الأعداد العشرية الأولى والتي عددها K نفسها في الحالتين.

فإذا أردنا جذرًا للمعادلة مقربًا إلى رقمين عشريين فقط، نتوقف عند x_4 ونحصل على القيمة التقريبية: $c \approx 0.68$

وإن أردنا جذرًا للدالة مقربًا إلى خمسة أرقام عشرية نتوقف عند x_5 لنجد:

$$c \approx 0.68232$$

تمارين (١, ٦)

أوجد باستخدام التعريف مشتقات الدوال المعرفة كما يلي:

$$\begin{array}{ll}
 (١) & f(x) = x^2 + x + 1 \\
 (٢) & f(x) = \sqrt{x-1} \\
 (٣) & f(x) = \frac{1}{x+2} \\
 (٤) & f(x) = x^3 - 3x + 2 \\
 (٥) & f(x) = \frac{x}{3x-2} \\
 (٦) & f(x) = \sqrt{4x^2 - x} \\
 (٧) & f(x) = x + \frac{1}{x} \\
 (٨) & f(x) = x^2 + \sqrt{1-2x} \\
 (٩) & f(x) = \frac{1}{(x-3)^2} \\
 (١٠) & f(x) = x^4 + 5x
 \end{array}$$

باستخدام التعريف أوجد مشتقات الدوال المعرفة كما يلي عند النقاط المبينة إن وجدت:

$$\begin{array}{ll}
 (١١) & f(x) = |2x-3| \text{ عند } x = \frac{3}{2} \\
 (١٢) & f(x) = |x|^2 \text{ عند } x = 0 \\
 (١٣) & f(x) = \begin{cases} 8x-9, & x < 2 \\ 2x^2-1, & x \geq 2 \end{cases} \text{ عند } x = 2 \\
 (١٤) & f(x) = \begin{cases} |x+1|-1, & x < 0 \\ x^2+x, & x \geq 0 \end{cases} \text{ عند } x = 0 \\
 (١٥) & f(x) = \begin{cases} ax^2+b, & x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases} \text{ إذا كان: } a, b \text{ قيم } \text{فحدد قيم } a, b \text{ التي تجعل الدالة } f \text{ قابلة للاشتقاق عند } x = 1
 \end{array}$$

(١٦) ادرس قابلية الاشتقاق للدوال المعرفة كما يلي عند النقاط المرافقة:

$$\begin{array}{ll}
 (أ) & f(x) = |\sin x| \text{ عند } x = \pi \\
 (ب) & f(x) = \begin{cases} 3x+6, & x < 1 \\ x-4, & x \geq 1 \end{cases} \text{ عند } x = 1 \\
 (ج) & f(x) = \begin{cases} x+x^2, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases} \text{ عند } x = 0 \\
 (د) & f(x) = \begin{cases} 3-x^2, & x \leq 1 \\ \frac{2}{x}, & x > 1 \end{cases} \text{ عند } x = 1
 \end{array}$$

أوجد مشتقات الدوال المعرفة كما يلي (دون استخدام قاعدة السلسلة):

$$f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (١٨)$$

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 \quad (١٧)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x} \quad (٢٠)$$

$$f(x) = (2x - 3)^2 \quad (١٩)$$

$$f(x) = \frac{1}{(x-3)(x-4)} \quad (٢٢)$$

$$f(x) = x(x-1)^2 \quad (٢١)$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 3} \quad (٢٤)$$

$$f(x) = x^4 + \frac{1}{\sqrt[4]{x}} + 1 \quad (٢٣)$$

$$f(x) = (3 + x^5)(x^3 + 2) \quad (٢٦)$$

$$f(x) = (x^{-3} + x^2)(\sqrt{x} + 5)^2 \quad (٢٥)$$

$$f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} \quad (٢٨)$$

$$f(x) = \frac{(x^4 + x^5)(x^2 + 7)}{(x^2 + x)} \quad (٢٧)$$

(٢٩) أوجد ميل المماس للمنحنيات المعرفة في التمارين (١٧)، (٢٤)، (٢٦) عند: $x = 1$.

أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل من الدوال المعرفة كما يلي:

$$y = (x^2 - \sqrt{x})^3 (x^2 + 1)^2 \quad (٣١)$$

$$y = (2x^3 + 3x)^5 \quad (٣٠)$$

$$y = [\sqrt{x} + (x^2 - 1)^3]^4 \quad (٣٣)$$

$$y = \frac{x^2 + \sqrt{2x-1}}{(x^2 + 1)^2} \quad (٣٢)$$

$$x^3 + y^3 = 1 \quad (٣٥)$$

$$\sqrt{xy} = 2\sqrt{y} - 2x \quad (٣٤)$$

$$x^3y + y^3x + xy = 3 \quad (٣٧)$$

$$(x + y^2)^2 - 2xy = 2 \quad (٣٦)$$

(٣٨) أوجد ميل المماس للمنحني المعرف في التمرين (٣٤) عند النقطة (1,4) وبالمثل

للمنحنيين المعرفين في التمرينين (٣٦)، (٣٧) عند النقطة (1,1).

أوجد $\frac{dy}{dx}$ فيما يلي:

$$y = x \sin x + \cos 3x \quad (٤٠)$$

$$y = \sin 2x + \cos x \quad (٣٩)$$

$$y = \tan 3x + \cot 2x \quad (٤٢)$$

$$y = \sin x^2 + \sec x \quad (٤١)$$

$$y = \tan^3 x \quad (٤٤)$$

$$y = \sin^2 x \quad (٤٣)$$

$$y = (2 + \csc x)^3 \quad (٤٦)$$

$$y = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \quad (٤٥)$$

$$y = (\sin \sqrt{x} + \cos \sqrt{x})^3 \quad (٤٨)$$

$$y = \sin^3 x \cos^2 x \quad (٤٧)$$

$$y = \csc(\cos^2 3x) \quad (٥٠)$$

$$y = \sec[\tan(x^2 + 1)] \quad (٤٩)$$

$$x + \sin(xy + y) + \cos y^2 = 5 \quad (٥٢)$$

$$y + y \sin x + x \cos y = 3 \quad (٥١)$$

$$y = \sqrt{x + \tan 3x + 4} \quad (٥٤)$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \quad (٥٣)$$

$$y = \sqrt{\sec x + \csc x} \quad (٥٦)$$

$$y = \cot^2(3x + 1) + \sec^2(2x + 1) \quad (٥٥)$$

أوجد ميل المماس للمنحنيات المعروفة في التمارين ٥١، ٥٢، ٥٣، ٥٤ عند النقاط التالية وعلى

الترتيب: (0,3)، (4,0)، (4,4)، (0,2).

أوجد مشتقات الدوال المعروفة كما يلي:

$$y = \tan^{-1} x^2 + \cot^{-1} \frac{1}{x} \quad (٥٨)$$

$$y = \sin^{-1} 2x + \cot^{-1} 3x \quad (٥٧)$$

$$y = \tan^{-1}(3x + 2) \quad (٦٠)$$

$$y = x^2 \sec^{-1} x + \csc^{-1} 2x \quad (٥٩)$$

$$y = (\sin^{-1} 2x + \cos^{-1} 3x)^2 \quad (٦٢)$$

$$y = \sec(\csc^{-1} x) \quad (٦١)$$

أوجد $\frac{dy}{dx}$ فيما يلي:

$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} y = xy + \frac{\pi}{2} \quad (٦٤)$$

$$\sin^{-1}(xy) = y + 3 \quad (٦٣)$$

$$(1 + \cot^{-1} x^2)^2 = x^2 + y^2 \quad (٦٦)$$

$$y = \sqrt{\sec^{-1}(xy) + x} \quad (٦٥)$$

أوجد قيم المقادير التالية:

$$\cos(2\sin^{-1}(-\frac{1}{3})) \quad (٦٨)$$

$$\sin(\sin^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3}) \quad (٦٧)$$

$$\tan(\cos^{-1} \frac{1}{3} + \sin^{-1} \frac{1}{3}) \quad (٧٠)$$

$$\sin^{-1} 1 + \cos^{-1}(-1) + \tan(-1) \quad (٦٩)$$

$$\sin(2\cos^{-1}(-\frac{1}{4})) \quad (٧٢)$$

$$\sec(2\cos(-1) + \tan^{-1} 1) \quad (٧١)$$

أوجد المشتقات من الرتب الموضحة للدوال المعروفة كما يلي:

$$y = x^5 + 4x^3 + 3 \quad (٧٣) \quad \text{من جميع الرتب}$$

$$y = \frac{1}{x+1} \quad (٧٤) \quad \text{من الرتبة } n$$

$$y = \sin 3x \text{ من الرتبة } n \quad (٧٥)$$

$$y = \cos 2x \text{ من الرتبة } n \quad (٧٦)$$

$$y = x^{19} + x^{18} + 5x^3 + 1 \text{ من الرتبة } 18, 19 \quad (٧٧)$$

$$y = \sec^3 x \text{ من الرتبة الثانية} \quad (٧٨)$$

$$\text{أوجد } y'' \text{ للدوال المعروفة كما يلي:} \quad (٧٩)$$

$$(أ) \quad x^2 + y^2 = 1 \quad (ب) \quad \sqrt{x+y} + y^2 = 2 \quad (ج) \quad \sin^{-1}(xy) + y = 1$$

$$(د) \quad y = \sec^3 x \quad (هـ) \quad y = \tan^2 2x \quad (و) \quad y = \tan^{-1} x^2$$

$$(٨٠) \quad \text{إذا كان: } f'(7) = 5, \quad g(3) = 7, \quad g'(3) = 4 \text{ فأوجد: } (f \circ g)'(3)$$

$$(٨١) \quad \text{إذا كان: } g'(5) = 3, \quad g(5) = 4, \quad g'(4) = 6 \text{ فأوجد: } (g \circ g)'(5)$$

$$(٨٢) \quad \text{إذا كانت } f \text{ معرفة بالشكل:}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x > 0 \\ L, & x = 0 \\ K \tan x, & -\frac{\pi}{2} < x < 0 \end{cases}$$

فإن قيمتي K, L اللتين تجعلان f قابلة للاشتقاق عند $x = 0$ هما:

$$(أ) \quad K = 0, L = 0 \quad (ب) \quad K = 1, L = 0$$

$$(ج) \quad K = L = 1 \quad (د) \quad K = 0, L = 1$$

$$(٨٣) \quad \text{إذا كان: } x = \cos 3t, \quad y = \sin^2 t \text{ فإن } \frac{dy}{dx} \text{ عند } t = \frac{\pi}{4} \text{ تساوي:}$$

$$(أ) \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (ب) \quad \sqrt{3} \quad (ج) \quad -\frac{\sqrt{2}}{3} \quad (د) \quad \text{لا شيء مما ذكر}$$

$$\text{إرشاد: } \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \text{ حيث } \dot{y} = \frac{dy}{dt}, \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

$$(٨٤) \quad \text{أوجد } \frac{dy}{dx} \text{ إذا كان:}$$

$$x = \sin^3 t, \quad y = \cos^3 t$$

$$x = t^2 + 5t, \quad y = t^3 + t^2 + 1$$

$$\left(\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)$$

$$(٨٥) \text{ إذا كان } z = \sin 2x + x^2, \quad y = z^3 + z^2 + 1$$

فأوجد $\frac{dy}{dx}$ مستفيداً من قاعدة السلسلة $\left(\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx}\right)$.

$$(٨٦) \text{ أوجد } \frac{dy}{dx} \text{ في كل مما يلي:}$$

$$(أ) \quad y = t \cos t \quad x = t^3 + t^2$$

$$(ب) \quad y = \sin t \csc 2t \quad x = \frac{t+1}{t-1}$$

$$(ج) \quad y = \cos^2 3t \quad t = \tan 2x$$

$$(د) \quad y = \sec z^2 \quad x = z^2 + 2z + 5$$

$$(هـ) \quad z = x \cos 2x \quad y = \sin 3z$$

$$(و) \quad z = \tan^3 x \quad y = \sin^2[3(z+1)]$$

$$(٨٧) \text{ إذا كان حجم الاسطوانة معرّفًا بالصيغة:}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi x^2 y$$

وكان طول ارتفاع الأسطوانة مقداراً ثابتاً ويساوي 30 سم، فأوجد

$$\Delta V, dV \quad (١)$$

$$(٢) \text{ إذا تغيرت } x \text{ من القيمة } 7 \text{ إلى القيمة } 7.005, \text{ فأوجد تقريباً خطأً للمقدار: } V(7.005). \text{ ما هو}$$

الخطأ المرتكب في أخذ هذه القيمة.

$$(٨٨) \text{ إذا كان حجم الكرة يعطى بالصيغة:}$$

$$V = \frac{4}{3} \pi x^3$$

حيث x طول نصف قطر الكرة، فأوجد:

$$\Delta V, dV \quad (١)$$

(٢) إذا تغيرت x من القيمة 11 إلى القيمة 11.003 ، فأوجد تقريبًا خطيًا للمقدار: $V(11.003)$.
ما هو الخطأ المرتكب في أخذ هذه القيمة.

(٨٩) استعن بالدالة f المعرفة بالشكل:

$$f(x) = x^2 - n$$

حيث: $n = 3, 5, 7, 11$

لايجاد جذور الأعداد التالية:

$\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{11}$ ، مقربة إلى خمسة أرقام عشرية مطبقًا طريقة نيوتن.

(٩٠) أوجد جذور المعادلات التالية الواقعة في الفترات المرافقة:

(أ) $x^4 + x - 1 = 0, [0,1]$ مقربة إلى أربعة أرقام عشرية.

(ب) $x^3 - x^2 - 2 = 0, [1,2]$ مقربة إلى أربعة أرقام عشرية.

(ج) $x - \cos x = 0, [0, \frac{\pi}{3}]$ مقربة إلى عشرين رقمًا عشريًا.

(د) $x^4 - 100 = 0, [0,4]$ مقربة إلى ستة أرقام عشرية.

خواص الدوال القابلة للاشتقاق

THE PROPERTIES OF THE DIFFERENTIABLE FUNCTIONS

(٧, ١) القيم القصوى للدوال

تعريف (٧, ١)

لتكن f دالة معرفة على الفترة I . نقول إن الدالة f :

(١) متزايدة (Increasing) على I ، إذا تحقق التالي:

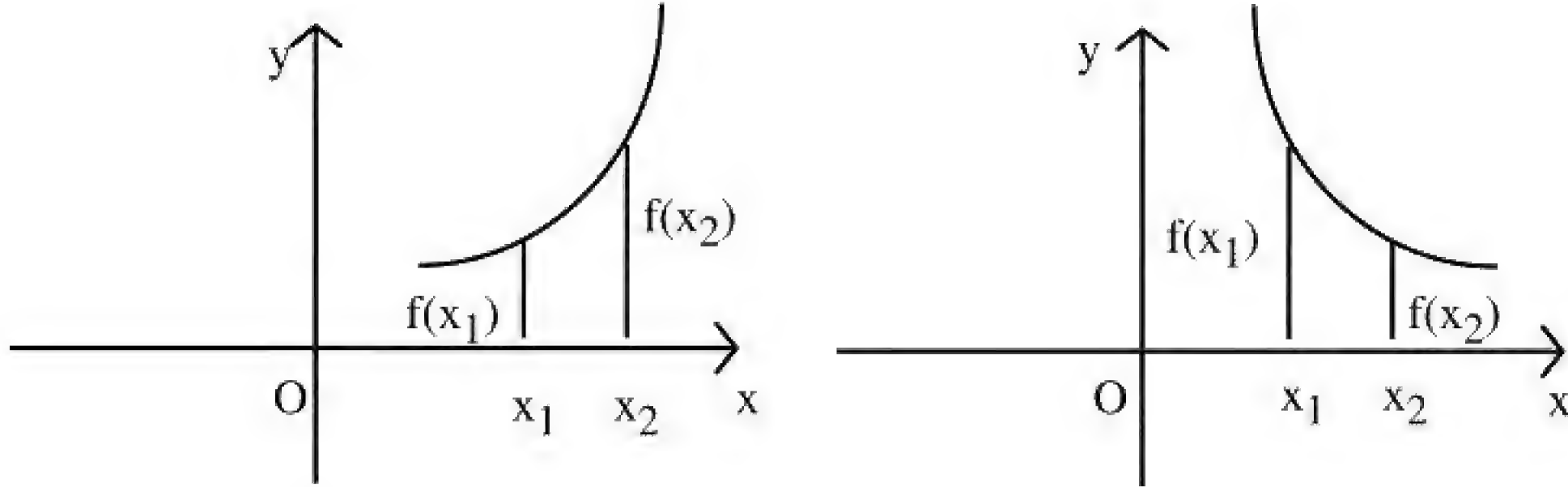
$$\forall x_1, x_2 \in I: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

(٢) متناقصة (decreasing) على I ، إذا تحقق التالي:

$$\forall x_1, x_2 \in I: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

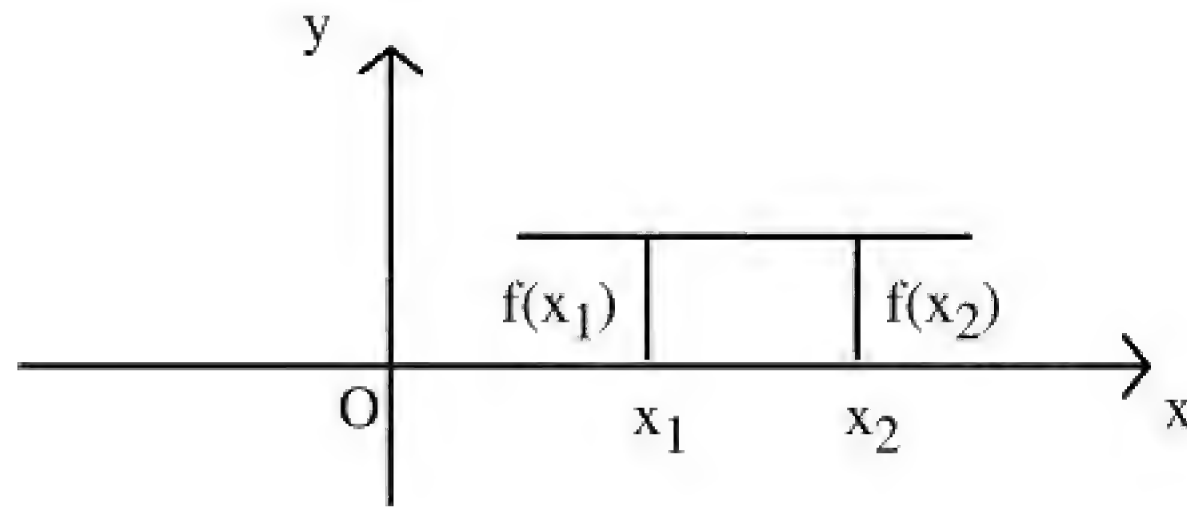
(٣) ثابتة (Constant) على I ، إذا تحقق التالي:

$$\text{لكل } x_1, x_2 \in I, \text{ فإن: } f(x_1) = f(x_2)$$



(ب) دالة متزايدة

(أ) دالة متناقصة



(ج) دالة ثابتة

شكل (١, ٧).

تعريف (٢, ٧)

نقول إن للدالة f قيمة عظمى (Maximum Value) (مطلقة) عند نقطة c من مجالها S ، إذا كان:

$f(c)$ أكبر قيمة للدالة على مجالها S ، أي أن:

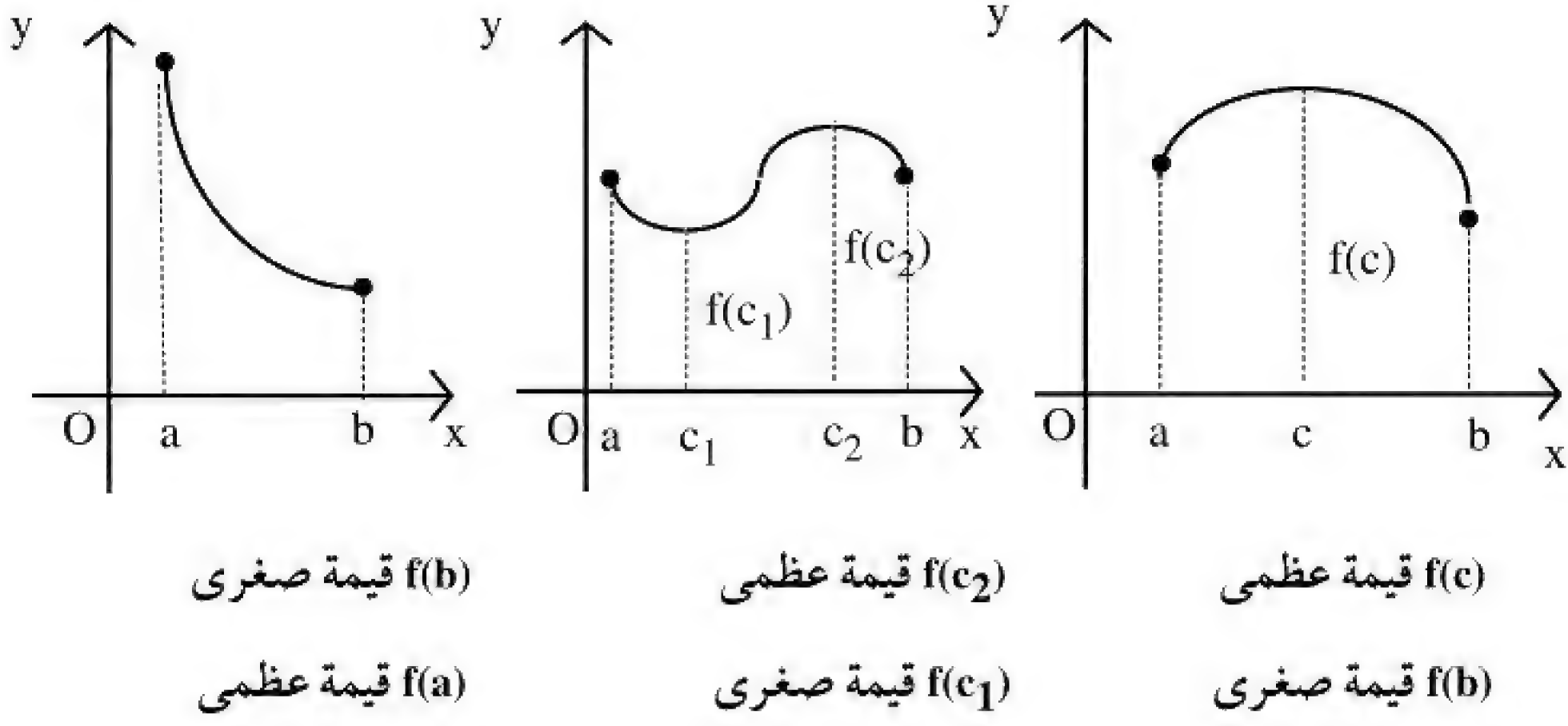
$$f(x) \leq f(c) \text{ لكل } x \in S$$

وقيمة صغرى (Minimum Value) (مطلقة)، إذا كان:

$f(c)$ أصغر قيمة للدالة على مجالها أي أن:

$$f(x) \geq f(c) \text{ لكل } x \in S$$

مثل هذه القيم تُسمى بالقيم القصوى للدالة على مجالها.



شكل (٧, ٢).

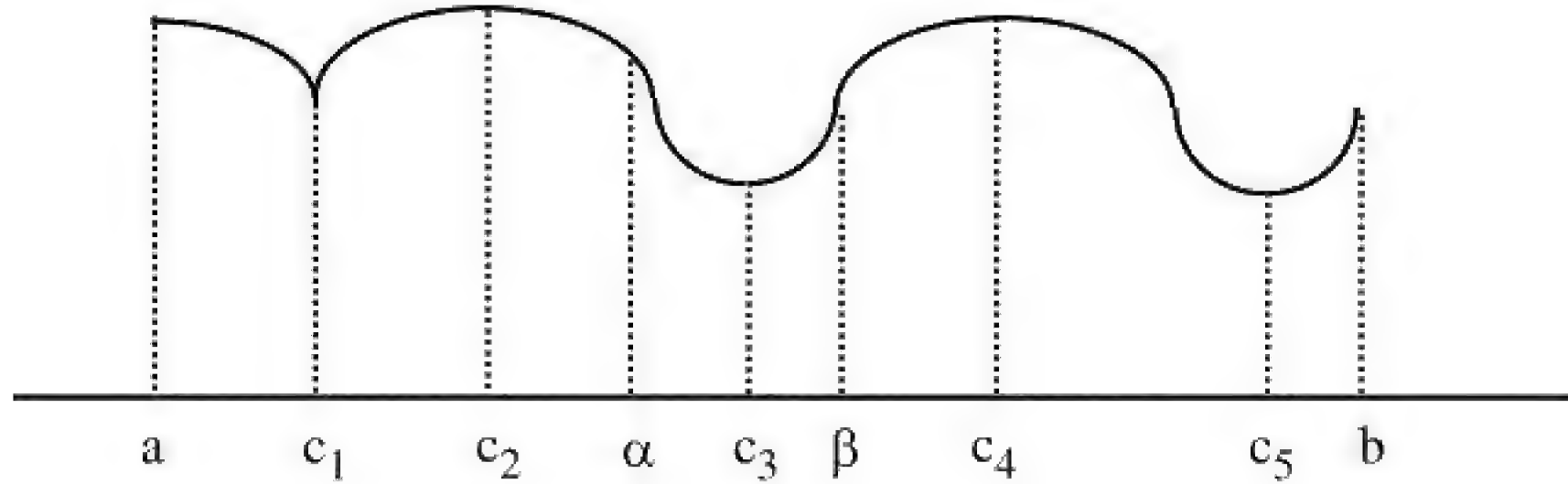
تعريف (٧, ٣)

(١) نقول إن للدالة f قيمة عظمى محلية $f(c)$ عند نقطة c من مجالها S ، إذا وجدت فترة مفتوحة $I \subset S$ تنتمي إليها النقطة c ($c \in I$)، بحيث يكون:

$$f(x) \leq f(c) \text{ لكل } x \in I$$

(٢) نقول إن للدالة f قيمة صغرى محلية $f(c)$ عند نقطة c من مجالها S ، إذا وجدت فترة مفتوحة $I \subset S$ تنتمي إليها النقطة c ($c \in I$)، بحيث يكون:

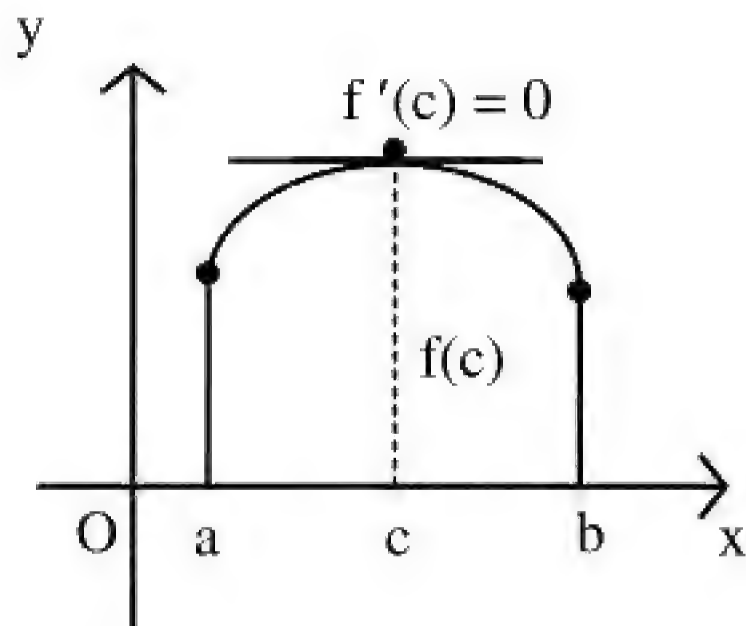
$$f(x) \geq f(c) \text{ لكل } x \in I$$



$f(c_3)$ قيمة صغرى محلية ، $I=(\alpha, \beta) \subset [a, b]$

شكل (٧, ٣).

$f(c_5)$ ، $f(c_4)$ ، $f(c_3)$ ، $f(c_2)$ ، $f(c_1)$ قيم قصوى محلية على S .
(نسمي القيم العظمى والصغرى المحلية بالقيم القصوى المحلية)



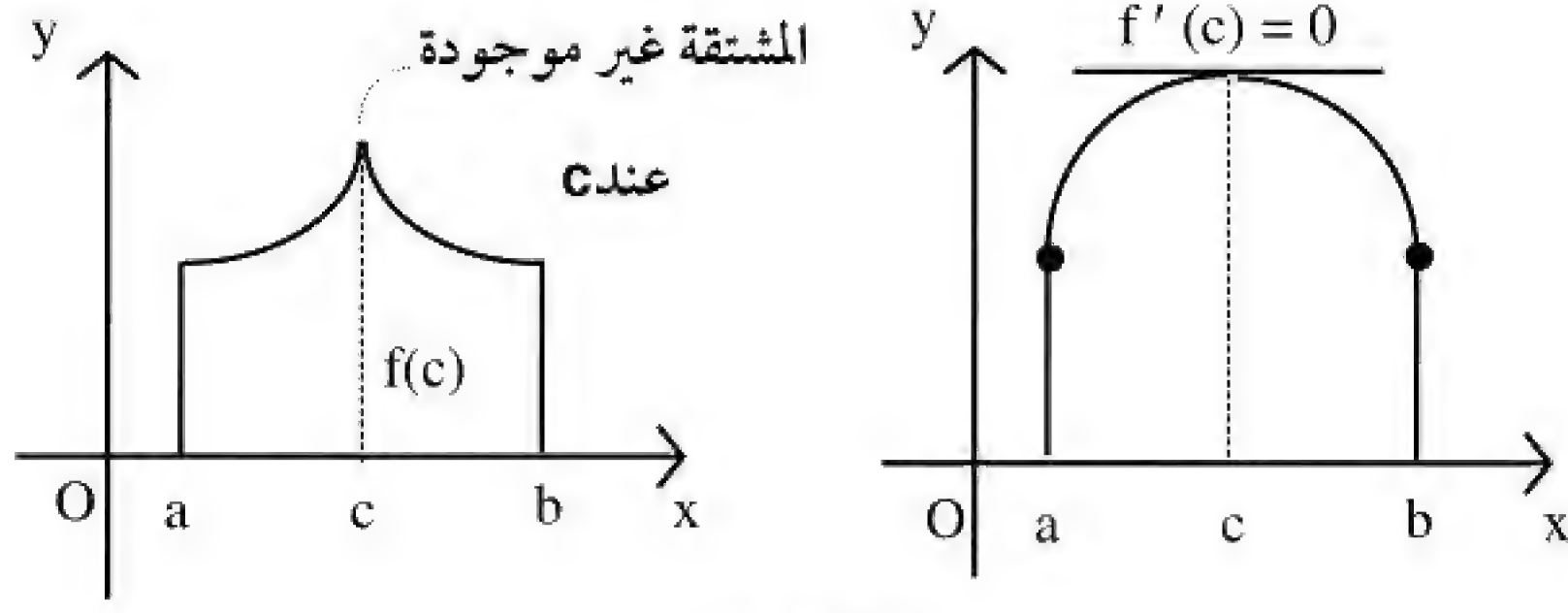
شكل (٧, ٤).

نظرية (٧, ١)

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق على فترة مفتوحة (a, b) تنتمي إليها النقطة c ، وكان للدالة قيمة قصوى محلية عند c ، فإن: $f'(c) = 0$.

نظرية (٧, ٢)

إذا كان للدالة f قيمة قصوى محلية عند النقطة c من الفترة (a, b) (المحتواة في مجال الدالة f)، فإن:
 $f'(c) = 0$ أو $f'(c)$ غير موجودة.



شكل (٥, ٧).

نتيجة (١, ٧)

إذا كانت الدالة f متصلة على فترة مغلقة $[a, b]$ وكان للدالة قيمة قصوى محلية عند نقطة $c \in (a, b)$ ، فإن: $f'(c) = 0$ أو $f'(c)$ غير موجودة.

تعريف (٤, ٧)

نقول إن العدد c من مجال الدالة f عدد حرج لهذه الدالة، إذا كانت $f'(c) = 0$ أو كانت $f'(c)$ غير موجودة.

(٢, ٧) النظرية الأساسية للاتصال

نظرية (٣, ٧) (النظرية الأساسية للاتصال)

إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$: فإن للدالة على هذه الفترة قيمة عظمى (مطلقة) M وقيمة صغرى (مطلقة) m . أي يوجد عدداً α, β ينتميان للفترة $[a, b]$ بحيث يكون:

$$m = f(\alpha) \quad , \quad M = f(\beta)$$

لإيجاد m, M :

- (١) نبحث عن الأعداد الحرجة للدالة f التي تنتمي للفترة $[a, b]$ وقيم الدالة عند هذه الأعداد.
- (٢) نحسب قيمتي الدالة عند طرفي الفترة: $f(a), f(b)$.
- (٣) نقارن بين هذه القيم فأكبرها هو M وأصغرها هو m .

مثال (١, ٧)

أوجد القيم القصوى للدوال المعروفة بمعادلاتها التالية على الفترات المرافقة:

- (١) $f(x) = x^4 - 2x^2$ $[-1, 2]$
- (٢) $f(x) = 1 + \frac{1}{2}\cos 2x$ $[0, \pi]$
- (٣) $f(x) = 3x^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}$ $[0, 1]$
- (٤) $f(x) = \tan^{-1} x^2$ $[-1, 1]$

الحل

(١) (أ) جذور المشتقة:

$$x = 0, x = \pm 1 \iff 4x(x^2 - 1) = 0 \iff f'(x) = 4x^3 - 4x = 0$$

-1	0	1	الأعداد الحرجة المنتمية للفترة $[-1, 2]$
$f(-1) = -1$	$f(0) = 0$	$f(1) = -1$	قيمة الدالة

(ب) قيمتا الدالة عند طرفي الفترة: $f(-1) = -1$, $f(2) = 8$

(ج) أكبر الأعداد: $-1, 0, 8$ هو: $M = 8$ (القيمة العظمى)

أصغر الأعداد: $-1, 0, 8$ هو: $m = -1$ (القيمة الصغرى)

(٢) (أ) جذور المشتقة:

$$x = 0, x = \frac{\pi}{2}, x = \pi \iff f'(x) = -\sin 2x = 0$$

0	$\frac{\pi}{2}$	π	الأعداد الحرجة المنتمية للفترة
$f(0) = \frac{3}{2}$	$f(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$	$f(\pi) = \frac{3}{2}$	قيمة الدالة

(ب) قيمتا الدالة عند طرفي الفترة: $f(0) = \frac{3}{2}$ ، $f(\pi) = \frac{3}{2}$

(ج) أكبر الأعداد: $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ هو: $M = \frac{3}{2}$
وأصغرها: $m = \frac{1}{2}$

(٣) (أ) جذور المشتقة: $f'(x) = x^{-\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} + x^{\frac{1}{3}}$

$$= \frac{1+x}{x^{\frac{2}{3}}} \quad \text{هي: } x = -1$$

المشتقة غير موجودة عندما: $x = 0$ (x ينتمي لمجال الدالة)

العددان الحرجان هما: $-1, 0$ ، والمنتمي للفترة $[0, 1]$ هو الصفر فقط وقيمة الدالة عند الصفر:

$$\boxed{f(0) = 0}$$

(ب) قيمتا الدالة عند طرفي الفترة: $f(1) = 3 + \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$ و $\boxed{f(0) = 0}$

(ج) أكبر الأعداد هو: $M = \frac{15}{4}$ (القيمة العظمى)

أصغر الأعداد هو: $m = 0$ (القيمة الصغرى).

(٤) (أ) جذور المشتقة: $f'(x) = \frac{1}{1+x^4} \cdot 2x = 0 \iff x = 0$ وهو ينتمي للفترة $[-1, 1]$.

$$\boxed{f(0) = \tan^{-1} 0 = 0} \quad \text{قيمة الدالة عند } x = 0 \text{ هي}$$

(ب) قيمتا الدالة عند طرفي الفترة: $f(1) = \frac{\pi}{4}$ و $f(-1) = \frac{\pi}{4}$

(ج) $M = \frac{\pi}{4}$ و $m = 0$

تمارين (١, ٧)

أوجد الأعداد الحرجة للدوال المعرفة كما يلي والواقعة داخل الفترات المرافقة، ثم أوجد

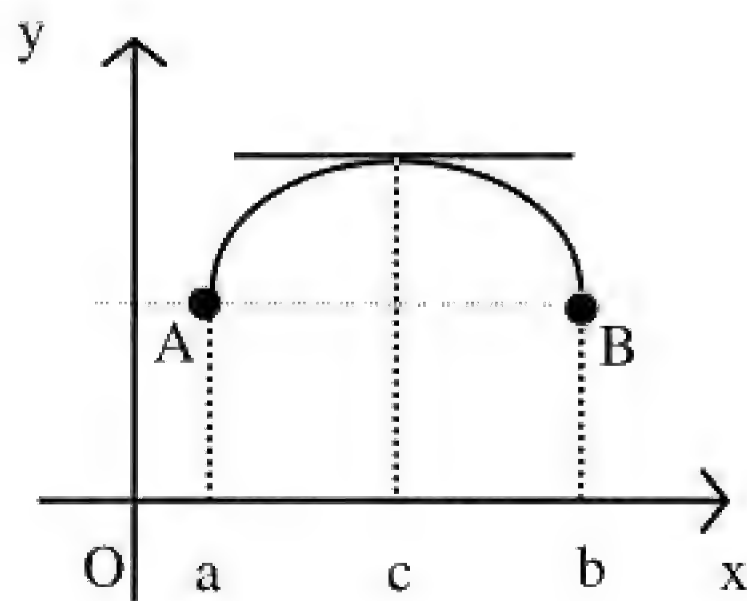
القيم العظمى والصغرى (المطلقة) لهذه الدوال على هذه الفترات:

$$(١) \quad f(x) = x^2 - 2x \quad [-1, 2]$$

$$(٢) \quad f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 1 \quad [-1, 1]$$

$[-1, 3]$	$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2$ (٣)
$[-1, 2]$	$f(x) = x^{\frac{1}{5}} + 4$ (٤)
$[3, 5]$	$f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ (٥)
$[0, 2]$	$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 6}$ (٦)
$[-\pi, \pi]$	$f(x) = \sin x + \cos x$ (٧)
$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$f(x) = \sin^3 x$ (٨)
$[-1, 1]$	$f(x) = 2 + x^{\frac{2}{3}}$ (٩)
$[0, 2\pi]$	$f(x) = \cos 2x + 2\sin x$ (١٠)
$[0, 2]$	$f(x) = (x-2)\sqrt{4-x^2}$ (١١)
$[0, 2\pi]$	$f(x) = \sin x - \cos x$ (١٢)
$[0, 1]$	$f(x) = x + \sqrt{1-x}$ (١٣)
$[0, -1]$	$f(x) = 5x^{\frac{1}{5}} + \frac{5}{6}x^{\frac{6}{5}}$ (١٤)
$[-1, 1]$	$f(x) = \tan^{-1} x^2$ (١٥)
$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$f(x) = x - \sin x$ (١٦)

(٧, ٣) نظرية رول ونظرية القيمة المتوسطة
(Rolle's Theorem and The Mean Value Theorem)



المماس عند $(c, f(c))$ يوازي محور السينات
شكل (٧, ٦).

نظرية (٧, ٤) (نظرية رول)

إذا كانت الدالة f :

(١) متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$

(٢) وقابلة للاشتقاق على الفترة

المفتوحة (a, b)

(٣) وإذا كان: $f(a) = f(b)$.

فلا بد من وجود نقطة واحدة c على الأقل:

$c \in (a, b)$ بحيث يكون:

$$f'(c) = 0$$

مثال (٧, ٢)

برهن أن الدالتين التاليتين تحققان نظرية رول، ثم أوجد قيم c التي تحقق هذه النظرية.

$$f(x) = x^3 - x \quad (1) \quad [-1, 1]$$

$$f(x) = 1 - \cos 3x \quad (2) \quad \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$$

الحل

(١) الدالة متصلة على $[-1, 1]$ لأنها كثيرة الحدود، وهي قابلة للاشتقاق على $(-1, 1)$ لنفس السبب، وعند طرفي الفترة: $f(1) = f(-1) = 0$. إذن شروط رول محققة. فلا بد من وجود نقطة واحدة c على الأقل بحيث يكون:

$$f'(c) = 0$$

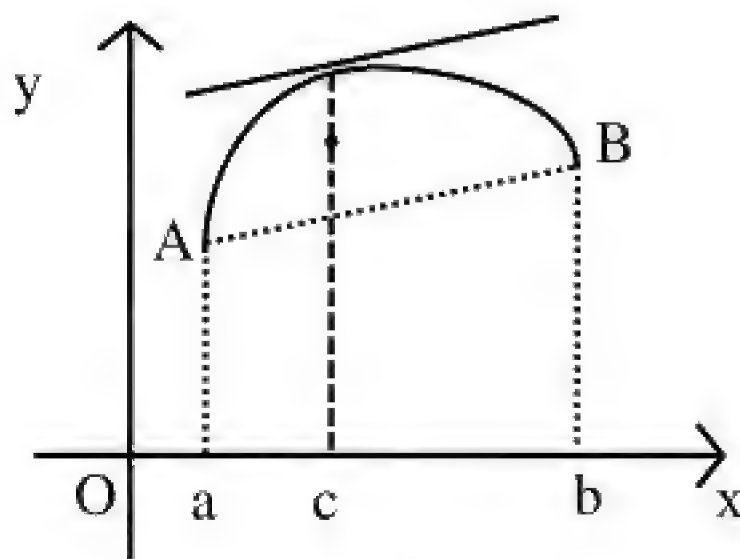
$$\text{وبما أن: } f'(x) = 3x^2 - 1, \text{ فإن: } f'(c) = 0 \Leftrightarrow$$

$$3c^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow c = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \in (-1, 1) \text{ والجذران مقبولان: } \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(٢) الدالة f متصلة على $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ لأنها مجموع دوال متصلة، وقابلة للاشتقاق على $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ لأنها مجموع دوال قابلة للاشتقاق، وعند طرفي الفترة: $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ فشروط رول محققة. فلا بد من وجود عدد واحد c على الأقل ينتمي للفترة $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ ، بحيث يكون: $f'(c) = 0$ لكن: $f'(x) = +3\sin 3x$ ، إذن:

$$\Leftrightarrow 3c = \pi n \Leftrightarrow \sin 3c = 0 \Leftrightarrow f'(c) = 0$$

$$c = \frac{\pi n}{3} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ والمقبول: } c = \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$$



المماس عند $(c, f(c))$ يوازي AB

شكل (٧, ٧).

نظرية (٧, ٥) (نظرية القيمة المتوسطة)

إذا كانت الدالة f :

(١) متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$

(٢) وقابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (a, b) .

فلا بد من وجود نقطة واحدة c على الأقل:

$c \in (a, b)$ بحيث يكون:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

البرهان

لنشكل الدالة التالية:

$$g(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) \right]$$

من الملاحظ أن هذه الدالة متصلة على $[a, b]$ لأنها مجموع دوال متصلة. وهي قابلة للاشتقاق على (a, b) لأنها مجموع دوال قابلة للاشتقاق، ومشتقتها تساوي:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

فضلا على ذلك فإن: $g(a) = g(b) = 0$ فشروط نظرية رول محققة، إذن لا بد من وجود نقطة واحدة c على الأقل بحيث يكون:

$$g'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Rightarrow$$

$$(V, 1) \quad c \in (a, b) \quad \text{حيث} \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

من الملاحظ أن المقدار: $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ هو ميل الوتر AB ، وأن $f'(c)$ هو ميل المماس للمنحني عند النقطة $(c, f(c))$. إذن الصيغة $(V, 1)$ تعني تساوي هذين المقدارين.

والتفسير لذلك أن الوتر AB يوازي المماس للمنحني الذي معادلته $y = f(x)$ عند النقطة $(c, f(c))$.

مثال (٧, ٣)

بين فيما إذا كانت الدوال المعرفة فيما يلي تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترات المرافقة. ثم أوجد قيم c في حال تحققها.

$$f(x) = |1 - x^2| \quad (1) \quad [-1, 1]$$

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x^2, & x \leq 1 \\ \frac{2}{x}, & x > 1 \end{cases} \quad (2) \quad [0, 2]$$

الحل

$$(1) \text{ من الملاحظ أن: } 1 - x^2 \geq 0 \text{ على الفترة } [-1, 1]$$

$$\text{إذن: } |1 - x^2| = 1 - x^2$$

وبما أن الدالة: $f(x) = 1 - x^2$ متصلة على $[-1, 1]$ وقابلة للاشتقاق على $(-1, 1)$ لأنها كثيرة حدود فإن شروط النظرية محققة. إذن لابد من وجود $c \in (-1, 1)$ بحيث يكون:

$$\Leftrightarrow \frac{0-0}{2} = -2c \Leftrightarrow \frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)} = -2c$$

$c = 0 \in (-1, 1)$. لاحظ أن شروط رول أيضًا محققة هنا.

(٢) من الملاحظ أن الدالة f متصلة عن يمين $x = 1$ لكونها دالة كسرية بسطها الدالة الثابتة ومقامها كثيرة حدود والمقام لا يساوي الصفر. وهي عن يسار $x = 1$ كثيرة حدود. إذن هي متصلة على $\{1\} - [0, 2]$. ولنفس السبب قابلة للاشتقاق على $\{1\} - (0, 2)$. لندرس اتصال الدالة وقابليتها للاشتقاق عند $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{x} = 2 \quad (أ)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3 - x^2) = 2$$

$$f(1) = 2$$

إذن الدالة متصلة عند $x = 1$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x, & x < 1 \\ -\frac{2}{x^2}, & x > 1 \end{cases} \quad \text{(ب) قابلية الاشتقاق:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-2}{x^2} = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} -2x = -2$$

فإن الدالة قابلة للاشتقاق عند $x = 1$.

فالدالة محققة لشرطي نظرية القيمة المتوسطة.

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = f'(c) \quad \text{إيجاد قيم } c:$$

أو:

$$f'(c) = -1 \Leftrightarrow \frac{\frac{2}{2} - 3}{2 - 0} = f'(c)$$

(٢, ٧)

إذا أخذنا الدالة f (من أجل $x < 1$)، وبلاستفادة من (٢, ٧)، نجد: $f'(c) = -2c$

بالتالي: $-1 = -2c \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}$ ، لاحظ أن: $\frac{1}{2} \in (0, 2)$

إذا أخذنا الدالة f (من أجل $x > 1$)، وبالإستفادة من $(٧, ٢)$ ، نجد: $f'(c) = \frac{-2}{c^2}$
 بالتالي: $\frac{-2}{c^2} = -1 \Leftrightarrow c = \pm\sqrt{2}$ والمقبول هو $c = \sqrt{2} \in (0,2)$

نظرية (٦. ٧)

(١) إذا كانت: $f'(x) = 0$ لكل x ينتمي للفترة (a,b) ، فإن:
 $f(x) = c$ على هذه الفترة.

(٢) إذا كانت: $f'(x) = g'(x)$ لكل x ينتمي للفترة (a,b) ، فإن:
 $f(x) = g(x) + c$ (مقدار ثابت)

البرهان

(١) حسب نظرية القيمة المتوسطة وبفرض أن x_1, x_2 أية نقطتين من هذه الفترة، فإن:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) = 0 (c \in (x_1, x_2))$$

طبقنا النظرية على الفترة $[x_1, x_2]$ والمشتقة تساوي الصفر على هذه الفترة

إذن: $f(x_2) = f(x_1)$ لكل $x_1, x_2 \in (a,b)$ $f(x) = c$

(٢) لنضع: $h(x) = f(x) - g(x)$ $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$

لكل $x \in (a,b)$ إذن حسب (١) فإن: $h(x) = c$ $f(x) = g(x) + c$

تمارين (٧, ٢)

بيّن أن الدوال التالية المعروفة كما يلي تحقق شروط نظرية رول على الفترات المرافقة، ثم أوجد

جميع قيم c المحققة لهذه النظرية:

$$[0,2] \quad f(x) = x^2 - 2x + 1 \quad (١)$$

$$[0, \sqrt{3}] \quad f(x) = x^3 - 3x + 2 \quad (٢)$$

$$[-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \quad f(x) = x^4 - 2x^2 + 1 \quad (٣)$$

$$[-1,1] \quad f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2} \quad (٤)$$

$$[0, \frac{\pi}{3}] \quad f(x) = \sin 3x \quad (٥)$$

$$f(x) = \sin^3 2x \quad (٦) \quad [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$f(x) = x^{\frac{8}{5}} \quad (٧) \quad [-1, 1]$$

بيّن أن الدوال التالية المعرفة كما يلي تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترات المبينة، ثم أوجد جميع قيم c المحققة للنظرية:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1 \quad (٨) \quad [0, 1]$$

$$f(x) = |x - 1| \quad (٩) \quad [2, 4]$$

$$f(x) = \frac{x}{x+1} \quad (١٠) \quad [1, 2]$$

$$f(x) = 1 + x^{\frac{4}{3}} \quad (١١) \quad [-1, 1]$$

$$f(x) = \sin 2x \quad (١٢) \quad [0, \frac{\pi}{4}]$$

حدد فيما يلي إذا كانت الدوال المعرفة كما يلي تحقق شروط نظرية رول على الفترات المرافقة، ثم أوجد مجموعة قيم c في حال تحققها:

$$f(x) = |1 - x^2| \quad (١٣) \quad [-1, 1]$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 9} \quad (١٤) \quad [-3, 3]$$

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}} \quad (١٥) \quad [-1, 1]$$

$$f(x) = \frac{1}{1 - \cos x} \quad (١٦) \quad [-\pi, \pi]$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x} \quad (١٧) \quad [\frac{1}{3}, 3]$$

$$f(x) = x^2 + \sqrt{1 - x^2} \quad (١٨) \quad [-1, 1]$$

حدد فيما يلي إذا كانت الدوال المعرفة كما يلي تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة، ثم أوجد مجموعة قيم c حال تحققها:

$$f(x) = \frac{1}{x^3 - 1} \quad (١٩) \quad [1, 4]$$

$$f(x) = |x|^3 \quad (٢٠) \quad [-1, 3]$$

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases} \quad (٢١) \quad [-1, 1]$$

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x^2, & x \leq 1 \\ \frac{2}{x}, & x > 1 \end{cases} \quad (٢٢)$$

(٢٣) أوجد قيمة K التي تجعل الدالة f المعرفة بالمعادلة:

$$f(x) = \cos x + K \sin x$$

تحقق شروط نظرية رول على الفترة $[0, \frac{\pi}{4}]$

(٢٤) أوجد قيمة K التي تجعل الدالة f المعرفة بالمعادلة:

$$f(x) = \begin{cases} K - x^2, & x \leq 1 \\ \frac{2}{x}, & x > 1 \end{cases}$$

تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[0, 2]$.

(٧, ٤) اختبار المشتقة الأولى

The First Derivative Test

نظرية (٧, ٧)

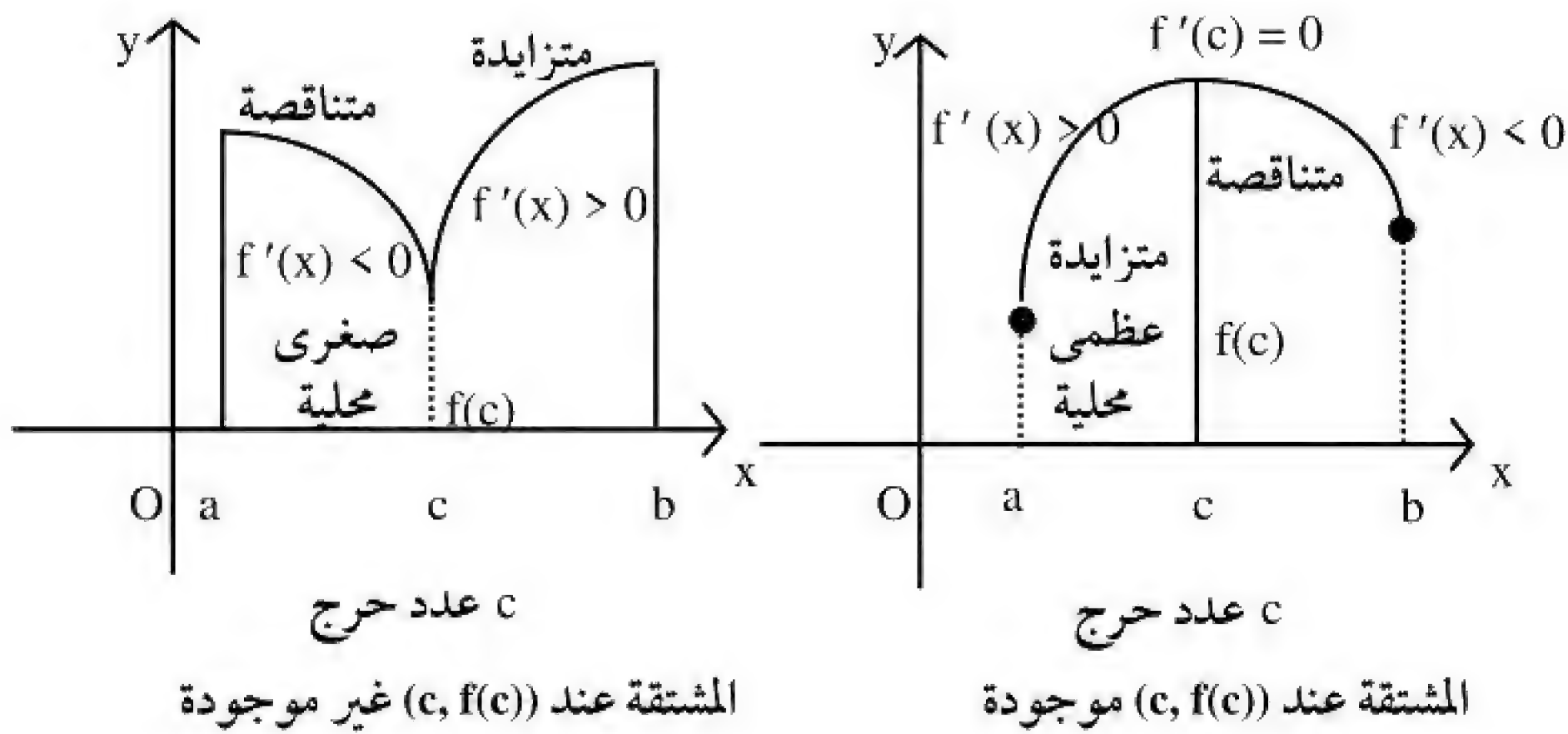
إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (a, b) ، فإن الدالة f :

(١) تكون متزايدة على $[a, b]$ ، إذا كانت:

$$f'(x) > 0 \text{ لكل } x \in (a, b)$$

(٢) تكون متناقصة على $[a, b]$ ، إذا كانت:

$$f'(x) < 0 \text{ لكل } x \in (a, b)$$



شكل (٧, ٨).

البرهان

نكتفي بالبرهان على الفقرة الأولى، وبالمثل نبرهن الثانية.

نفرض أن x_1, x_2 نقطتان اختياريّتان تنتميان للفترة $[a, b]$ ، وبتطبيق نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[x_1, x_2]$ (مع ملاحظة أن الدالة f تحقق شروط هذه النظرية على هذه الفترة)، نجد:

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c), c \in (x_1, x_2)$$

لكن: $x_2 > x_1$ و $f'(c) > 0$ ، إذن:

$f(x_2) > f(x_1) \Leftrightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0$ ، هذا يعني أن الدالة f متزايدة على الفترة $[a, b]$.

اختبار المشتقة الأولى

إذا كانت f :

(١) متصلة عند عددها الحرج c (Critical number).

(٢) وقابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (a, b) التي تحوي c (وليست بالضرورة قابلة للاشتقاق عند c)، فإن:

(١) $f(c)$ قيمة عظمى محلية للدالة f ، إذا غيرت f' إشارتها حول c من موجب إلى سالب.

إشارة المشتقة f'



(٢) $f(c)$ قيمة صغرى محلية للدالة f ، إذا غيرت f' إشارتها حول c من سالب إلى موجب.

إشارة المشتقة f' شكل (٧, ٨)



(٣) $f(c)$ ليست قيمة قصوى محلية إذا لم تغير المشتقة إشارتها حول c سواء كانت المشتقة عند c موجودة أو غير موجودة (Not exist).

مثال (٧, ٤)

أوجد فترات التزايد والتناقص والقيم العظمى والصغرى المحلية للدوال التالية:

$$(١) \quad f(x) = x^4 - 2x^2 \quad (٢) \quad f(x) = 5x^{\frac{1}{5}} \quad (٣) \quad f(x) = x + \sqrt{1-x}$$

الحل

$$x=0,x=\pm 1 \Leftrightarrow 4x(x^2-1)=0 \Leftrightarrow f'(x)=4x^3-4x=0 \quad (١)$$

x	$-\infty$		-1		0		1		∞
إشارة المشتقة $f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
f(x)	∞	\searrow	-1	\nearrow	0	\searrow	-1	\nearrow	∞

فترات التزايد: $[-1,0] \cup [1,\infty)$ ، فترات التناقص: $(-\infty,-1] \cup [0,1]$

القيم العظمى المحلية (Local Maximum Value): $f(0)=0$ ،

القيم الصغرى المحلية (Local Minimum Value): $f(-1)=f(1)=-1$

(٢) $f'(x)=x^{-\frac{4}{5}}=\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$. لا جذور للمشتقة والعدد الحرج الوحيد هو $x=0$ (ينتمي لمجال الدالة).

	$-\infty$		0		∞
$f'(x)$		+	$\infty \parallel \infty$	+	
	$-\infty$	\nearrow	0	\nearrow	∞

$f(0)$ ليست قيمة قصوى محلية (Local Extreme) . فترة التزايد هي \mathbb{R} .

$$f'(x)=1-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}=\frac{2\sqrt{1-x}-1}{2\sqrt{1-x}} \quad (٣)$$

$$x=\frac{3}{4} \Leftrightarrow 1-x=\frac{1}{4} \Leftrightarrow 2\sqrt{1-x}=1$$

وهي غير موجودة إذا كان $x=1$

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		1
$f'(x)$	1	+	0	-	$-\infty \parallel$
	$-\infty$	\nearrow	$\frac{5}{4}$	\searrow	1

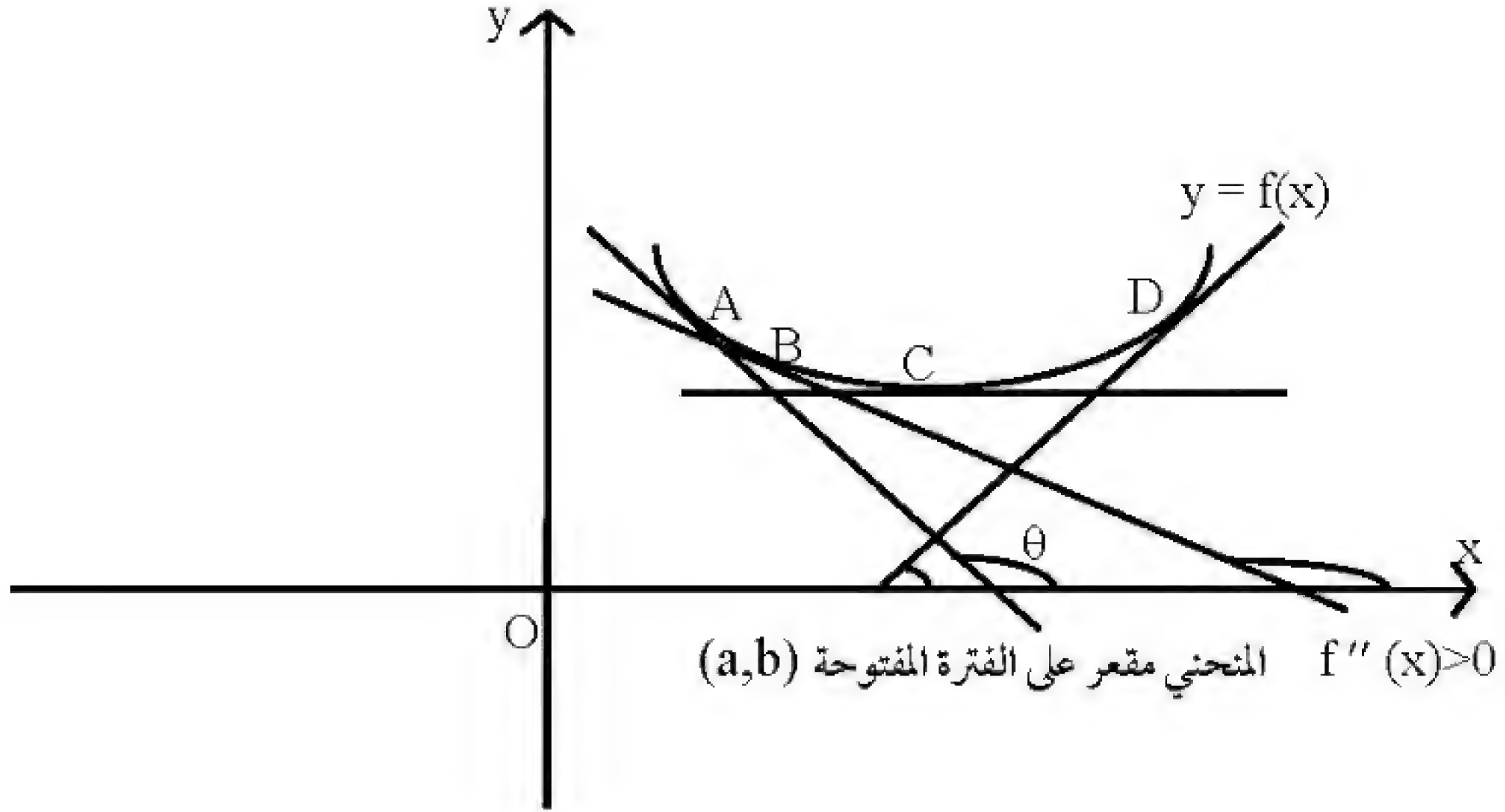
لاحظ أن: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = -\infty$ وأن مجال الدالة هو $(-\infty,1]$.

في حين أن مجال f' هو $(-\infty,1)$ وأن بيان المنحني مماس للمستقيم $x=1$ عند النقطة $(1,1)$. لاحظ

أن: $f(\frac{3}{4})=\frac{5}{4}$ قيمة عظمى محلية وأن فترة التزايد هي $(-\infty,\frac{3}{4}]$ والتناقص هي $[\frac{3}{4},1]$.

(٧, ٥) التقعر والتحدب

The upward and downward Concavity



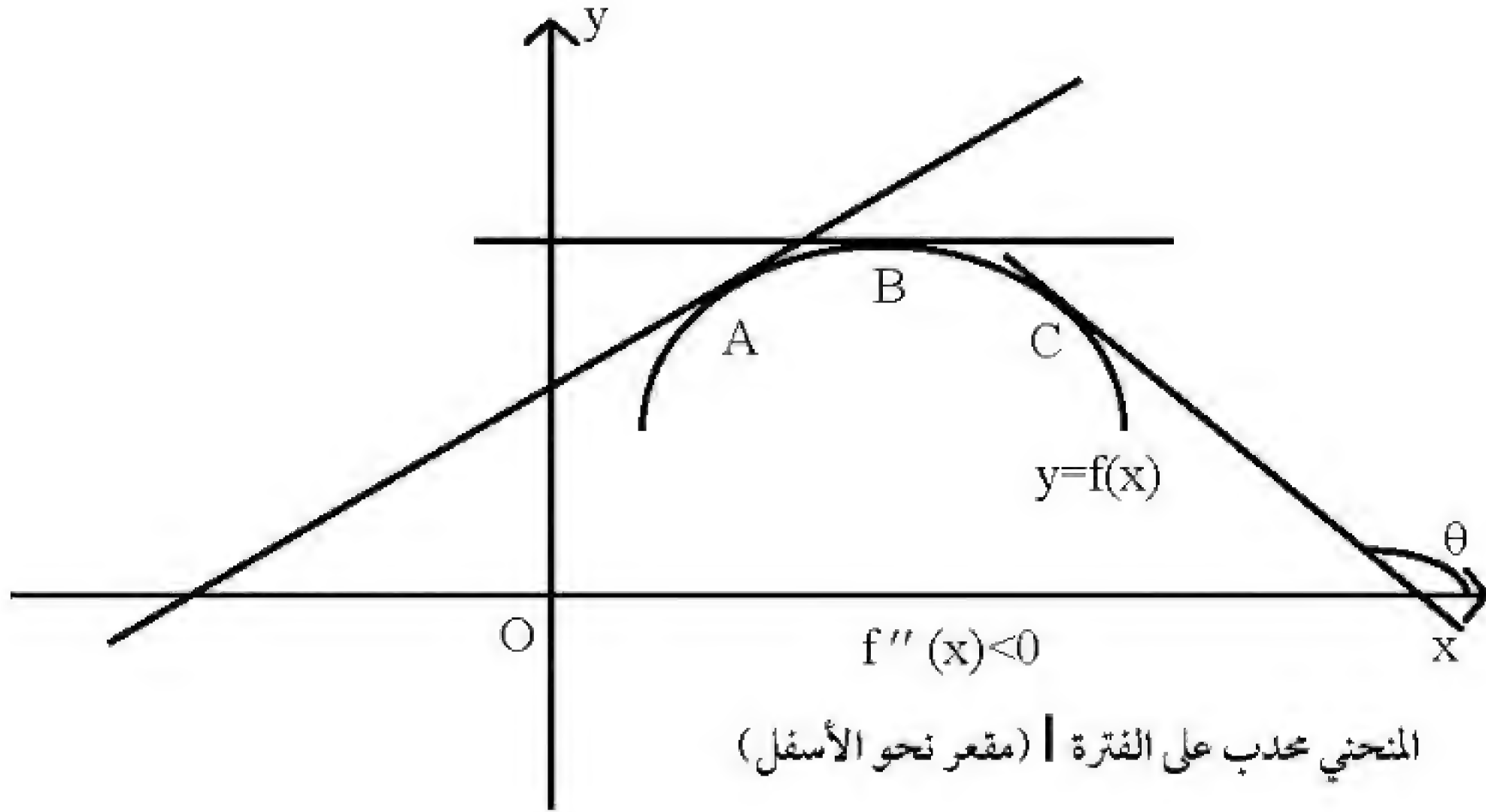
شكل (٧, ١٠).

تأمل بيان المنحني الذي معادلته: $y = f(x)$ والمعرف على الفترة المفتوحة $I = (a, b)$ والمحقق للشرط: $f''(x) > 0$ على هذه الفترة. تجد أن المشتقة الأولى f' والمحققة للمساواة:

$$m = f'(x) = \tan \theta$$

هي دالة متصلة تزداد تدريجياً بقيمتها عندما تزداد x . لاحظ أن الزاوية θ عند A زاوية منفرجة وعند C تساوي الصفر (المماس يوازي المحور x) وعند D زاوية حادة. لاحظ أن المنحني يقع فوق أي مماس له عند أية نقطة منه. نقول عن هذا المنحني إنه منحنى مقعر على الفترة I شكل (٧, ١٠).

بالمثل المنحني الذي معادلته $y = f(x)$ والمعرف على الفترة I والمحقق للشرط $f''(x) < 0$ على هذه الفترة هو منحنى محدب (مقعر نحو الأسفل) شكل (٧, ١١).



شكل (١١, ٧).

تعريف (٥, ٧)

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $I = (a, b)$. نقول إن بيان المنحني الذي معادلته $y = f(x)$:

- (١) مقعر على الفترة I ، إذا كانت f' متزايدة على I
- (٢) محدب على هذه الفترة، إذا كانت f' متناقصة على I

اختبار التقعر

إذا كانت المشتقة الثانية f'' موجودة على الفترة (a, b) ، فإن بيان f هو:

- (١) مقعر على هذه الفترة، إذا كانت $f''(x) > 0$ على (a, b) .
- (٢) محدب على هذه الفترة، إذا كانت $f''(x) < 0$ على (a, b) .

مثال (٥, ٧)

أوجد فترات التزايد والتناقص - التقعر والتحدب - القيم القصوى المحلية، في الحالتين التاليتين:

$$(٢) f(x) = \sin 2x \text{ على الفترة } [0, \pi]$$

$$(١) f(x) = x^3 - 3x$$

الحل

$$(أ) \quad f'(x) = 3x^2 - 3 \text{ وجذرا المشتقة هما } x = \pm 1$$

x	$-\infty$	-1	1	∞			
إشارة المشتقة $f'(x)$	+	0	-	0	+		
f(x)	$-\infty$	\nearrow	2	\searrow	-2	\nearrow	∞

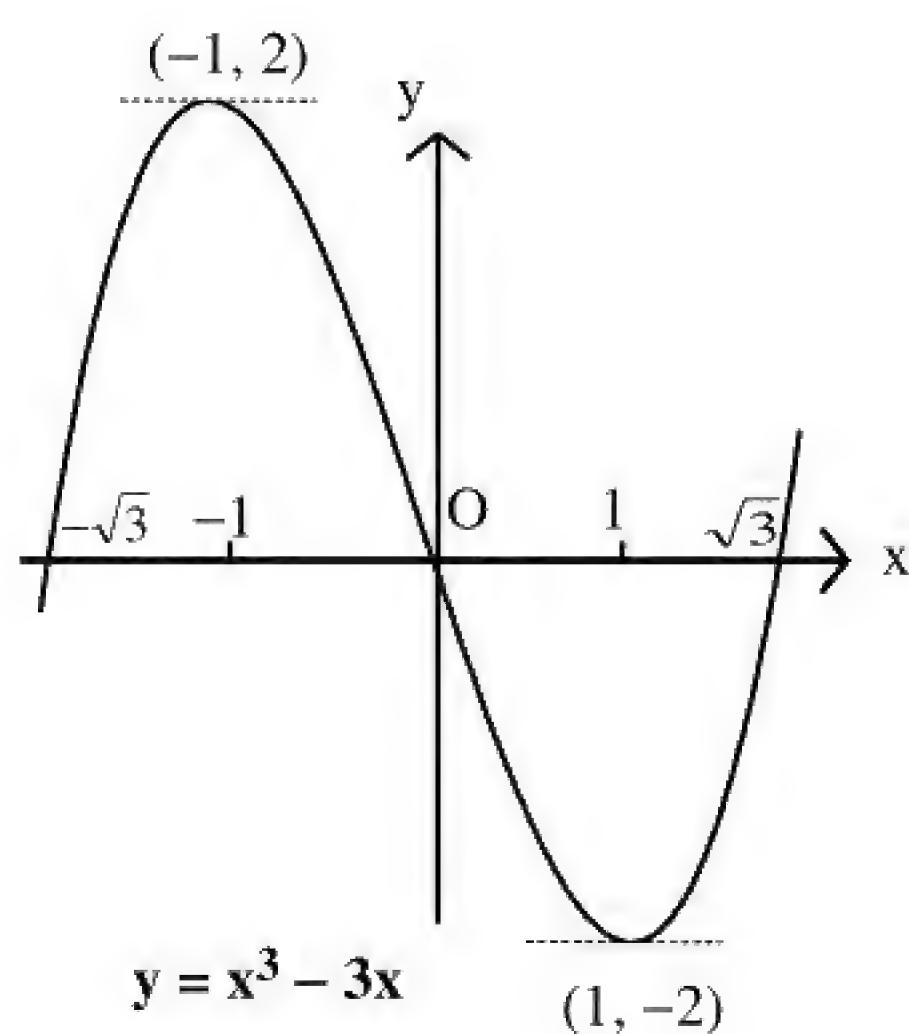
فترات التزايد: $(-\infty, -1]$ و $[1, \infty)$ ، فترات التناقص $[-1, 1]$ ، $f(-1)=2$ قيمة عظمى محلية $f(1) = -2$ قيمة صغرى محلية.

$$(ب) \quad f''(x) = 6x \text{، جذر المشتقة هو: } x = 0$$

إشارة المشتقة $f''(x)$	$-\infty$	-	0	+	∞
			\frown	\smile	
			$f(0)=0$		

فترات التقعر: $(0, \infty)$ وفترات التحدب: $(-\infty, 0)$

لاحظ أن: f دالة فردية وأن بيان المنحني متناظر بالنسبة لنقطة الأصل. من جهة أخرى فإن نقاط التقاطع مع المحاور الإحداثية هي: $(0,0), (\pm\sqrt{3},0)$ (شكل (٧, ١٢)).



شكل (٧, ١٢).

(٢) (أ) $f'(x) = 2\cos 2x$ وجذور المشتقة على الفترة $(0,\pi)$ هي:

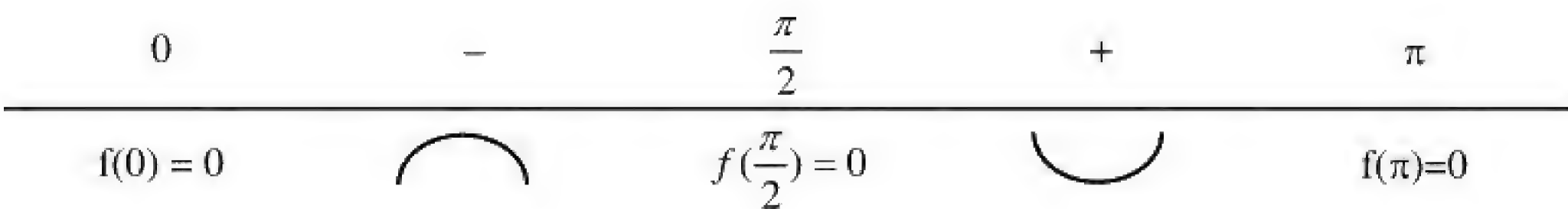
$$x = \frac{3\pi}{4} \text{ , } x = \frac{\pi}{4}$$

إشارة المشتقة الأولى:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f'(x)$	+		0	-	0	+	
f(x)	0	\nearrow	1	\searrow	-1	\nearrow	0

فترات التزايد: $[0,\frac{\pi}{4}]$ و $[\frac{3\pi}{4},\pi]$ ، فترات التناقص $[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$ ، $f(\frac{\pi}{4}) = 1$ قيمة عظمى محلية، $f(\frac{3\pi}{4}) = -1$ قيمة صغرى محلية.

(ب) $f''(x) = -4\sin 2x$ وجذور المشتقة الثانية على الفترة $[0,\pi]$ هي:

$$x = 0, x = \frac{\pi}{2}, x = \pi$$


فترات التفرع: $(\frac{\pi}{2},\pi)$ ، فترات التحدب: $(0,\frac{\pi}{2})$
نقاط التقاطع هي: $(0,0),(\frac{\pi}{2},0),(\pi,0)$

تعريف (٦, ٧)

إذا حققت الدالة f الشرطين التاليين:

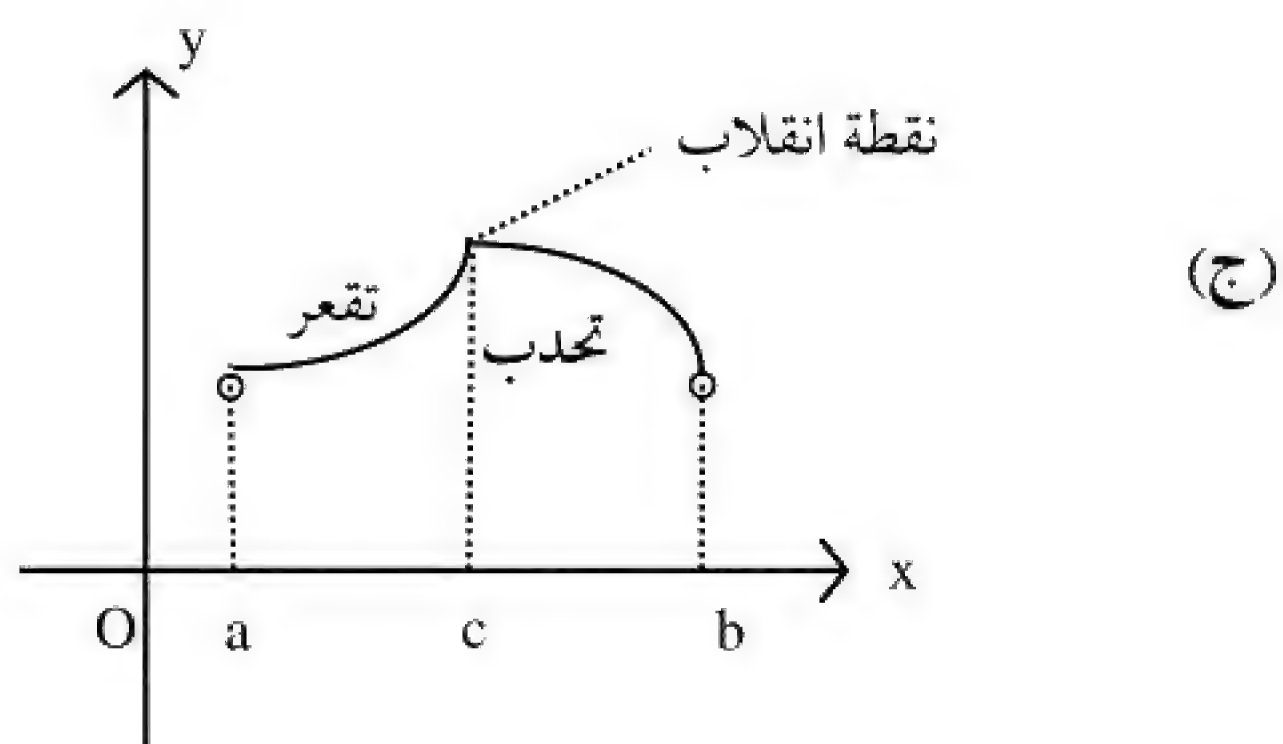
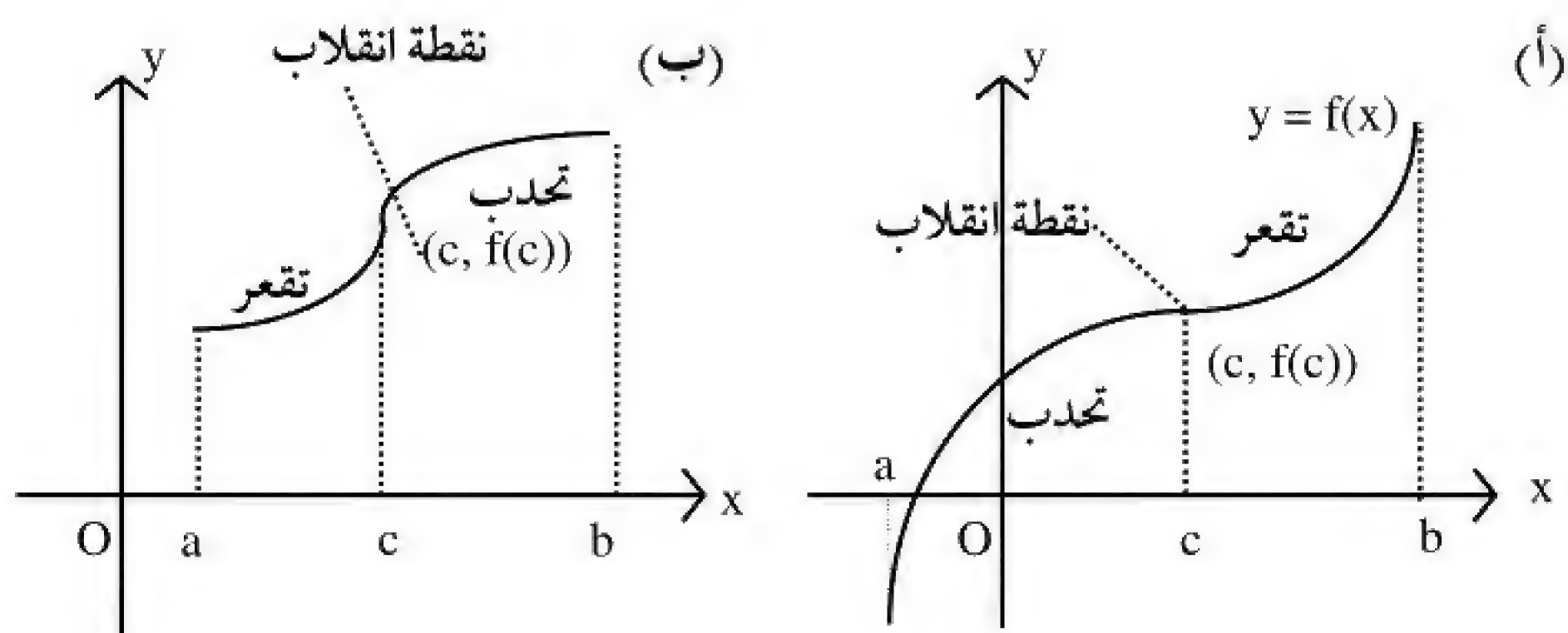
(١) f متصلة عند c

(٢) وإذا قسمت c الفترة المفتوحة (a,b) بحيث يكون بيان f :

مقعراً على الفترة (a,c) ومحدباً على الفترة (c,b) أو بالعكس:

فإننا نسمي النقطة $(c, f(c))$ من بيان f بنقطة انقلاب

(Inflection Point) (نقطة انعطاف) شكل (١٣, ٧).



شكل (١٣، ٧).

مثال (٦، ٧)

أوجد نقط الانقلاب للمنحنيات المعرفة كالاتي:

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} - 4x \quad (٢)$$

$$f(x) = 2x^4 - 12x^2 + 10 \quad (١)$$

الحل

$$x = \pm 1 \quad (١) \quad f'(x) = 8x^3 - 24x \Leftarrow f''(x) = 24x^2 - 24, \text{ جذرا المشتقة الثانية}$$

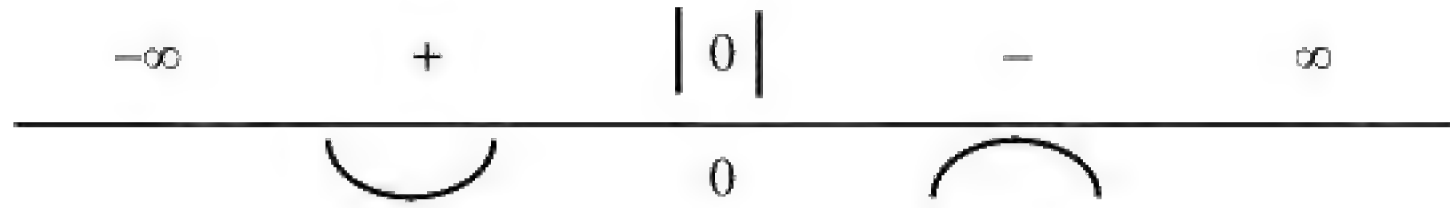
إشارة المشتقة الثانية:

نقطتا الانقلاب هما: $(\pm 1, 0)$ (المشتقة الثانية موجودة وتساوي الصفر).

لاحظ أن إشارة المشتقة تتغير حول كل من نقطتي الانقلاب.

$$f''(x) = -\frac{2}{9} \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}} \Leftrightarrow f''(x) = -\frac{2}{9} x^{-\frac{5}{3}} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} - 4 \quad (٢)$$

لا جذور للمشتقة الثانية، لكنها غير موجودة عند $x = 0$ (لاحظ أن الدالة معرفة عند $x = 0$).
إشارة المشتقة الثانية:

فالنقطة $(0, 0)$ نقطة انقلاب (المشتقة الثانية غير موجودة).

اختبار المشتقة الثانية (The Second derivative test):

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق مرتين على فترة مفتوحة تحوي c وكان $f'(c) = 0$ ، فإن
للدالة f :

(١) قيمة عظمى محلية $f(c)$ ، إذا كان: $f''(c) < 0$ (٢) قيمة صغرى محلية $f(c)$ ، إذا كان: $f''(c) > 0$

مثال (٧, ٧)

أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدوال التالية:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1 \quad (٢)$$

$$f(x) = x^2 - 2x \quad (١)$$

الحل

(١) $f'(x) = 2x - 2$ والمشتقة تساوي الصفر عند $x = 1$.

لكن: $f''(x) = 2$. بما أن: $f''(x) = 2 > 0$ فإن: $f(1) = -1$ قيمة صغرى محلية للدالة.

$$(٢) \quad f'(x) = 6x^2 - 6x \quad \text{وجذرا المشتقة هما } x = 0, x = 1$$

لكن: $f''(x) = 12x - 6$. بما أن:

$$(أ) \quad f''(0) = -6 < 0 \quad , \quad \text{فإن: } f(0) = 1 \text{ قيمة عظمى محلية للدالة.}$$

$$(ب) \quad f''(1) = 6 > 0 \quad , \quad \text{فإن: } f(1) = 0 \text{ قيمة عظمى محلية للدالة.}$$

تمارين (٣, ٧)

أوجد فترات التزايد والتناقص، القيم القصوى المحلية، فترات التقعر والتحدب، نقط

الانقلاب للدوال المعروفة كما يلي:

$$(١) \quad f(x) = x^2 - 3x \quad (٢) \quad f(x) = 2x^3 - 3x^2$$

$$(٣) \quad f(x) = x^4 - 2x^2 \quad (٤) \quad f(x) = \sin 2x + 1$$

$$(٥) \quad f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad (٦) \quad f(x) = \frac{x}{1-x}$$

$$(٧) \quad f(x) = \frac{1}{x^2+1} \quad (٨) \quad f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

$$(٩) \quad f(x) = x^{\frac{1}{2}} \quad (١٠) \quad f(x) = 5x^{\frac{1}{5}}$$

$$(١١) \quad f(x) = \sin x - \cos x \quad \text{على الفترة } [0, 2\pi]$$

$$(١٢) \quad f(x) = \tan^{-1} x \quad (١٣) \quad f(x) = x^{\frac{1}{7}}(x+8)$$

$$(١٤) \quad f(x) = \sin^2 x \quad \text{على الفترة } (-\pi, \pi)$$

$$(١٥) \quad f(x) = |x^2 - 4| \quad (١٦) \quad f(x) = x^3 \sqrt{x+1}$$

$$(١٧) \quad f(x) = x\sqrt{1-x^2} \quad (١٨) \quad f(x) = x^2 \sqrt{4x-x^2}$$

(١٩) حدد باستخدام اختبار المشتقة الثانية القيم القصوى المحلية على الفترات المرافقة:

$$(أ) \quad f(x) = \cos 2x + \sin 2x \quad [0, \pi]$$

$$(ب) \quad f(x) = 2x - \sin 2x \quad [0, 2\pi]$$

$$(ج) \quad f(x) = 2\sin x + \sin 2x \quad [-\pi, \pi]$$

$$(د) \quad f(x) = \sec 2x \quad \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$$

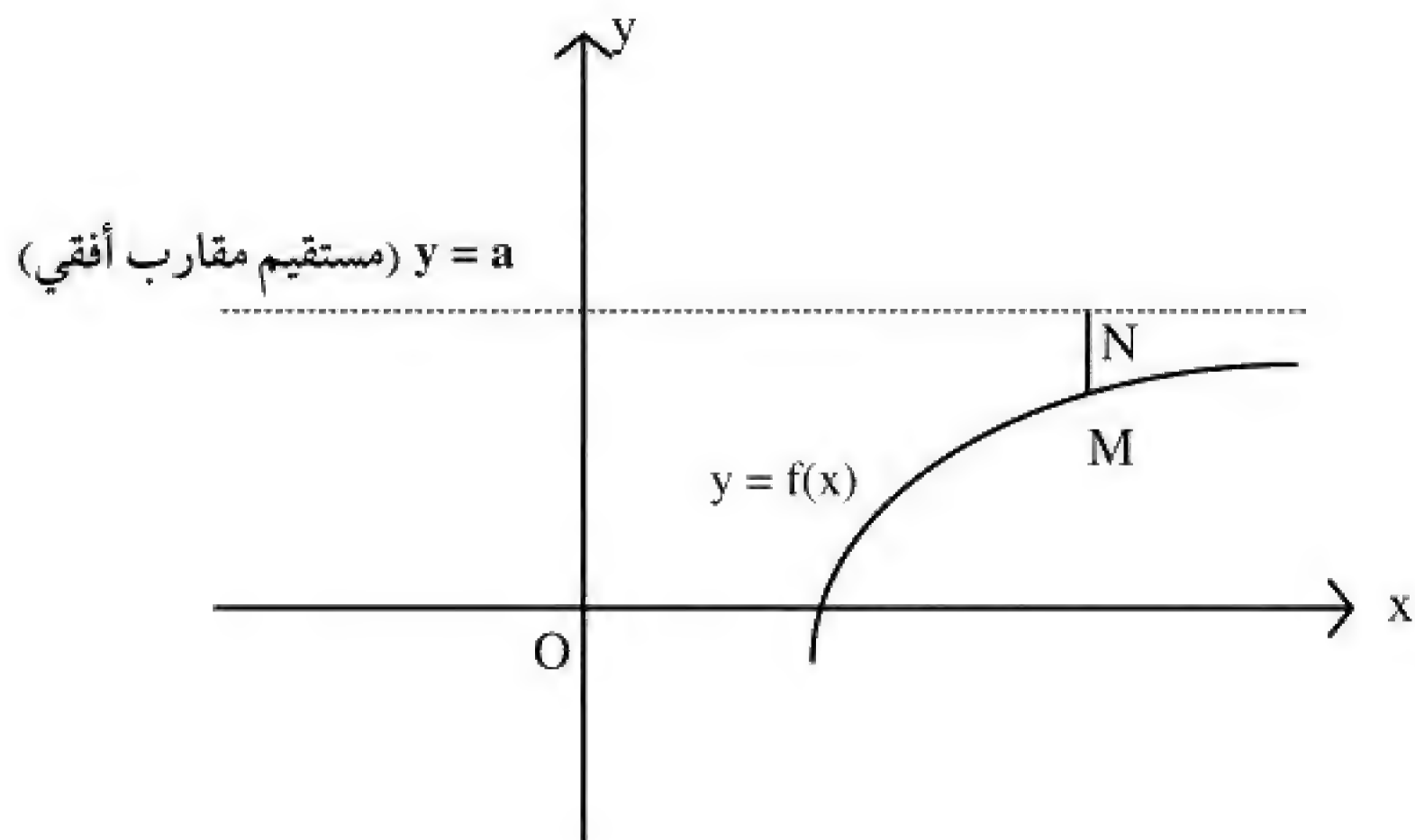
$$(هـ) \quad f(x) = 2\tan x - \tan^2 x \quad \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$$

رسم المنحنيات

THE GRAPH OF THE CURVES

(٨, ١) المستقيمات المقاربة الأفقية والعمودية

The Horizontal and Vertical Asymptotes lines



شكل (٨, ١).

تأمل في بعد النقطة M (من المنحني الذي معادلته: $y = f(x)$ عن المستقيم: $y = a$ ، تجد أنه يصغر تدريجيًّا كلما زادت قيمة المتغير x وينتهي نحو الصفر عندما $x \rightarrow \infty$.

(٨, ١)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |MN| \rightarrow 0$$

أي أن:

$$|MN| = a - f(x) \text{ لكنَّ:}$$

إذن العلاقة (٨, ١) تكافئ الشرط:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$$

تعريف (٨, ١)

نقول إن المنحني الذي معادلته: $y = f(x)$ ، يقبل المستقيم: $y = a$ مقاربًا له، إذا كانت:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a \text{ (أو } x \rightarrow -\infty \text{)}$$

مثال (٨, ١)

أوجد المستقيمات المقاربة الأفقية للمنحنيات المعروفة كما يلي:

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} \quad (٢)$$

$$y = \frac{1}{(x-2)(x-3)} \quad (١)$$

$$y = \frac{2x^2 - 1}{4x^2 - 3} \quad (٤)$$

$$y = \frac{\sin x}{x^2 + 1} \quad (٣)$$

الحل

$$(١) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(x-2)(x-3)} = 0 \text{ (نفس النتيجة عندما } x \rightarrow -\infty \text{)}$$

إذن: $y = 0$ مستقيم مقارب أفقي.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 (1 - \frac{4}{x^2})}} \quad (٢) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{|x| \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}} = 1 \end{aligned}$$

($x = |x|$ إذا كانت x كبيرة جدًا وموجبة (Positive)).

إذن: $y = 1$ مستقيم مقارب أفقي.

$$\text{بنفس الطريقة، نجد: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} = -1 \text{ (هنا } |x| = -x \text{)}$$

إذن: $y = -1$ مستقيم مقارب أفقي أيضًا.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x^2 + 1} \quad (٣)$$

من الملاحظ أن: $-1 \leq \sin x \leq 1$

$$-\frac{1}{x^2 + 1} \leq \frac{\sin x}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{x^2 + 1} \quad \text{ومنه:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{1 + x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + x^2} = 0 \quad \text{لكن:}$$

فحسب نظرية السندويتش (الشطيرة):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x^2 + 1} = 0$$

إذن: $y = 0$ مستقيم مقارب.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 1}{4x^2 - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(2 - \frac{1}{x^2})}{x^2(4 - \frac{3}{x^2})} \quad (٤)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x^2}}{4 - \frac{3}{x^2}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

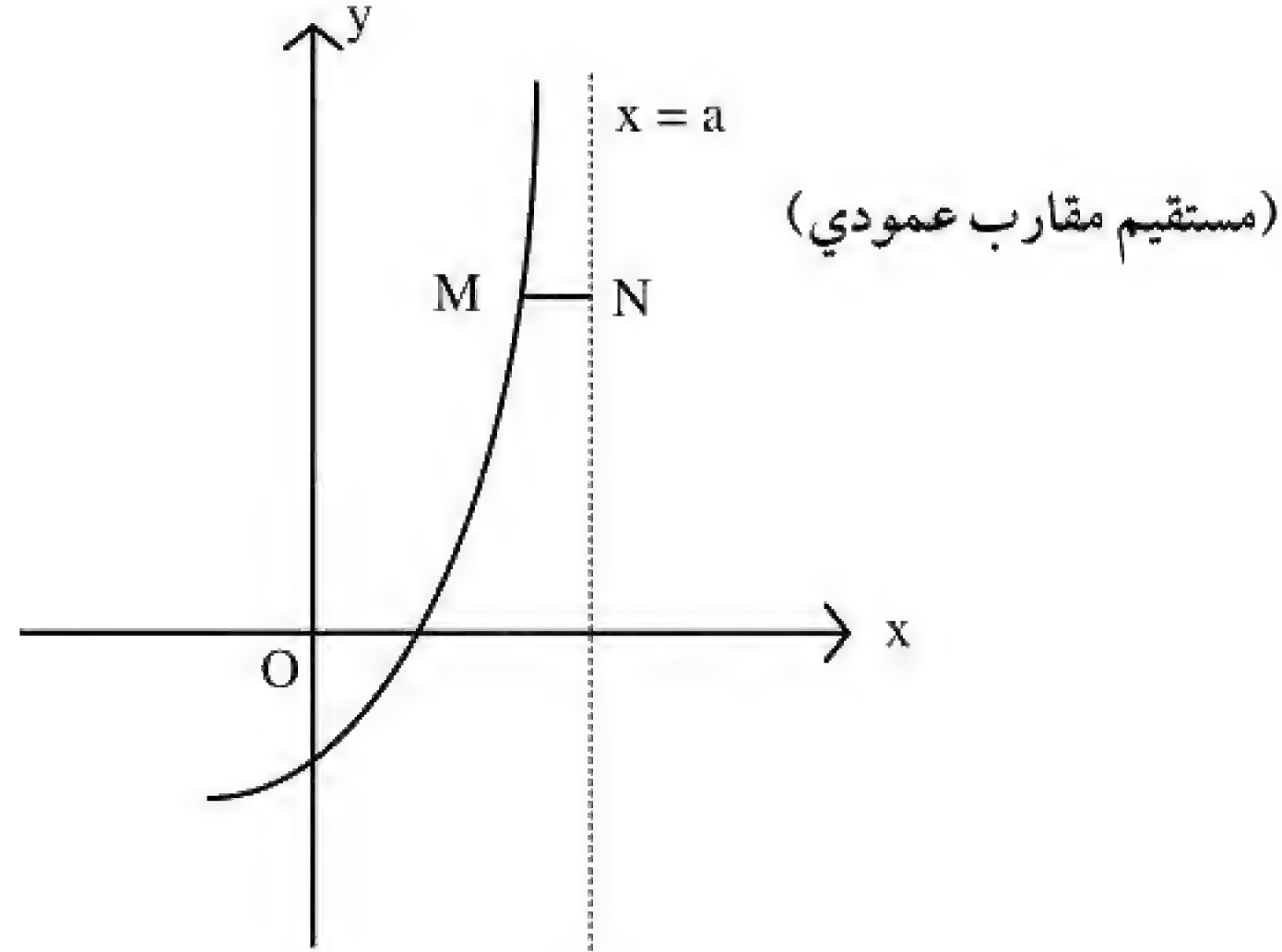
إذن: $y = \frac{1}{2}$ مستقيم مقارب أفقي.

تعريف (٢، ٨)

نقول إن المنحني الذي معادلته: $y = f(x)$ يقبل المستقيم $x = a$ مقاربًا له، إذا كانت:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \quad (\text{أو } -\infty)$$

(من الممكن $x \rightarrow a^+$ أو $x \rightarrow a^-$)



شكل (٢, ٨).

مثال (٢, ٨)

أوجد المستقيمات المقاربة العمودية (الرأسية) المعرفة فيما يلي:

$$f(x) = \frac{x}{\sin x} \quad (٢)$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4} \quad (١)$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} \quad (٤)$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \quad (٣)$$

الحل

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)(x+2)} \quad (١)$$

بما أن $x \rightarrow 2^+ \Rightarrow f(x) \rightarrow \infty$ (من الممكن أن نأخذ الحالة $x \rightarrow 2^-$)وأن: $x \rightarrow -2^- \Rightarrow f(x) \rightarrow \infty$ (من الممكن أن نأخذ الحالة $x \rightarrow -2^+$)إذن: $x = 2$, $x = -2$ مستقيمان مقاربان عموديان.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \quad (٢)$$

من الملاحظ أن: $x = 0$ ليس مستقيماً مقارباً.

في حين أن المستقيمت: $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}^*$ هي مستقيمت مقارنة رأسية. فمثلاً: $x = \pi$ مستقيم مقارب رأسي لأن:

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{x}{\sin x} = -\infty$$

(المقام ينتهي نحو الصفر بقيم سالبة)

(٣) من الملاحظ أنه لا يوجد للدالة: $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ مستقيمت مقارنة رأسية فالمقام لا يساوي الصفر دوماً: $x^2 + 1 \geq 1$

(٤) مجال الدالة: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$ هو الفترة: $(-2, 2)$ من الملاحظ أن:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = \infty$$

وأن: $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = -\infty$

إذن: $x = 2, x = -2$ مستقيمتان مقاربان رأسيان.

(٢, ٨) رسم المنحنيات

سنهتم فيما يلي برسم بعض المنحنيات ككثيرات الحدود وبعض الدوال المثلثية والجبرية مستعينين بالمعلومات التي نعلمها عن خواص الدوال متبعين لرسم هذه المنحنيات الخطوات التالية:

- (١) إنشاء جدول يوضح مجال الدالة ومشتقتها، ندرس من خلاله إشارة المشتقة الأولى، ونستنبط منه فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى المحلية.
- (٢) إنشاء جدول آخر يحدد إشارة المشتقة الثانية، نستنتج منه فترات التقعر والتحدب ونقط الانقلاب.

- (٣) دراسة التناظرات الممكنة للمنحني.
 - (٤) إيجاد نقط التقاطع مع مجموعة المحاور الإحداثية.
 - (٥) إيجاد المستقيمت المقاربة للمنحني إن وجدت.
- (أ) رسم الدوال من الشكل: $y = f(x)$ حيث $f(x)$ كثيرة حدود.

مثال (٣, ٨)

ارسم المنحني الذي معادلته: $y = f(x) = x^2 - 3x + 2$

الحل

(١) المشتقة الأولى: $f'(x) = 2x - 3$

جذور المشتقة: $x = \frac{3}{2} \Leftarrow 2x - 3 = 0$

إشارة المشتقة:

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	∞
$f'(x)$		0	
$f(x)$	∞	$f(\frac{3}{2}) = -\frac{1}{4}$	∞

$f(\frac{3}{2}) = -\frac{1}{4}$ قيمة صغرى محلية للدالة.

(٢) المشتقة الثانية: $f''(x) = 2 > 0$ فالمنحني مقعر نحو الأعلى.

(٣) نقاط التقاطع:

مع المحور x:

$$(x-1)(x-2) = 0 \Leftarrow y = 0$$

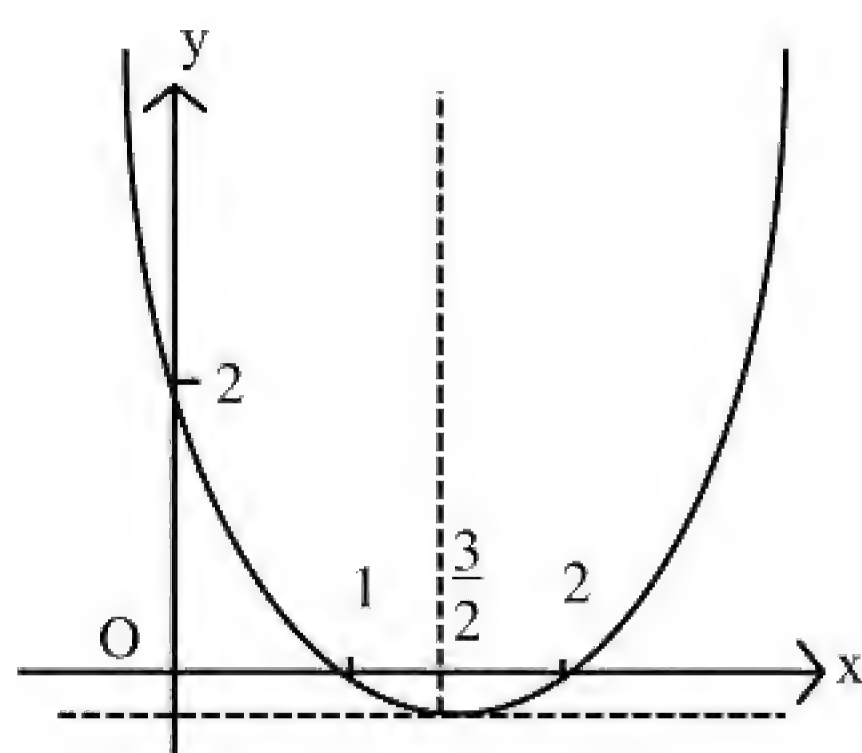
$$x = 2 \text{ أو } x = 1 \Leftarrow$$

مع المحور y:

$$y = 2 \Leftarrow x = 0$$

هذا المنحني قطع مكافئ رأسه:

$$(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4})$$



شكل (٣, ٨).

مثال (٤, ٨)

ارسم المنحني المعرف بالمعادلة: $y = f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$

مبيناً فترات تزايديه. تناقصه. تقعره. تحدبه. قيمه القصوى المحلية. نقط انقلابه.

الحل

(١) المشتقة الأولى: $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$

جذور المشتقة الأولى:

$$6x^2 - 18x + 12 = 0 \Rightarrow 6(x^2 - 3x + 2) = 0 \Rightarrow 6(x-1)(x-2) = 0$$

فالجذران هما: $x = 1, x = 2$

إشارة المشتقة الأولى:

(المجال)	\bar{x}	$-\infty$	1	2	∞			
(إشارة المشتقة الأولى)	$f'(x)$		+	0	-	0	+	
(سلوك الدالة من تزايد وتنقص)	$f(x)$	$-\infty$	\nearrow	5	\searrow	4	\nearrow	∞

أنشأنا هنا جدولاً حيث وضعنا في السطر الأول مجال الدالة مبيناً عليه جذور المشتقة الأولى أما في السطر الثاني فقد درسنا إشارة المشتقة، وفي السطر الأخير بينا أوضاع الدالة من تزايد وتنقص وأظهرنا القيم العظمى والصغرى المحلية.

(٢) المشتقة الثانية: $f''(x) = 12x - 18$

جذور المشتقة الثانية: $12x - 18 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

إشارة المشتقة الثانية:

إشارة المشتقة الثانية	$-\infty$	-	$\frac{3}{2}$	+	∞
سلوك الدالة من تقعر وتحدب		\cap	$f(\frac{3}{2}) = \frac{9}{2}$	\cup	

من الجدول الأول، نجد:

فترات التزايد: $(-\infty, 1] \cup [2, \infty)$

فترات التناقص: $[1, 2]$

$f(1) = 5$ قيمة عظمى محلية، $f(2) = 4$ قيمة صغرى محلية.

من الجدول الثاني، نجد:

فترات التغير: $(\frac{3}{2}, \infty)$ ، فترات التحدب: $(-\infty, \frac{3}{2})$

نقطة الانقلاب: $(\frac{3}{2}, \frac{9}{2})$

(٣) نقاط التقاطع مع المحورين الإحداثيين:

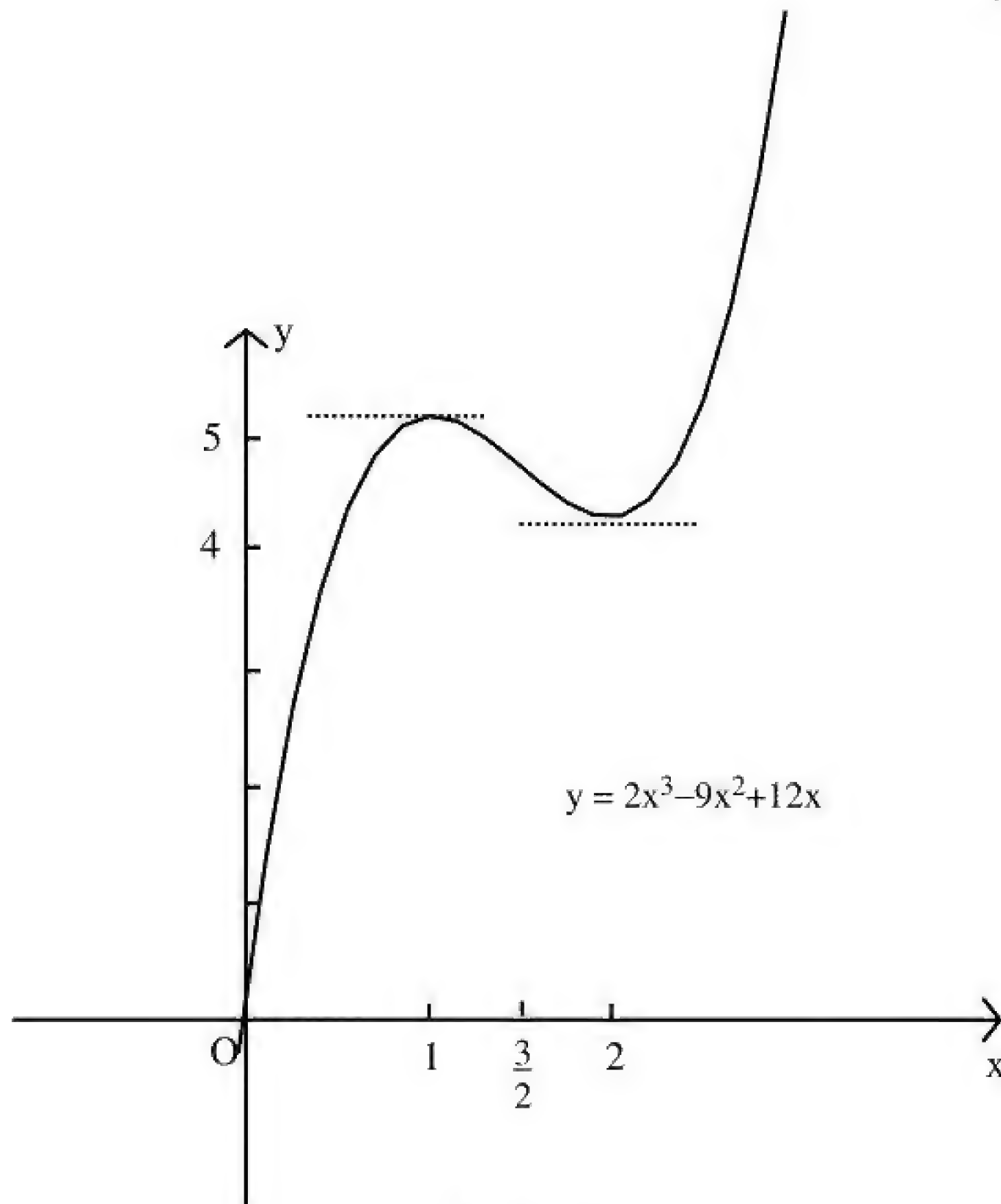
(١) مع المحور x : $x(2x^2 - 9x + 12) = 0 \Leftrightarrow y = 0$

$x = 0$ أو $2x^2 - 9x + 12 = 0$ والمميز هنا يساوي $m = 81 - 96 = -15$

فلا جذور للمعادلة. إذن نقطة التقاطع الوحيدة مع المحور x هي: $(0, 0)$

(٢) مع المحور y : $y = 0 \Leftrightarrow x = 0$ وهي نفسها النقطة السابقة.

(٤) الرسم:



شكل (٤، ٨).

مثال (٥, ٨)

ارسم المنحني الذي معادلته: $y = 2x^3 + 3x^2 + 6x$

الحل

(١) المشتقة الأولى: $f'(x) = 6x^2 + 6x + 6$

جذورها: $x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x + 6 = 0$

والمميز يساوي: $m = 1 - 4 = -3$ ولا جذور للمعادلة والمشتقة موجبة دومًا.

إشارة المشتقة الأولى:

x	$-\infty$	∞
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow \infty$

فالمنحني متزايد دومًا على \mathbb{R} ، ولا يوجد له قيم قصوى محلية.

(٢) المشتقة الثانية: $f''(x) = 12x + 6$

جذر المشتقة: $x = -\frac{1}{2}$

إشارة المشتقة الثانية:

إشارة المشتقة الثانية	$-\infty$	-	$-\frac{1}{2}$	+	∞
سلوك الدالة من تقعر وتحدب			$f(-\frac{1}{2}) = -\frac{5}{2}$		

فالمنحني مقعر على الفترة $(-\frac{1}{2}, \infty)$ ومحدب على الفترة $(-\infty, -\frac{1}{2})$ وله نقطة انقلاب وهي: $(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2})$.

(٣) نقاط التقاطع مع المحورين الإحداثيين:

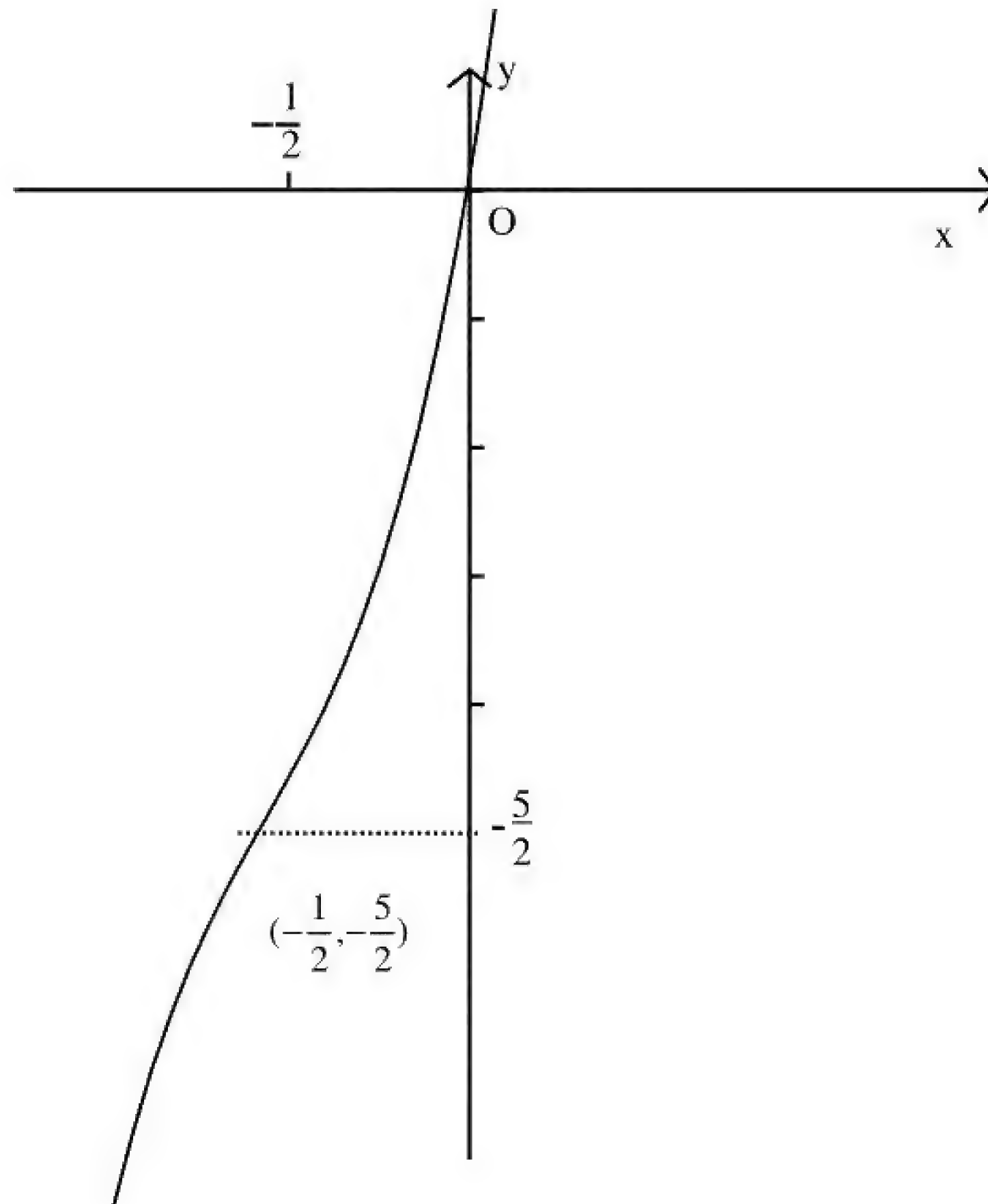
$$\Leftrightarrow x(2x^2 + 3x + 6) = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

$$x = 0 \text{ أو } 2x^2 + 3x + 6 = 0 \text{ والمميز هنا يساوي: } m = 9 - 48 = -39$$

ولا جذور للمعادلة. فنقطة التقاطع مع المحور x هي: $(0, 0)$

والنقطة نفسها نقطة التقاطع مع المحور y .

(٤) الرسم:



شكل (٥, ٨).

ملحوظة (٨, ١)

للمنحني من الدرجة الثالثة والذي معادلته:

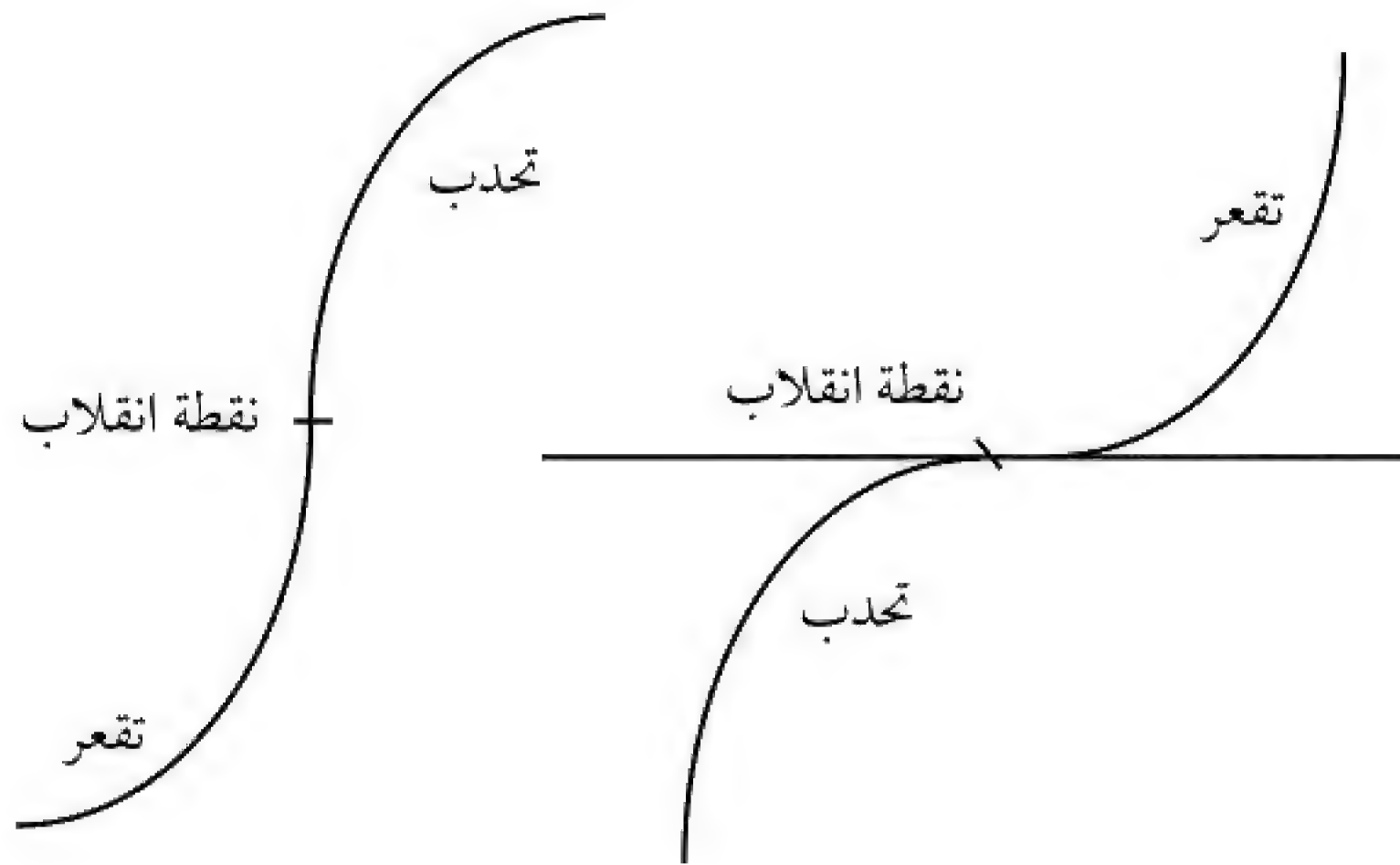
$$y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

(أ) أحد الشكلين التاليين وذلك إذا كان مميز المعادلة:

$$3ax^2 + 2bx + c = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0$$

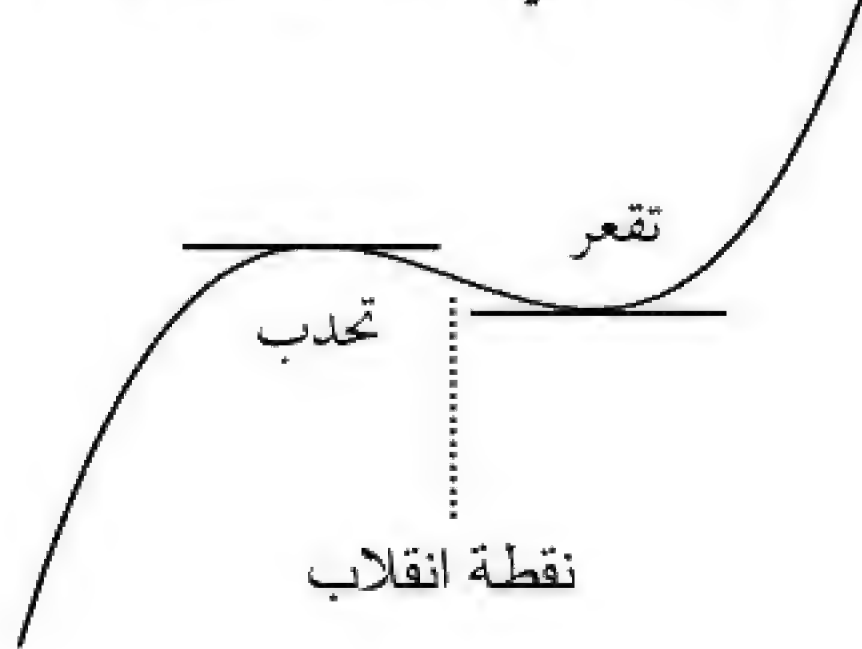
(٨, ١)

سالبًا أو مساويًا للصفر وفي هذه الحالة لا يوجد للدالة قيم عظمى ولا صغرى محلية، شكل (٨, ٦).



شكل (٨, ٦).

(ب) إذا كان مميز المعادلة (٨, ١) موجبًا، فللمنحني قيمة عظمى محلية وقيمة صغرى محلية. شكل (٨, ٧).

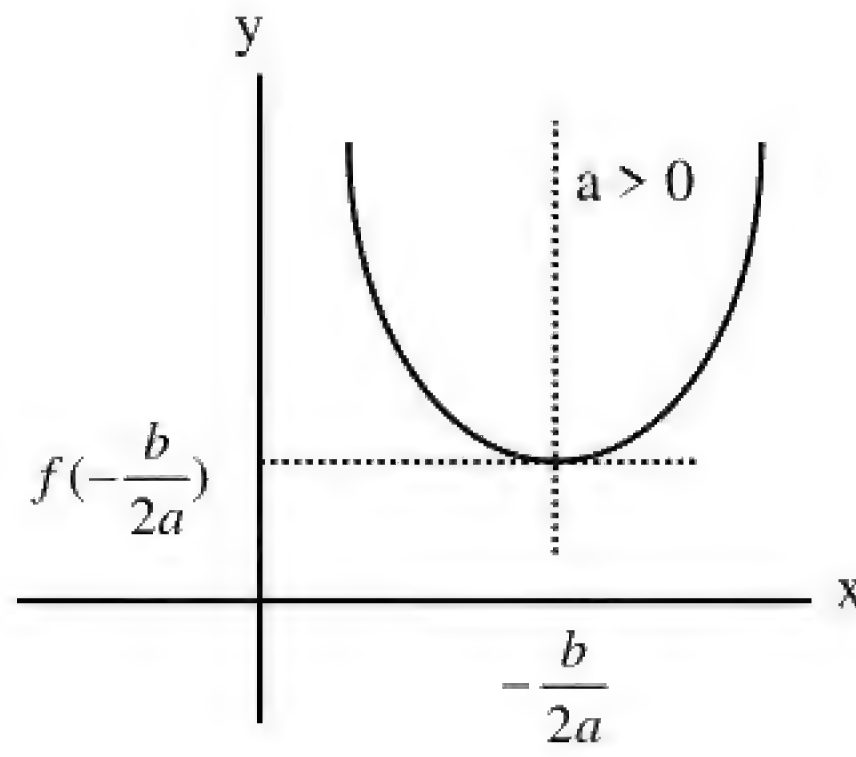


شكل (٨, ٧).

وفي كلتا الحالتين نقطة الانقلاب للمنحني هي نقطة تناظر له.

ملحوظة (٢, ٨)

المنحني من الدرجة الثانية والذي معادلته: $y = ax^2 + bx + c$ حيث $a \neq 0$ هو قطع مكافئ رأسه $(-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a}))$ حيث $f(-\frac{b}{2a})$ هي القيمة القصوى للدالة f . فتحتة نحو الأعلى إذا كان $a > 0$ ، نحو الأسفل إذا كان $a < 0$. لاحظ أن: $x = -\frac{b}{2a}$ هي نقطة انعدام مشتقته الأولى. لاحظ أيضا أن: $f''(x) = 2a$ وهي موجبة إذا كان $a > 0$ ، وسالبة إذا كان $a < 0$.



شكل (٨, ٨).

مثال (٦, ٨)

ارسم المنحني: $y = x^4 - 4x + 1$

الحل

(١) المشتقة الأولى: $f'(x) = 4x^3 - 4$

جذور المشتقة: $x = 1 \Leftarrow x^3 = 1 \Leftarrow 4x^3 - 4 = 0$

إشارة المشتقة:

x		$-\infty$	1	∞
(إشارة المشتقة)	$f'(x)$		0	
		∞	-2	∞

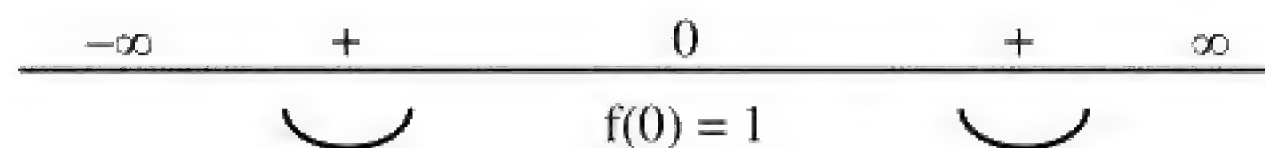
فترة التزايد: $[1, \infty)$ ، فترة التناقص: $(-\infty, 1]$

$f(1) = -2$ قيمة صغرى محلية للدالة.

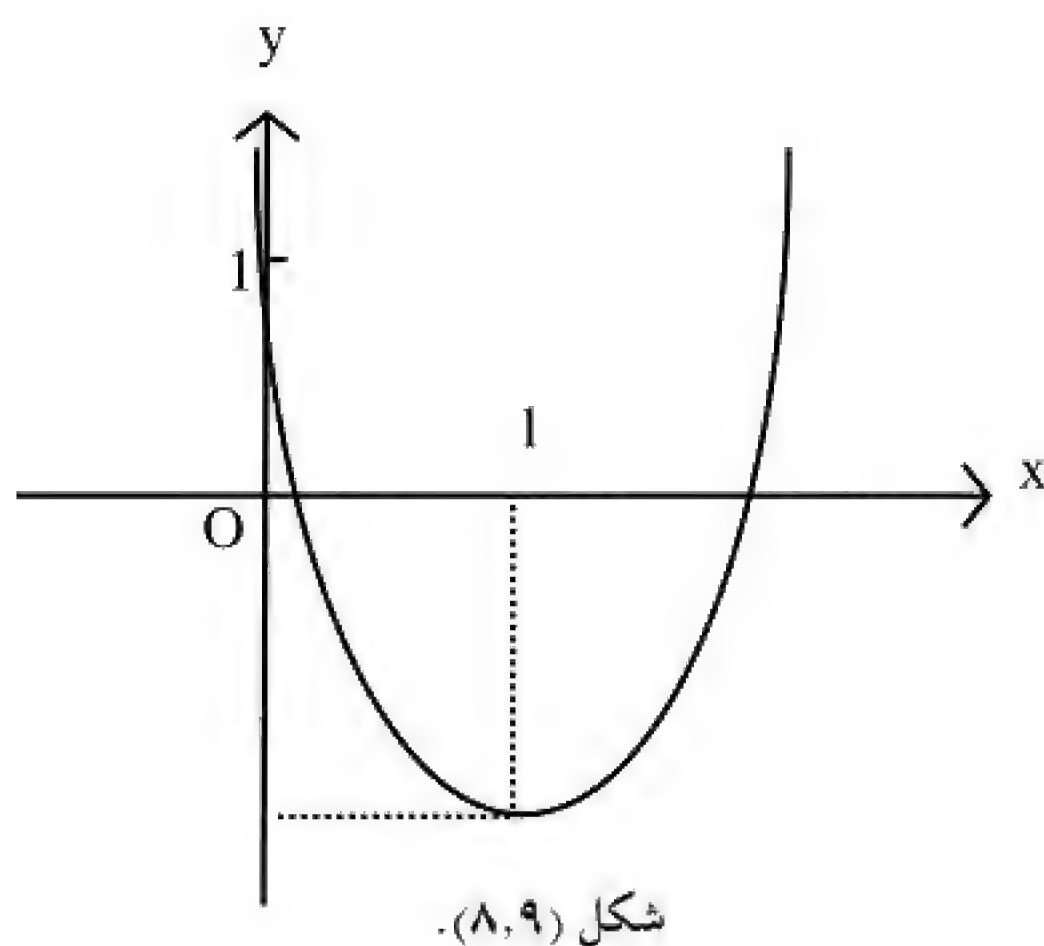
(٢) المشتقة الثانية: $f''(x) = 12x^2$

جذر المشتقة: $x = 0$

إشارة المشتقة الثانية:



فترات التقعر: IR . لاحظ أن المنحنى عند النقطة الموافقة $x = 1$ يقع فوق المماس:



مثال (٧, ٨)

ارسم المنحنى:

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$$

الحل

(١) المشتقة الأولى:

$$f'(x) = 4x^3 - 16x$$

$$= 4x(x^2 - 4)$$

$$x = 0, x = \pm 2$$

جذور المشتقة:

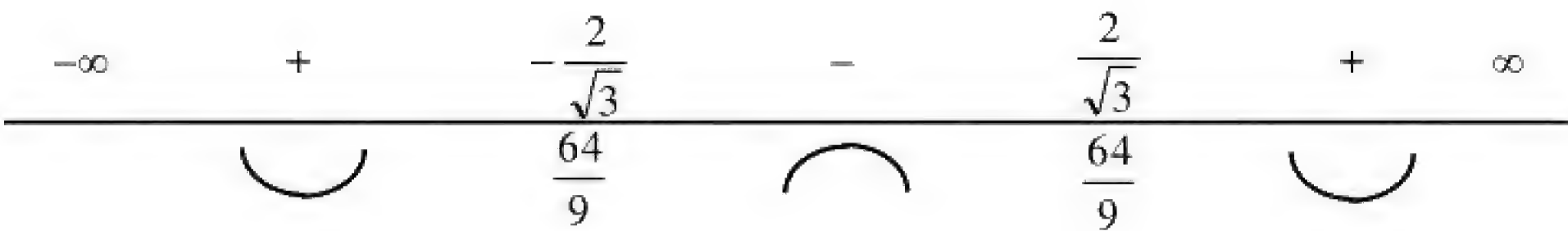
إشارة المشتقة الأولى:

x	$-\infty$		-2		0		2		∞
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
f(x)	∞	\searrow	0	\nearrow	16	\searrow	0	\nearrow	∞

٢) المشتقة الثانية: $f''(x) = 12x^2 - 16$

الجزران: $x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$

إشارة المشتقة الثانية:



٣) نقاط التقاطع:

(أ) $\Leftrightarrow (x^2 - 4)^2 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 8x^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow y = 0$

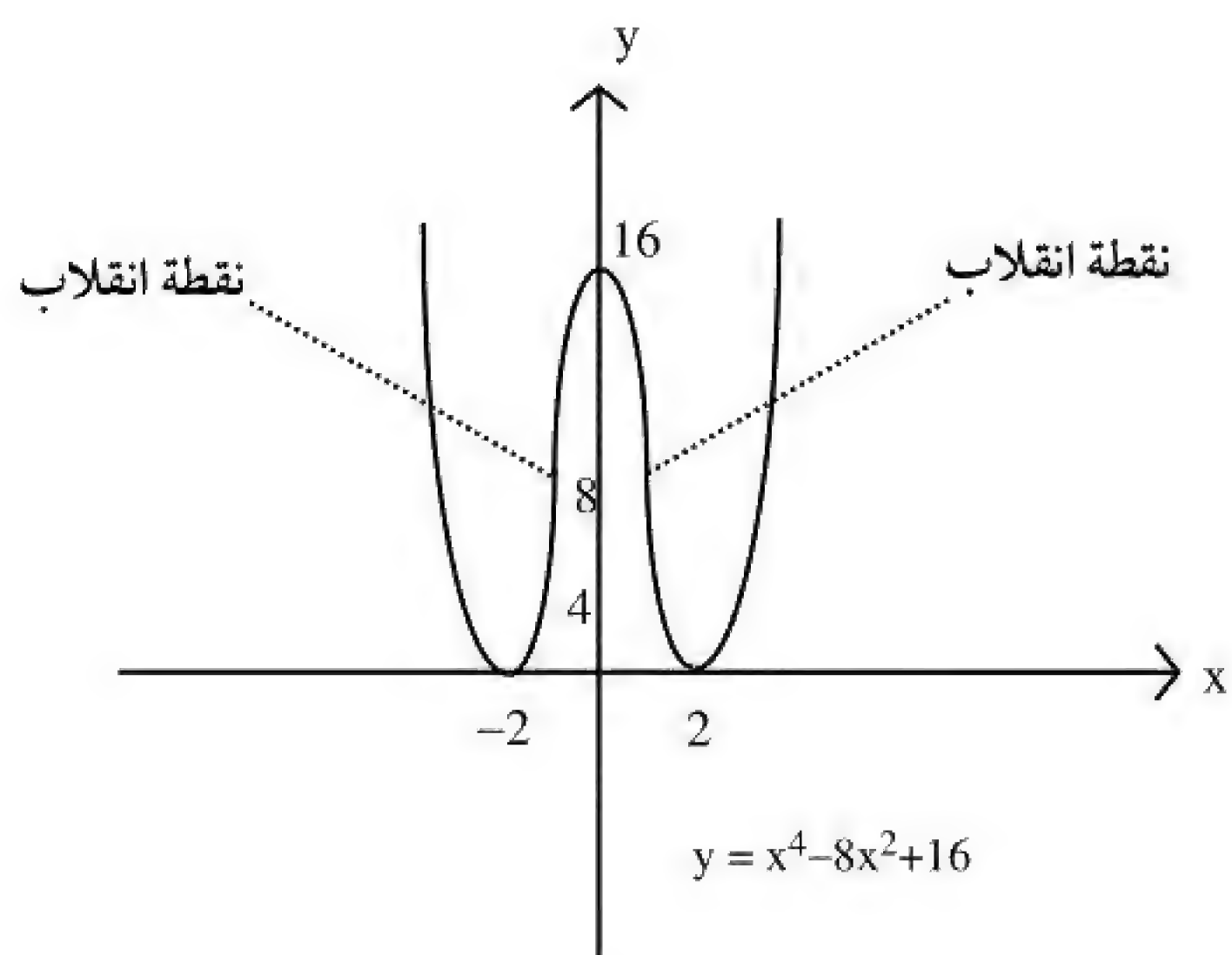
$x = \pm 2$. إذن نقطتا التقاطع: $(\pm 2, 0)$

(ب) $y = 16 \Leftrightarrow x = 0$. إذن نقطة التقاطع مع المحور $y = 0$ هي:

$(0, 16)$.

لاحظ أن f دالة زوجية فالمنحني متناظر بالنسبة للمحور y.

(٤) الرسم:



شكل (١٠)، (٨).

مثال (٨، ٨)

ارسم المنحني: $f(x) = x^4 - 2x^3$

الحل

(١) المشتقة الأولى: $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$ جذور المشتقة: $4x^3 - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2(2x - 3) = 0$

$$x = 0 \text{ أو } x = \frac{3}{2}$$

إشارة المشتقة الأولى:

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{2}$		∞
f'(x)		-	0	-	0	+	
f(x)	∞	↘	0	↘	$-\frac{27}{16}$	↗	∞

٢) المشتقة الثانية: $f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x - 1)$
الجزران هما: $x = 0$ ، $x = 1$

إشارة المشتقة الثانية:

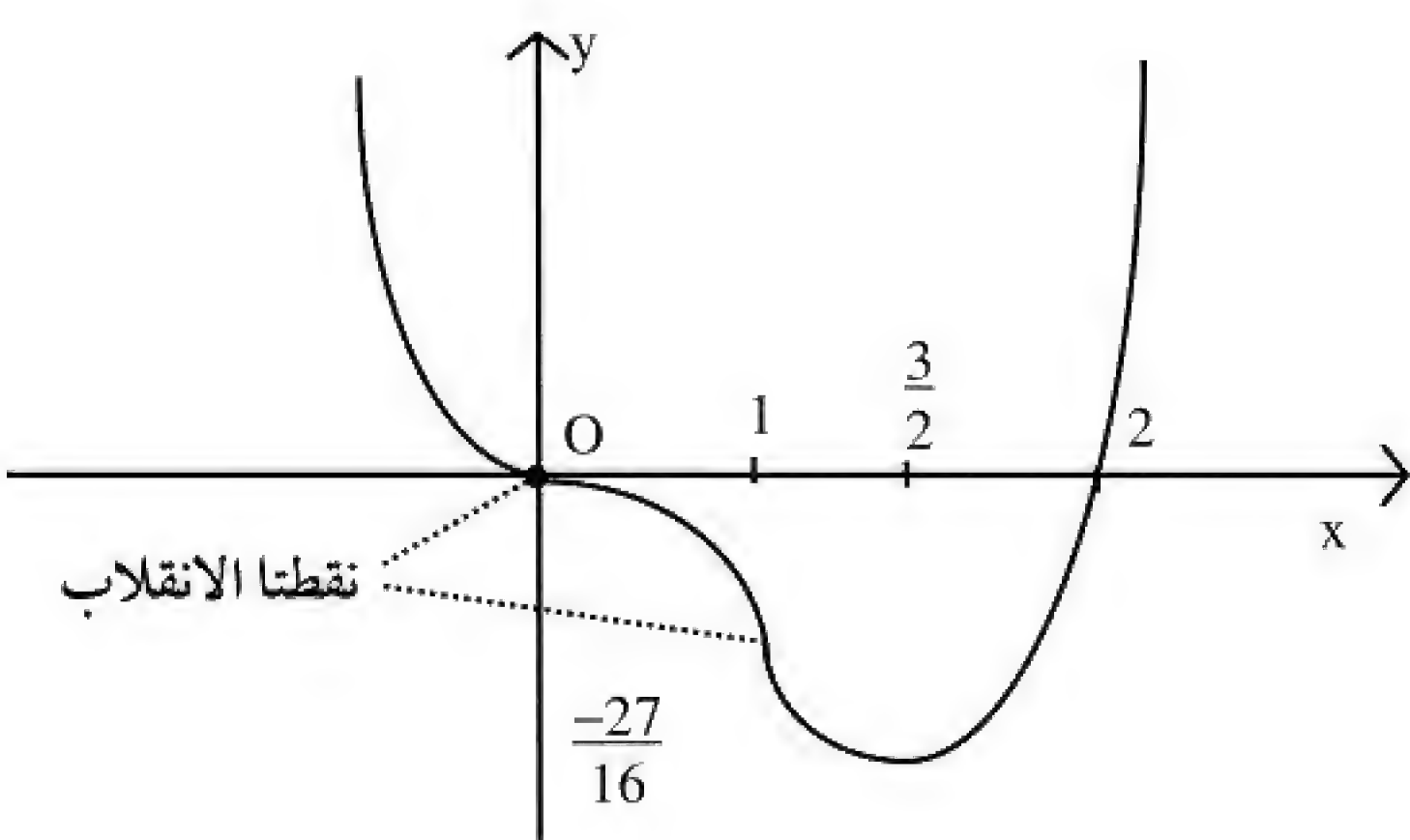
إشارة المشتقة	$-\infty$	+	0	-	1	+	∞
		⌒	0	⌒	-1	⌒	

٣) نقاط التقاطع:

مع المحور x: $x^3(x - 2) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow x = 0$ أو $x = 2$. فنقطتا التقاطع هما: $(0,0)$ ، $(2,0)$.

مع المحور y: $(0,0)$ هي نقطة التقاطع الوحيدة.

٤) الرسم:



شكل (١١)، ٨.

(ب) رسم الدوال الكسرية (البسط والمقام كثيرة الحدود)

مثال (٨, ٩)

ارسم المنحني الذي معادلته:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$$

الحل

(١) المستقيمت المقاربة:

$x \rightarrow 1^+ \Rightarrow f(x) \rightarrow \infty$. إذن: $x = 1$ مستقيم مقارب رأسي.

$x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 2$. إذن: $y = 2$ مستقيم مقارب أفقي.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(x-1) - (2x-1)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{-1}{(x-1)^2} = -(x-1)^{-2} \end{aligned} \quad \text{(٢) المشتقة الأولى:}$$

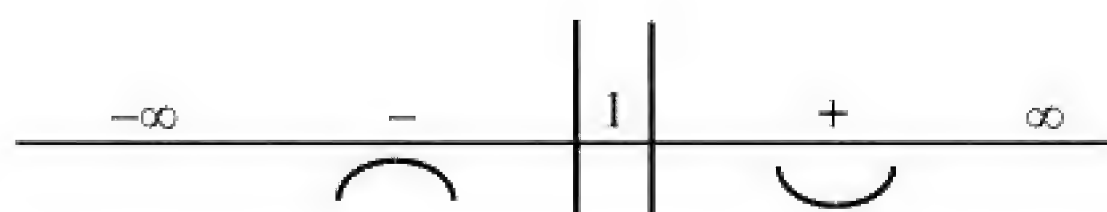
إشارة المشتقة الأولى:

x	$-\infty$		1		∞
f'(x)		-			-
f(x)	2	\searrow	$-\infty$		∞
					\searrow
					2

فالدالة متناقصة على المجموعة $\mathbb{R} - \{1\}$ ، وليس للدالة قيم عظمى أو صغرى محلية.

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} \quad \text{(٣) المشتقة الثانية:}$$

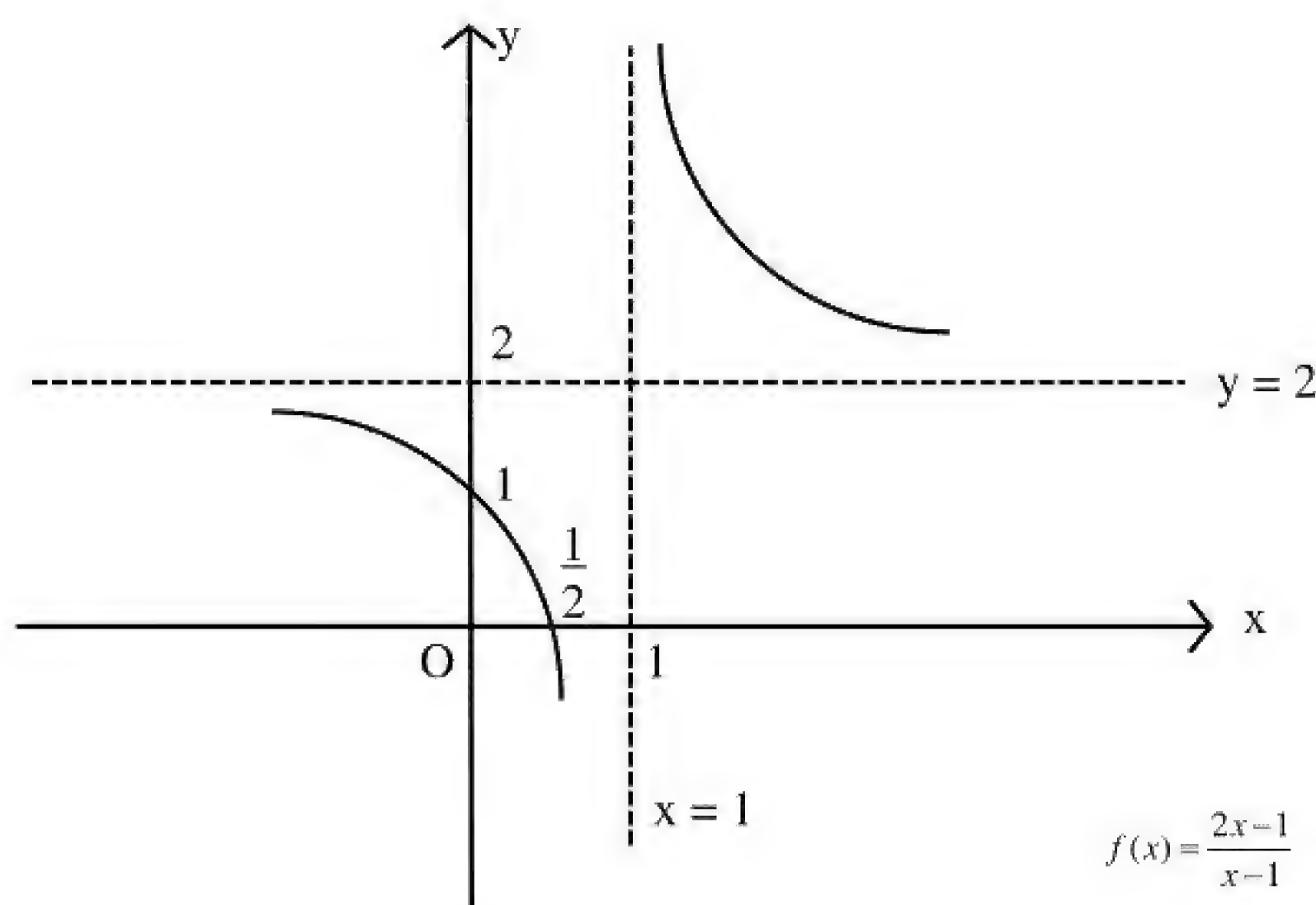
إشارة المشتقة الثانية:



لا يوجد نقط انقلاب للمنحني (الدالة غير معرفة عند $x = 1$).

(٤) نقاط التقاطع مع المحورين: $(\frac{1}{2}, 0)$ ، $(0, 1)$

(٥) الرسم:



شكل (١٢، ٨).

ملحوظة (٣، ٨)

من الممكن البرهان على أن أي منحن من الشكل:

$$(ad - bc \neq 0) \quad c \neq 0, \quad f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

هو قطع زائد نقطة تناظره هي نقطة تقاطع مستقيميته المقاربين.

مثال (١٠، ٨)

ارسم المنحني التالي:

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

الحل

(١) المستقيمات المقاربة: $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 0$

فللمنحني مستقيم مقارب وحيد هو: $y = 0$

(٣) المشتقة الأولى: $f'(x) = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

جذرا المشتقة: $x = \pm 1$

إشارة المشتقة الأولى:

x	$-\infty$		-1		1		∞
f'(x)		-	0	+	0	-	
f(x)	0	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0

إذن: $f(-1) = -\frac{1}{2}$ قيمة صغرى محلية، $f(1) = \frac{1}{2}$ قيمة عظمى محلية.

(٣) المشتقة الثانية: $f''(x) = \frac{-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2)[2(1+x^2)(2x)]}{(1+x^2)^4}$

بالقسمة للبسط والمقام على $1+x^2$ ، نجد:

$f''(x) = \frac{-2x[(1+x^2) + 2(1-x^2)]}{(1+x^2)^3} = \frac{-2x(3-x^2)}{(1+x^2)^3}$

جذور المشتقة: $x = 0, x = \pm\sqrt{3}$

إشارة المشتقة الثانية:

$-\infty$	-	$-\sqrt{3}$	+	0	-	$\sqrt{3}$	+	∞
	↖	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	↖	0	↖	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	↖	

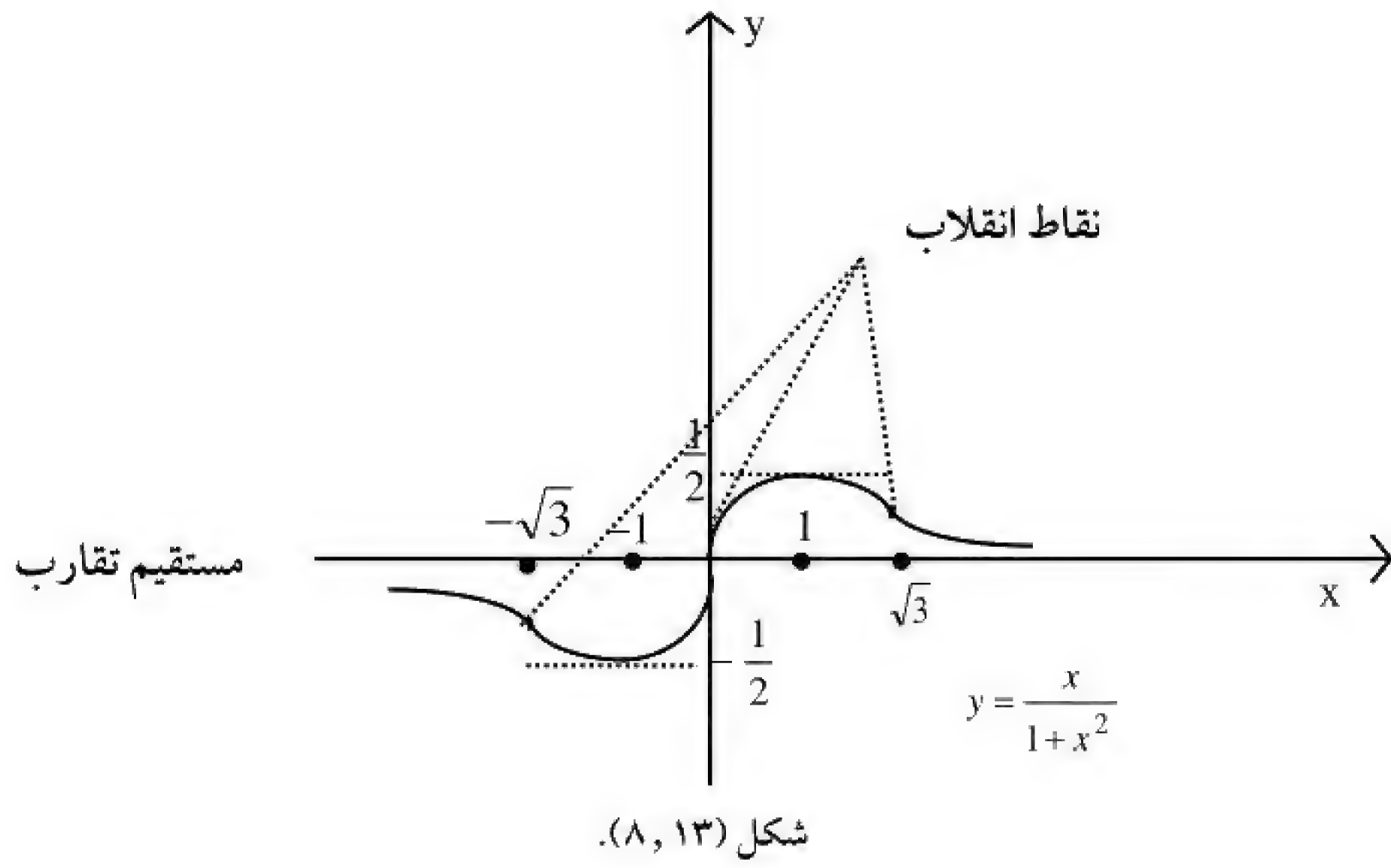
للمنحني ثلاث نقط انقلاب، هي:

$$(0,0), (-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}), (\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4})$$

(٤) الدالة f دالة فردية فالمنحني متناظر بالنسبة لنقطة الأصل.

(٥) التقاطع مع المحاور الإحداثية: للمنحني نقطة تقاطع وحيدة مع مجموعة المحاور الإحداثية وهي النقطة $(0,0)$.

(٦) الرسم:



مثال (١١)، (٨)

ارسم المنحني الذي معادلته:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

الحل

(١) المستقيمات المقاربة:

. إذن $y = 1$ مستقيم مقارب. $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow 1$. إذن $x = 1$ مستقيم مقارب. $x \rightarrow 1^+ \Rightarrow f(x) \rightarrow \infty$. إذن $x = -1$ مستقيم مقارب. $x \rightarrow -1^+ \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(x^2-1) - (x^2+1)(2x)}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{-4x}{(x^2-1)^2} \end{aligned} \quad (٢) \text{ المشتقة:}$$

جذور المشتقة: $x = 0$

إشارة المشتقة الأولى:

x	$-\infty$	-1	0	1	∞
$f'(x)$	+		+	-	-
f(x)	$1 \nearrow \infty$		$-\infty \nearrow -1 \searrow -\infty$		$\infty \searrow 1$

. $f(0) = -1$ قيمة عظمى محلية للدالة.

(٣) المشتقة الثانية:

$$f''(x) = -4 \frac{(x^2-1)^2 - x[2(x^2-1)(2x)]}{(x^2-1)^4}$$

بتقسيم البسط والمقام والمقام على $x^2 - 1$ ، نجد:

$$f''(x) = -4 \frac{x^2 - 1 - 4x^2}{(x^2-1)^3} = 4 \frac{(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}$$

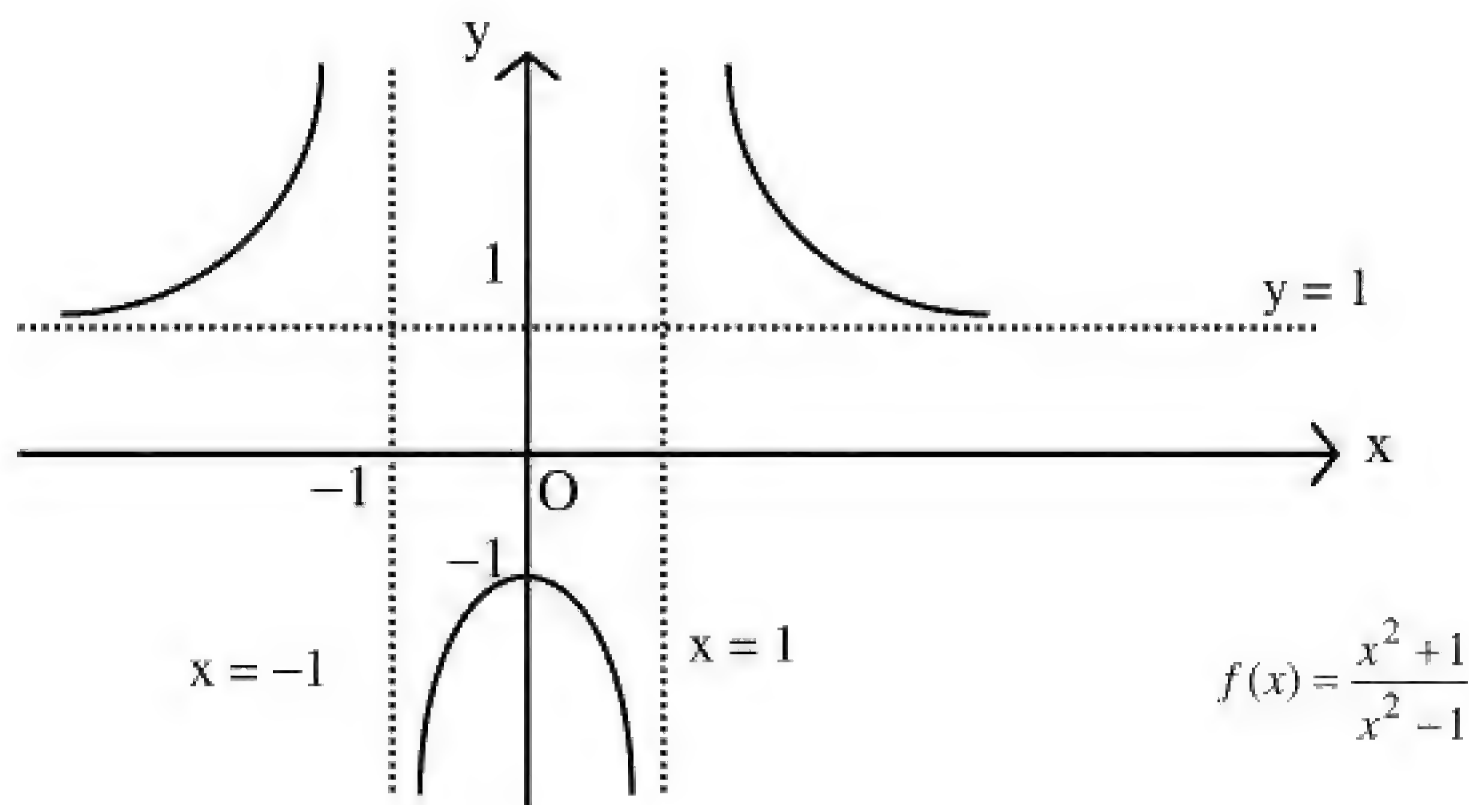
إشارة المشتقة الثانية:

$-\infty$	+	-1	-	1	+	∞
	⌒		⌒		⌒	

لا يوجد نقاط انقلاب للمنحني

(٤) المنحني متناظر بالنسبة للمحور y.

(٥)الرسم:



شكل (١٤, ٨).

(ج) رسم الدوال الجبرية

مثال (١٢, ٨)

ارسم المنحني الذي معادلته:

$$y = f(x) = x^{\frac{4}{3}} + 4x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{3}}(x + 4)$$

الحل

(١) المشتقة الأولى:

$$f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} + \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{4}{3}(x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{2}{3}})$$
$$= \frac{4}{3}\left(x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\right) = \frac{4(x + 1)}{3x^{\frac{2}{3}}}$$

الأعداد الحرجة: $x = -1 \Leftarrow f'(x) = 0$

والمشتقة غير موجودة عند $x = 0$ (الدالة معرفة عند $x = 0$)

فالعددان الحرجان هما: $0, -1$

إشارة المشتقة الأولى:

x	$-\infty$	-1	0	∞
f'(x)	-	0	+	+
f(x)	∞	-3	0	∞

إذن: $f(-1) = -3$ قيمة صغرى محلية للدالة.

(٢) المشتقة الثانية:

$$f''(x) = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{3} x^{-\frac{5}{3}} \right)$$

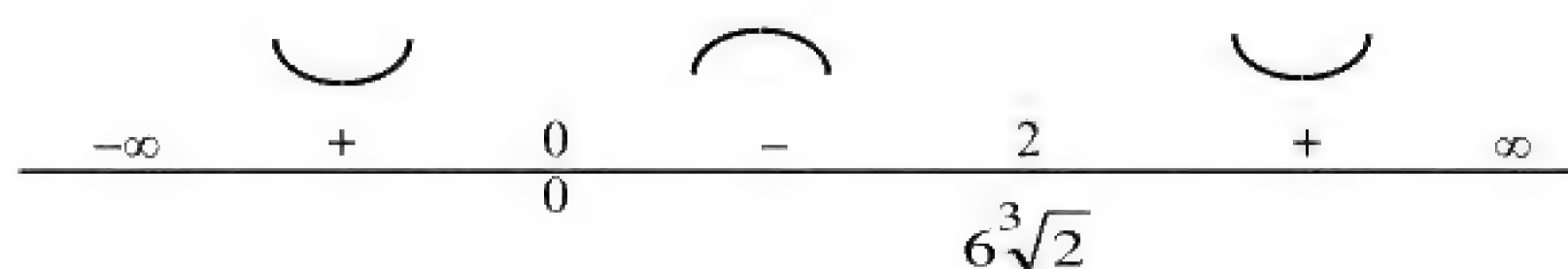
$$= \frac{4}{9} (x^{-\frac{2}{3}} - 2x^{-\frac{5}{3}}) = \frac{4}{9} \left(\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} - \frac{2}{x^{\frac{5}{3}}} \right)$$

$$= \frac{4}{9} \frac{(x-2)}{x^{\frac{5}{3}}}$$

جذر المشتقة: $x = 2$

والمشتقة الثانية غير موجودة عند $x = 0$ ($x = 0$ من مجال الدالة).

إشارة المشتقة الثانية:



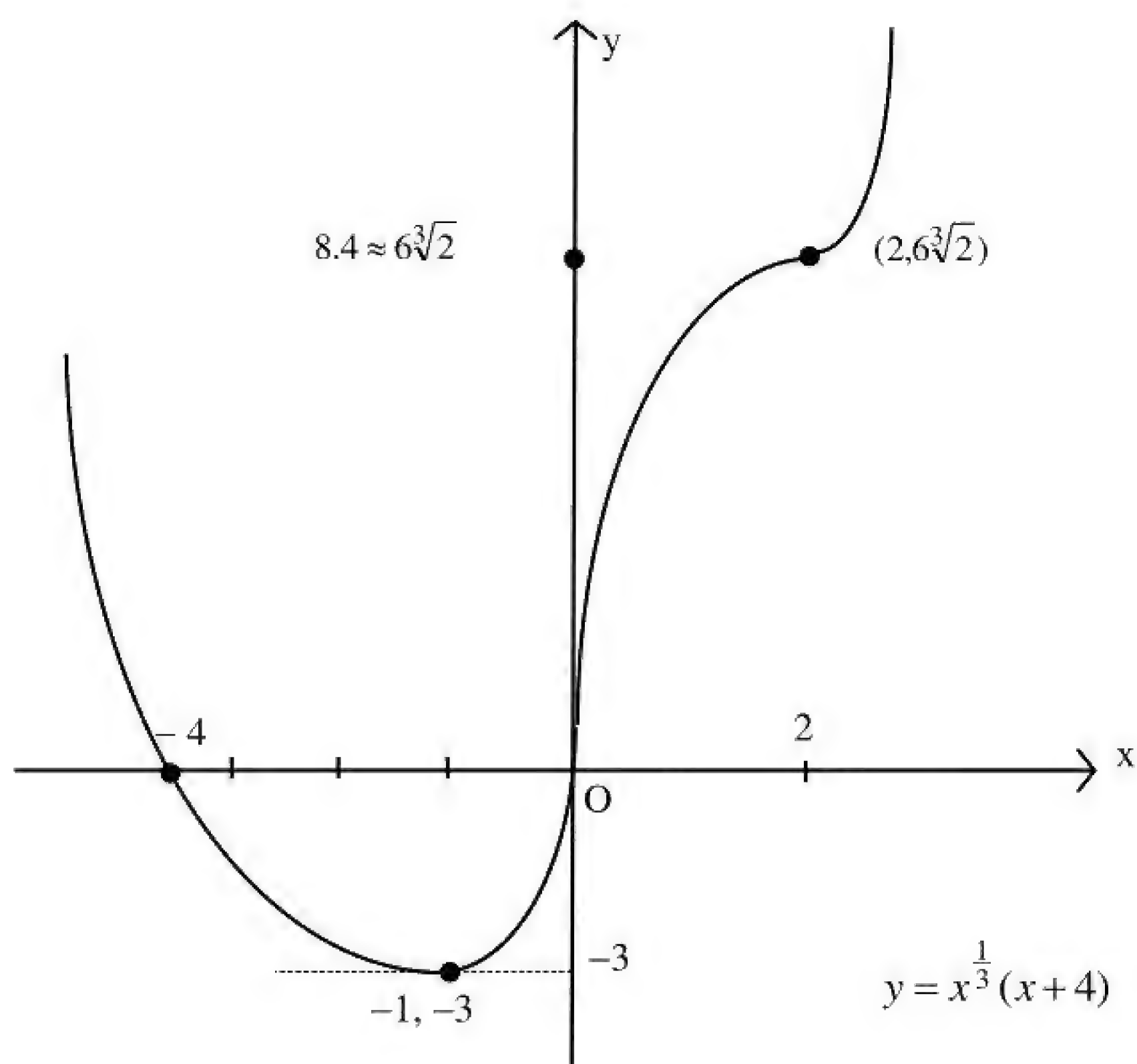
نقطتا الانقلاب: $(0,0), (2,6^3\sqrt{2})$

(٣) نقاط التقاطع:

$$\left. \begin{array}{l} x = -4, x = 0 \Leftarrow y = 0 \\ y = 0 \Leftarrow x = 0 \end{array} \right\}$$

إذن، نقاط التقاطع: $(0,0), (-4,0)$

(٤) الرسم:



شكل (١٥، ٨).

مثال (١٣، ٨)

ارسم المنحني: $f(x) = x^{\frac{4}{5}}$

الحل

(١) المشتقة الأولى: $f'(x) = \frac{4}{5} x^{-\frac{1}{5}} = \frac{4}{5} \frac{1}{\sqrt[5]{x}}$

العدد الحرج الوحيد $x = 0$ (لاحظ أن $x = 0$ نقطة من مجال الدالة).

إشارة المشتقة الأولى:

x	$-\infty$		0		∞
$f'(x)$		-	$-\infty$	$+\infty$	+
f(x)	∞	\searrow	0	\nearrow	∞

لاحظ أن: $f(0) = 0$ قيمة صغرى محلية للدالة.

(٢) المشتقة الثانية:

$$f''(x) = \frac{-4}{25} x^{-\frac{6}{5}}$$

$$= \frac{-4}{25} \frac{1}{\sqrt[5]{x^6}}$$

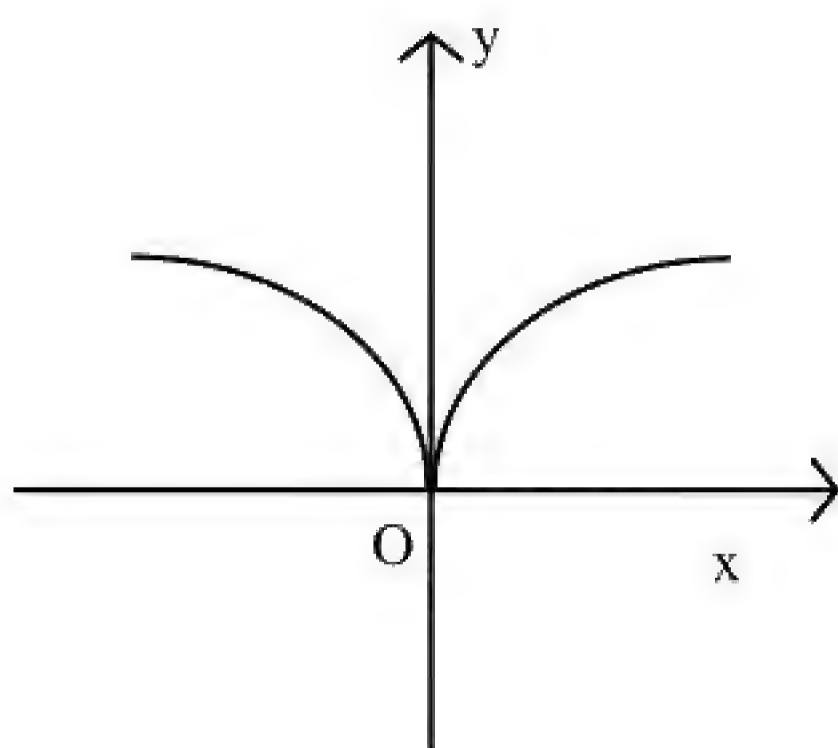
إشارة المشتقة الثانية:

إشارة المشتقة الثانية

$-\infty$	-	0	-	∞
		$f(0)=0$		

(٣) الرسم:

لاحظ أن المنحني متناظر بالنسبة للمحور y
وأن (0,0) هي نقطة التقاطع الوحيدة مع
محوري الإحداثيات.



شكل (١٦, ٨).

نسمي النقطة 0 نقطة بروز للمنحني لأن:

(يصح أن تكون النهاية عن يسار $+\infty$ وعن يمين $-\infty$) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \infty$
والمنحني يمس محور الصادات عند 0 عن يمين ويسار.

(د) رسم الدوال المثلثية

مثال (١٤، ٨)

ارسم المنحني الذي معادلته:

$$y = f(x) = \tan 2x$$

الحل

(١) من الملاحظ أن الدالة f دالة دورية ودورها $\frac{\pi}{2}$ ، لأن:

$$f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \tan 2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \tan(2x + \pi) = \tan 2x \\ = f(x)$$

يكفي رسمها على الفترة $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ وبتكرار هذا الجزء يمئة ويسرة نحصل على المنحني بأكمله.
المنحني متناظر بالنسبة لنقطة الأصل لأن دالة الظل دالة فردية.

(٢) من الملاحظ أن:

$$x \rightarrow \frac{\pi^-}{4} \Rightarrow f(x) \rightarrow \infty \quad , \quad \text{إذن: } x = \frac{\pi}{4} \text{ مستقيم مقارب.}$$

$$x \rightarrow -\frac{\pi^+}{4} \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty \quad , \quad \text{إذن: } x = -\frac{\pi}{4} \text{ مستقيم مقارب.}$$

(٣) المشتقة تساوي:

$$f'(x) = 2 \sec^2 2x$$

إشارة المشتقة:

x	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
$f'(x)$		+
f(x)	$-\infty$	\nearrow ∞

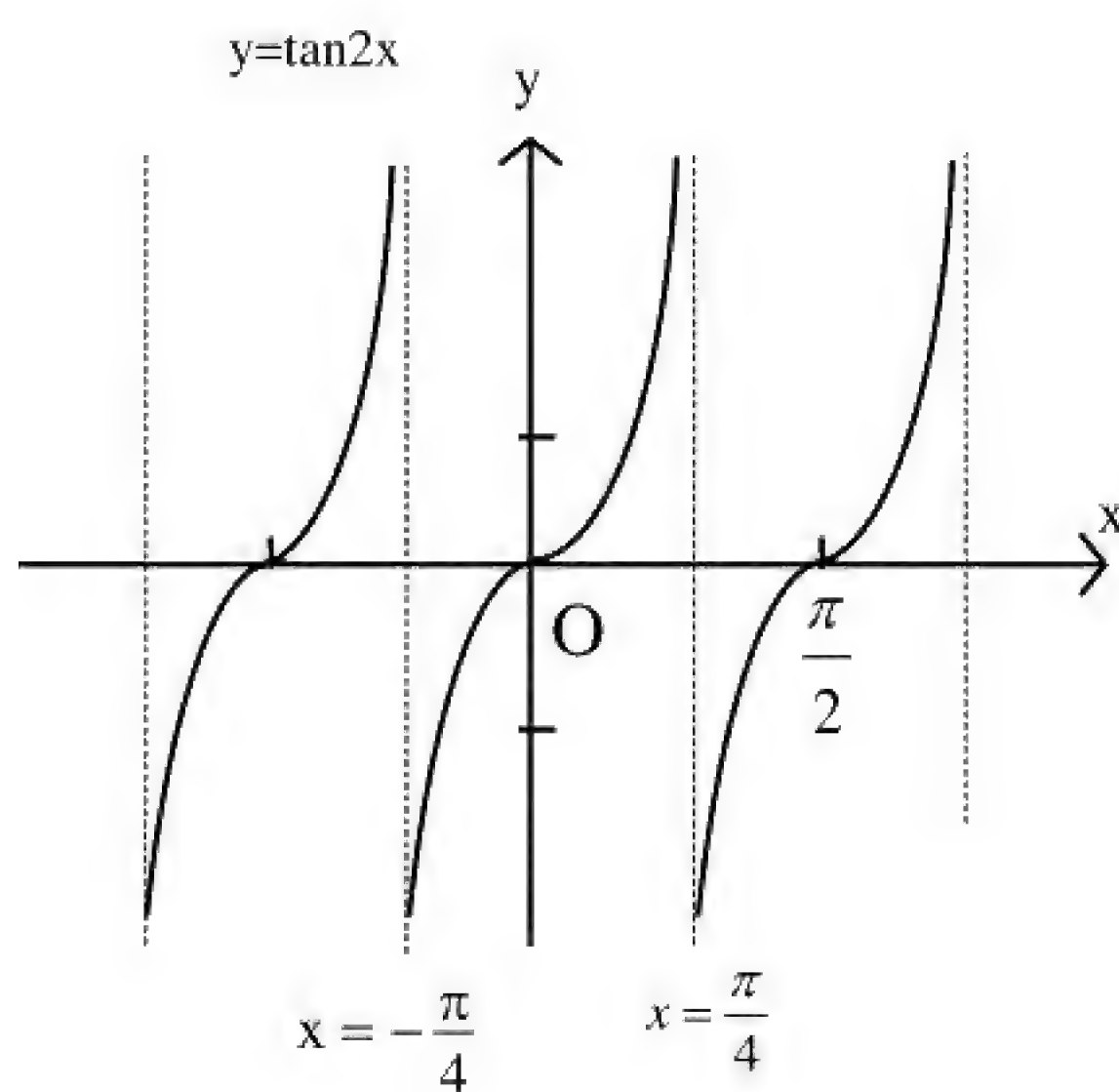
(٤) المشتقة الثانية: $f''(x) = 8 \sec^2 2x \tan 2x$

إشارة $f''(x)$	$-\frac{\pi}{4}$	$-$	0	$+$	$\frac{\pi}{4}$
			$f(0)=0$		

لاحظ أن $(0,0)$ هي نقطة انقلاب للمنحني.

(٥) نلاحظ أيضاً أن $(0,0)$ هي نقطة التقاطع الوحيدة مع محوري الإحداثيات.

(٦) الرسم:



شكل (١٧، ٨).

تمارين (١, ٨)

أوجد المستقيمات المقاربة الأفقية والعمودية فيما يلي:

$$y = \frac{2x-3}{x-4} \quad (٢)$$

$$y = \frac{1}{x-1} \quad (١)$$

$$y = \frac{x}{(x-1)(x^4+1)} \quad (٤)$$

$$y = \sqrt{\frac{x^2+1}{x}} \quad (٣)$$

$$y = \frac{x^3}{x^2+1} \quad (٦)$$

$$y = \frac{x^3}{x(x-1)(x^2+5)} \quad (٥)$$

$$y = \frac{\sin(x-1)}{x-1} \quad (٨)$$

$$y = \frac{1}{(x^2-4)(x^2-9)} \quad (٧)$$

$$y = \frac{x \sin x}{x^2+2x} \quad (١٠)$$

$$y = \frac{x^2-1}{x-1} \quad (٩)$$

$$y = \frac{x^2}{x^3-x} \quad (١٢)$$

$$y = \tan^{-1} x \quad (١١)$$

$$y = \frac{2x-3}{\sqrt{x+2}} \quad (١٤)$$

$$y = \sqrt{\frac{x^2-4}{x-1}} \quad (١٣)$$

$$y = \frac{x^2}{x^2-4} \quad (١٦)$$

$$y = \frac{x^2}{x^2+1} \quad (١٥)$$

$$y = \frac{x}{x^2-9} \quad (١٨)$$

$$y = \frac{x}{x^2+4} \quad (١٧)$$

$$y = \csc x \quad (٢٠)$$

$$y = \sec x \quad (١٩)$$

$$y = \sec^{-1} x \quad (٢٢)$$

$$y = \cot^{-1} x \quad (٢١)$$

$$y = \frac{\tan^{-1} x}{x} \quad (٢٤)$$

$$y = \csc^{-1} x \quad (٢٣)$$

$$y = \cot x \quad (٢٦)$$

$$y = \tan x \quad (٢٥)$$

ارسم المنحنيات المعرفة في التمارين (٢٧) وحتى (٣٨) مبيناً فترات التزايد والتناقص، القيم القصوى المحلية، فترات التقعر والتحدب، نقط الانقلاب، التناظرات الممكنة، المستقيمت المقاربة، نقاط التقاطع إن أمكن:

$$f(x) = (x-2)(x-4) \quad (٢٨)$$

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 \quad (٢٧)$$

$$f(x) = 2x^3 - 6x + 1 \quad (٣٠)$$

$$f(x) = x^3 + 1 \quad (٢٩)$$

$$f(x) = (x-1)^3 \quad (٣٢)$$

$$f(x) = x^2(x+1) \quad (٣١)$$

$$f(x) = x^4 - 4x \quad (٣٤)$$

$$f(x) = x^4 + 4 \quad (٣٣)$$

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 \quad (٣٦)$$

$$f(x) = x^4 - 2x^2 \quad (٣٥)$$

$$f(x) = x^5 - 5x \quad (٣٨)$$

$$f(x) = |x^2 - 2x| \quad (٣٧)$$

(٣٩) ارسم المنحنيات المعرفة في التمارين: ٢، ٩، ١٢، ١٥، ١٦، ١٧، ١٨، ١٩، ٢٠، ٢١، ٢٢، ٢٣، ٢٥، ٢٦.

ارسم المنحنيات المعرفة بالمعادلات الآتية:

$$f(x) = \cos 4x \quad (٤١)$$

$$f(x) = \sin 3x \quad (٤٠)$$

$$f(x) = \tan 4x \quad (٤٣)$$

$$f(x) = \tan^{-1} 2x \quad (٤٢)$$

ارسم المنحنيات المعرفة بالمعادلات الآتية:

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}} \quad (٤٥)$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} + 3 \quad (٤٤)$$

$$f(x) = 8x^{\frac{1}{7}} + x^{\frac{8}{7}} \quad (٤٧)$$

$$f(x) = 5x^{\frac{1}{5}} + \frac{5}{6}x^{\frac{6}{5}} \quad (٤٦)$$

$$f(x) = |\sin x| \quad (٤٩)$$

$$f(x) = |x^2 - 5x + 6| \quad (٤٨)$$

الفصل التاسع

التطبيقات APPLICATIONS

(٩, ١) معدلات التغير The rates of change

لتكن f دالة معرفة على الفترة المفتوحة: $I = (a, b)$ بالمعادلة:

$$y = f(x)$$

نعرف متوسط التغير للدالة (The average rate of change) بين الموضع الابتدائي $A(x, f(x))$ والموضع $B(x + h, f(x + h))$ بالشكل:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (x, x+h \in I)$$

إذا كانت نهاية الكسر السابقة موجودة عندما $h \rightarrow 0$ فإننا نسمي هذه النهاية بمعدل التغير للدالة عند x .

مثال (٩, ١)

تتحرك نقطة وفقاً للمعادلة الزمنية:

$$S = 16t^2 \quad (\text{الزمن مقدر بالثانية والمسافة بالقدم}) \quad (٩, ١)$$

(حيث t يمثل الزمن والمتغير S يمثل المسافة المقطوعة ابتداء من بدء الحركة وخلال زمن قدره t).

أوجد متوسط التغير لهذه الدالة بين الموضعين $t_1 = 1, t_2 = 4$. ثم أوجد معدل التغير في اللحظة $t = 3$ مقدرًا بالقدم لكل ثانية (ft/sec).

الحل

متوسط التغير يساوي:

$$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{16(4)^2 - 16}{3} = \frac{15(16)}{3} = 80 \text{ ft/sec}$$

(نسمي متوسط التغير هنا بالسرعة المتوسطة). معدل التغير في اللحظة $t = 3$ (السرعة عند $t = 3$)، هو:

$$S'(3) = 32t|_{t=3} = 96 \text{ ft/sec}$$

ملحوظة (٩, ١)

تمثل المعادلة: $S = \frac{1}{2}gt^2$ (g تسارع الجاذبية الأرضية).
المعادلة الزمنية لحركة جسم يسقط سقوطاً حراً وبدون سرعة بدء ابتداء من نقطة معينة وتمثل S المسافة المقطوعة ابتداء من بدء الحركة. لو عوضنا عن g بما يساويها حصلنا على المعادلة (٩, ١).

مثال (٩, ٢)

بدأ المطر ينهمر على بحيرة سد، فلاحظ الفني أن الماء يرتفع في بحيرة السد بانتظام وبمعدل تغير قدره 0.01 سم/ثا (سرعة ارتفاع الماء). إذا كان ارتفاع الماء لحظة هطول المطر 2 متر والارتفاع المسموح أن يبلغه الماء هو 11 متراً، وإذا فرضنا أن المطر استمر في النزول خمس ساعات وبنفس المعدل، فهل يدق الفني جرس الإنذار منذراً بالخطر؟

الحل

بما أن معدل ارتفاع الماء معدل منتظم، فإن الزمن اللازم لارتفاع الماء تسعة أمتار فوق معدله يساوي:

$$\text{الزمن} = \frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}} = \frac{900}{0.01} = 90000 \text{ ثانية}$$

$$\text{أو: } 25 \text{ ساعة} = \frac{100}{4} = \frac{900}{36} = \frac{90000}{3600}$$

إذن لن يحتاج الفني لدق جرس الإنذار.

مثال (٩, ٣)

سلم طوله 10 أمتار ينزلق طرفه على أرض أفقية بمعدل تغير قدره 1 سم/ثا. فما معدل انزلاق طرفه الآخر على الحائط العمودي في اللحظة التي يبعد بها هذا الطرف عن الأرض مسافة قدرها 6 أمتار.

الحل

نفرض أن:

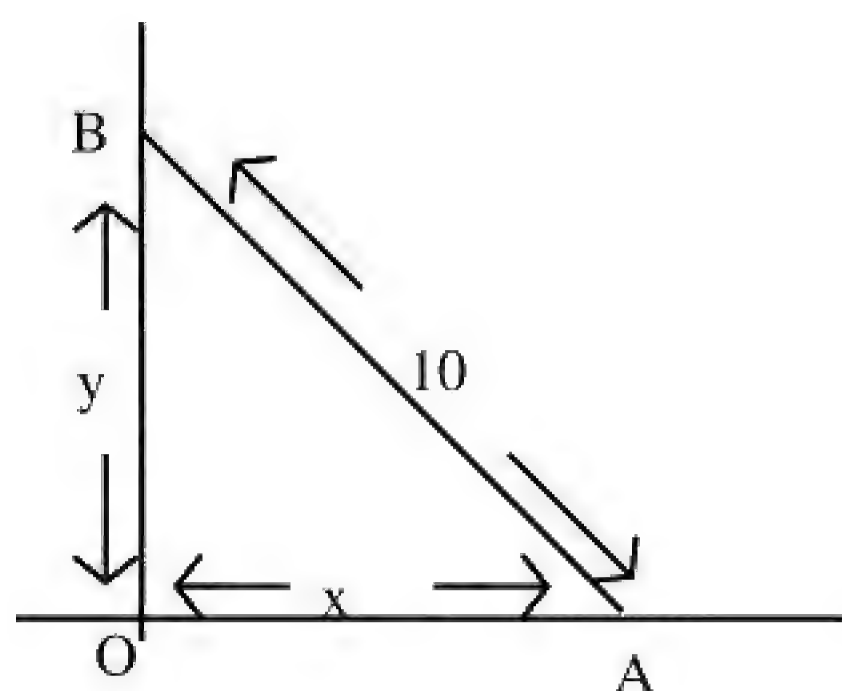
$$|OB| = y, |OA| = x$$

حسب نظرية فيثاغورث:

$$x^2 + y^2 = 100$$

نعلم أن معدل انزلاق A هو:

$$\frac{dx}{dt} = 0.01 \text{ (متر لكل ثانية، m/s).}$$



(٩, ٢)

شكل (٩, ١).

لحساب $\frac{dy}{dt}$ معدل انزلاق B في اللحظة التي يكون فيها $y = 6$ ، نشق طرفي المعادلة

(٩, ٢) بالنسبة للزمن t ، فنجد:

$$2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0 \quad (٩, ٣)$$

وعندما $y = 6$ ، فإن $x = 8$ وذلك استنادا للعلاقة (٩, ٢). بالتعويض في المعادلة (٩, ٣)،

$$\text{نجد: } \frac{dy}{dt} = -\frac{0.04}{3} \text{ m/sec} \Leftarrow 2(8)(0.01) + 2(6) \frac{dy}{dt} = 0$$

مثال (٩, ٤)

تدوب كرة ثلجية محافظة على شكلها. فإذا كان معدل تناقص طول نصف قطرها يساوي

$\frac{1}{9} \text{ cm/s}$ ، فما معدل تناقص حجمها في اللحظة التي يكون طول نصف قطرها يساوي 3cm. ما هو

معدل تناقص مساحتها السطحية عند ذلك؟

الحل

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad (\text{The volume of sphere}) = \text{حجم الكرة}$$

(r طول نصف القطر)، إذن:

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi cm^3 / \text{sec} \Leftarrow \frac{dV}{dt} = 4\pi(3)^2 \left(\frac{1}{9}\right) \Leftarrow \frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

مساحة الكرة (The Area of sphere): $S = 4\pi r^2$ ، ومنه:

$$\frac{dS}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt} = 8\pi(3) \frac{1}{9} = \frac{8}{3}\pi cm^2 / \text{sec}$$

مثال (٥، ٩)

انطلقت سيارة من النقطة A شرقا بمعدل تغير قدره 60 كم/سا، وانطلقت شمالاً من نفس النقطة وبنفس الوقت سيارة أخرى بمعدل تغير قدره 80 كم/سا. فما معدل التباعد بينهما بعد ساعة واحدة من نقطة انطلاقهما؟

الحل

نفرض أن موقع السيارة الأولى عند اللحظة t يقع على بعد x من نقطة البدء A. وأن موقع السيارة الثانية يقع على بعد y من النقطة A، ونفرض أن: $|CB| = z$ ، فإن:

$$z^2 = x^2 + y^2 \quad (٩، ٤)$$

لنشتق الطرفين بالنسبة للزمن فنجد:

$$2z \frac{dz}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} \quad (٩، ٥)$$

بعد ساعة من نقطة انطلاقهما، فإن:

$$y = 80, x = 60$$

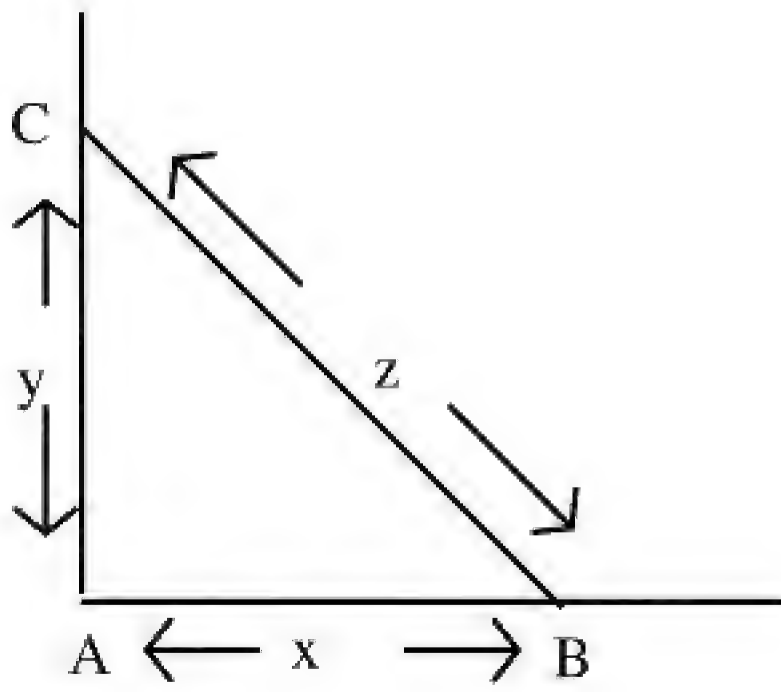
ومن العلاقة (٩، ٤)، نجد أن:

$$z=100. \text{ وبما أن } \frac{dx}{dt} = 60, \frac{dy}{dt} = 80.$$

وبالتعويض في العلاقة (٩، ٥)، نجد:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{60(60) + 80(80)}{100} = 100$$

فمعدل التباعد يساوي 100 كم/سا.



شكل (٩، ٢).

مثال (٩, ٦)

فرق الجهد في دائرة كهربية يساوي 100 فولت. إذا رمزنا لشدة التيار الكهربائي بالرمز I مقدرة بالأمبير وللمقاومة بالرمز R مقدرة بالأوم، فأوجد معدل تغير شدة التيار بالنسبة للمقاومة بوجه عام ثم أوجد هذا المعدل إذا كان: $R=15$.

الحل

العلاقة بين فرق الجهد وشدة التيار والمقاومة هي:

$$I = \frac{100}{R}$$

إذن معدل تغير I بالنسبة للمقاومة R هو: $\frac{dI}{dR} = -\frac{100}{R^2}$ ، وعندما $R = 15$ ،

$$\frac{dI}{dR} = -\frac{100}{225} = -\frac{4}{9}$$

إذن: عندما $R = 15$ ، فإن شدة التيار تتناقص بمعدل تغير قدره $\frac{4}{9}$ أمبير لكل أوم.

مثال (٩, ٧)

يُصب سائل (liquid) في مخروط دوراني (circular cone) طول نصف قطره يساوي 8cm وارتفاعه 12 cm (altitude). إذا كان:

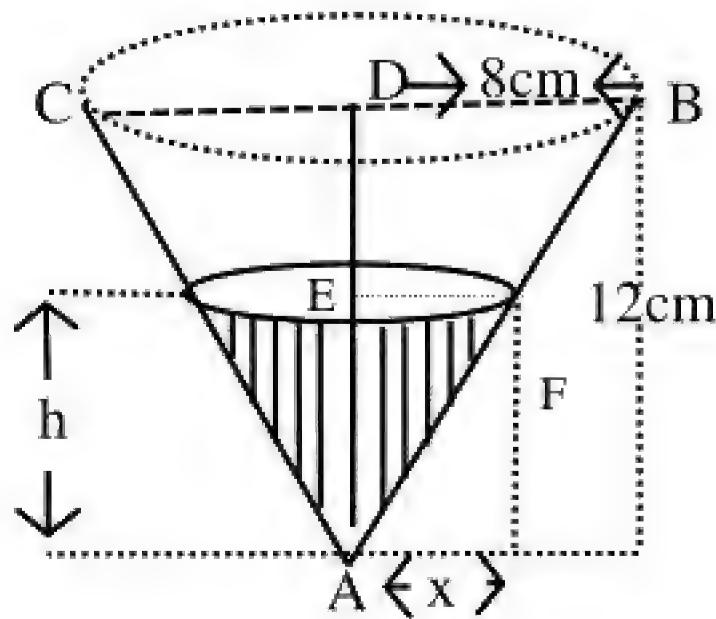
معدل تغير حجم السائل المنسكب يساوي $\frac{4\pi}{9} \text{ cm}^3 / \text{s}$ ، فأوجد معدل ارتفاع السائل في المخروط في اللحظة التي يكون فيها ارتفاع السائل يساوي 5cm.

الحل

نفرض أن طول نصف قطر مخروط السائل يساوي x وأن ارتفاعه يساوي h ، عندئذ فإن حجم مخروط السائل يساوي:

$$V = \frac{1}{3} \pi x^2 h \quad (٩, ٦)$$

من تشابه المثلثين ADB ، AEF ، نجد:



شكل (٩, ٣).

$$\frac{\text{ارتفاع مخروط السائل}}{\text{ارتفاع المخروط}} = \frac{x}{8} = \frac{h}{12} = \frac{\text{طول نصف قطر مخروط السائل}}{\text{طول نصف قطر المخروط}}$$

ومنه: $x = \frac{2}{3}h$. بالتعويض في العلاقة (٩, ٦)، نجد:

$$V = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{4}{9} h^2 \right) h = \frac{4}{27} \pi h^3$$

لنشتق طرفي المعادلة بالنسبة للزمن t ، فنجد:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{9} \pi h^2 \frac{dh}{dt}$$

لكن: $h = 5$ ، $\frac{dV}{dt} = \frac{4\pi}{9}$. بالتعويض في المساواة السابقة، نجد:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{25} \Leftrightarrow \frac{4\pi}{9} = \frac{4\pi}{9} (25) \frac{dh}{dt}$$

إذن: معدل تغير ارتفاع السائل هو: 0.04 cm/sec .

مثال (٩, ٨)

صفيحة معدنية مستطيلة الشكل تتمدد تحت تأثير الحرارة محافظة على شكلها. إذا كان معدل تغير طولها يساوي 0.01 سم/ثا ، ومعدل تغير عرضها يساوي 0.02 سم/ثا . فما معدل تغير مساحتها في اللحظة التي يكون طولها يساوي 40 سم وعرضها يساوي 30 سم .

الحل

(٩, ٧) مساحة الصفيحة: $s = xy$

حيث x, y بعدا الصفيحة (x طولها، y عرضها).

من (٩, ٧) وبالاشتقاق بالنسبة للزمن، نجد:

(٩, ٨) $\frac{ds}{dt} = \frac{dx}{dt} y + x \frac{dy}{dt}$

لكن: $y = 30$ ، $x = 40$ ، $\frac{dy}{dt} = 0.02$ ، $\frac{dx}{dt} = 0.01$

بالتعويض في (٩, ٨)، نجد: $\frac{ds}{dt} = 0.01(30) + 40(0.02)$

إذن: $\frac{ds}{dt} = 0.30 + 0.80 = 1.1 \text{ cm}^2 / \text{sec}$

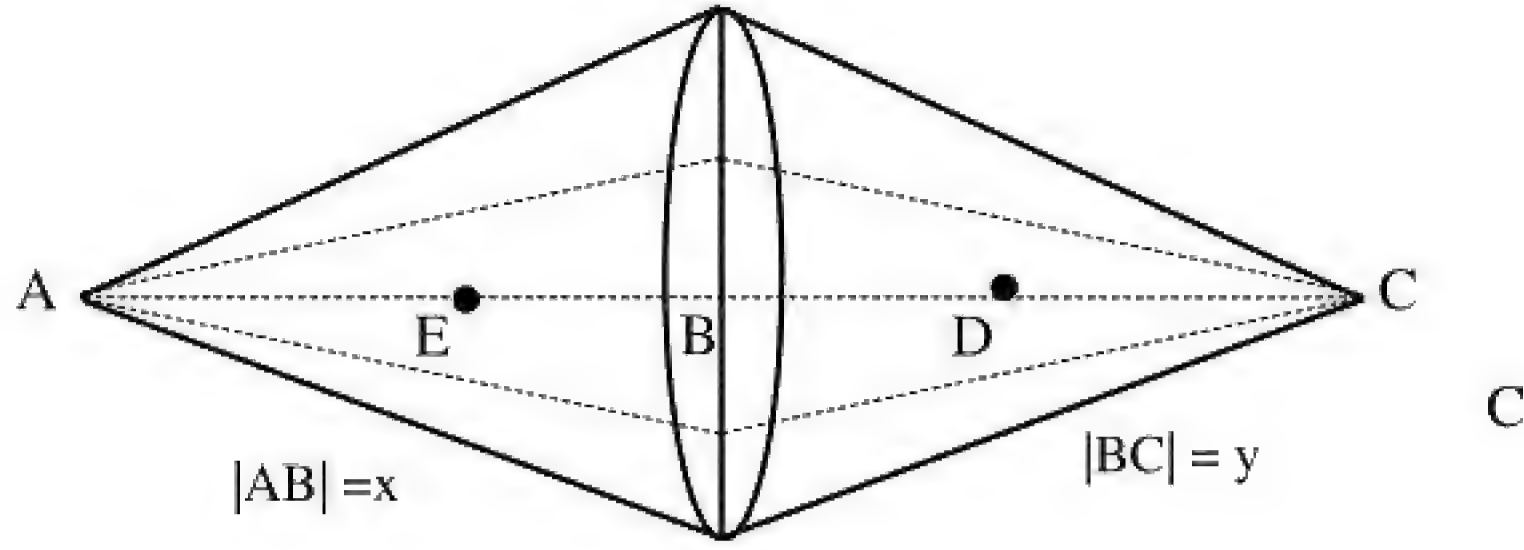
مثال (٩, ٩)

نقطة مضيئة A تقع أمام عدسة محدبة (convex lens) وتبعد عنها بقدر x سم، فإذا كانت C صورة A تبعد عن العدسة y سم وكانت النقطة وصورتها تقعان على المحور الأساسي للعدسة كما هو موضح في الشكل:

(١) اكتب العلاقة بين x ، y ونصف قطر العدسة.

(٢) أوجد معدل تغير y بالنسبة للمتغير x

(٣) إذا كان: $x = 20$ ، $r = 4$ ، فأوجد هذا المعدل.



$|EB| = |BD| = r$ نصف قطر العدسة

شكل (٩, ٤).

(١) العلاقة بين x , y , r

(٩, ٩)

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

(٢) لنشتق الطرفين بالنسبة للمتغير x، فنجد:

$$0 = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx}$$

(٩, ١٠)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{x^2}$$

ومنه:

(٣) بما أن: $x = 20$ ، $r = 4$ ، فإن:

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{4} - \frac{1}{20} = \frac{5-1}{20} = \frac{4}{20} \Rightarrow y = 5$$

(استنادا للعلاقة (٩, ٩)).

بالتعويض في المعادلة (٩, ١٠)، نجد:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(5)^2}{(4 \times 5)^2} = -\frac{1}{16}$$

إذن y يتناقص بمعدل تغير قدره $\frac{1}{16} \text{ cm}$ لكل تزايد قدره 1 cm للمتغير x .

مثال (٩, ١٠)

نقطة تتحرك على محيط الدائرة (circle):

$$(9, 11) \quad x^2 + y^2 - 2x - 2y = 3$$

أوجد العلاقة بين $\frac{dx}{dt}$ و $\frac{dy}{dt}$ (مركبتي متجه سرعة النقطة (x, y)) أثناء تحركها على محيط الدائرة، إذا كان:

$$\frac{dx}{dt} = 2 \text{ cm/sec} \text{ عند النقطة } (0, -1), \text{ فأوجد } \frac{dy}{dt}$$

الحل

لنشتق طرفي المعادلة (٩, ١١) بالنسبة للزمن:

$$2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} - 2 \frac{dx}{dt} - 2 \frac{dy}{dt} = 0$$

$$(9, 12) \quad \frac{dx}{dt}(x-1) = \frac{dy}{dt}(1-y) \quad \text{ومنه:}$$

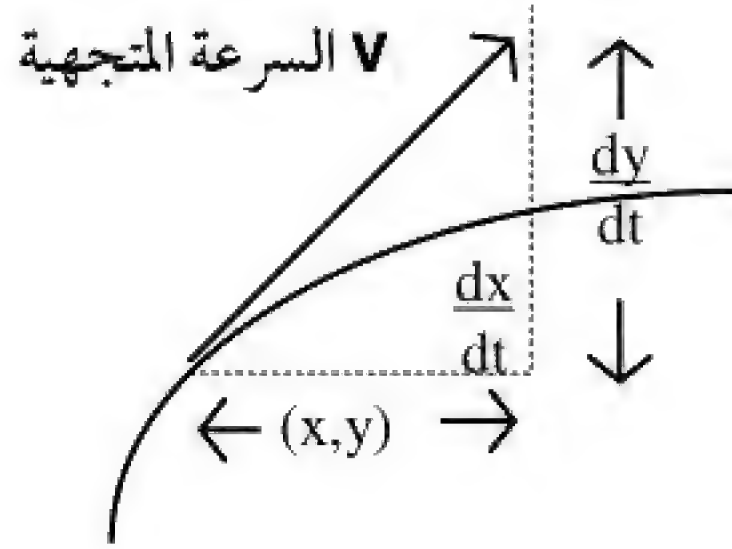
بالتعويض في المساواة (٩, ١٢)، نجد:

$$2(0-1) = \frac{dy}{dt}(1+1)$$

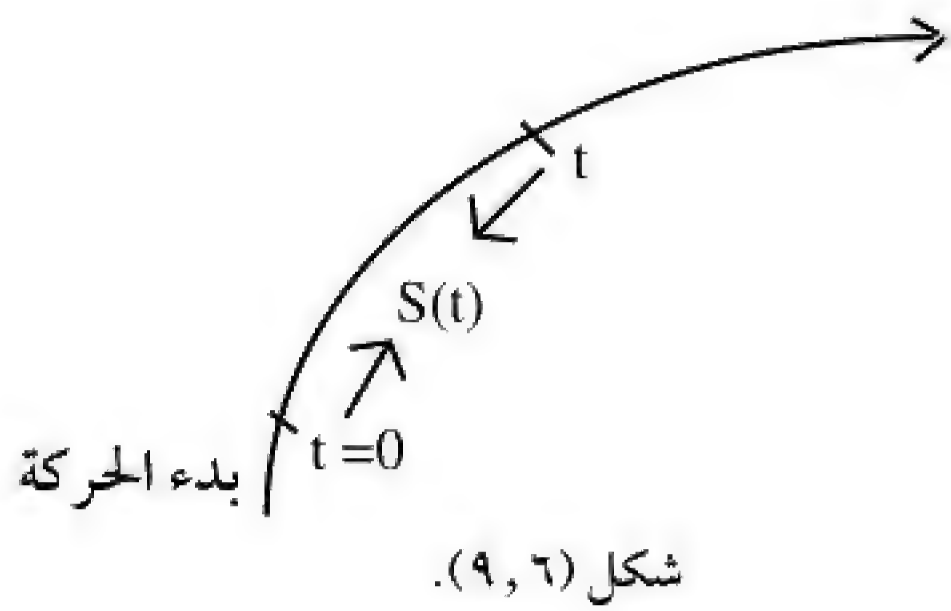
ومنه: $\frac{dy}{dt} = -1 \text{ cm/sec}$ وهي مركبة متجه السرعة باتجاه المحور y عند النقطة $(0, -1)$.

لو أردنا إيجاد قيمة متجه السرعة (السرعة العددية) عند هذه النقطة لوجدنا:

$$|v| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{(2)^2 + (1)^2} = \sqrt{5} \text{ cm/sec}$$



شكل (٩, ٥).



مثال (٩, ١١)

تتحرك نقطة على منحنى وفقاً
للمعادلة الزمنية:

$$s(t) = t^3 - t^2 + t$$

(أ) أوجد سرعة النقطة عند:

$$t = 2, t = 1$$

(ب) التسارع (acceleration) (العجلة) في اللحظة $t = 0$ والمسافة المقطوعة عند ذلك مقدرة
بالسنتيمتر لكل ثانية.

الحل

(أ) السرعة (معدل التغير):

$$\frac{ds}{dt}(1) = 3t^2 - 2t + 1 \Big|_{t=1} : t = 1 \text{ عند } (1) \\ = 3 - 2 + 1 = 2 \text{ cm/s}$$

$$\frac{ds}{dt}(2) = 3(2)^2 - 4 + 1 = 9 \text{ cm/s} : t = 2 \text{ عند } (2)$$

(ب) التسارع (معدل التغير للسرعة)

$$\frac{d^2s}{dt^2} = 6t - 2 \Big|_{t=0} : t = 0 \text{ عند } = -2$$

تتناقص السرعة بمعدل تغير قدره 2 cm/sec^2 (2 سم في الثانية لكل ثانية (2 سم/ث^٢). المسافة المقطوعة عند ذلك هي: $s(0)=0$ أي أن المتحرك عند نقطة البدء.

مثال (٩, ١٢)

تقذف قذيفة (projectile) رأسياً إلى أعلى بسرعة بدء قدرها 160 ft/sec وتتحرك تحت تأثير الجاذبية الأرضية فقط. نعلم أن معادلة قذيفة تخضع لنفس الشروط هي من الشكل:

$$s(t) = V_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

حيث g تسارع الجاذبية الأرضية، v_0 سرعة البدء، $s(t)$ المسافة المقطوعة عند الزمن t . معادلة القذيفة هنا هي من الشكل:

$$s(t) = 160 t - 16 t^2$$

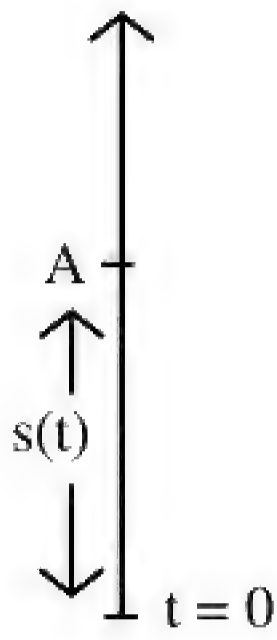
أوجد:

(١) أعلى موضع (the maximum altitude) يبلغه

الجسم والتسارع عند ذلك.

(٢) متى تعود النقطة إلى موضعها الأصلي؟ وما سرعتها العددية عند ذلك؟ (السرعة العددية $v = \left| \frac{ds}{dt} \right|$).

الحل



(١) تبلغ القذيفة أعلى موضع لها عندما $\Leftrightarrow \frac{ds}{dt} = 0$

شكل (٩, ٧).

$$t = \frac{160}{32} = 5 \Leftrightarrow \frac{ds}{dt} = 160 - 32t = 0$$

أي بعد 5 ثوان. التسارع عند ذلك يساوي: $\frac{d^2s}{dt^2} = -32$ وهذا مقدار ثابت دوماً ويساوي بقيمته المطلقة تسارع الجاذبية الأرضية. نسمي مثل هذه الحركة بالحركة المتغيرة بانتظام (التسارع مقدار ثابت). أما المسافة فتساوي:

$$s(5) = 160(5) - 16(5)^2 = 800 - 400 = 400\text{ ft}$$

(٢) تعود النقطة إلى موضعها الأصلي عندما:

$$s(t) = 160t - 16t^2 = 0 \Rightarrow$$

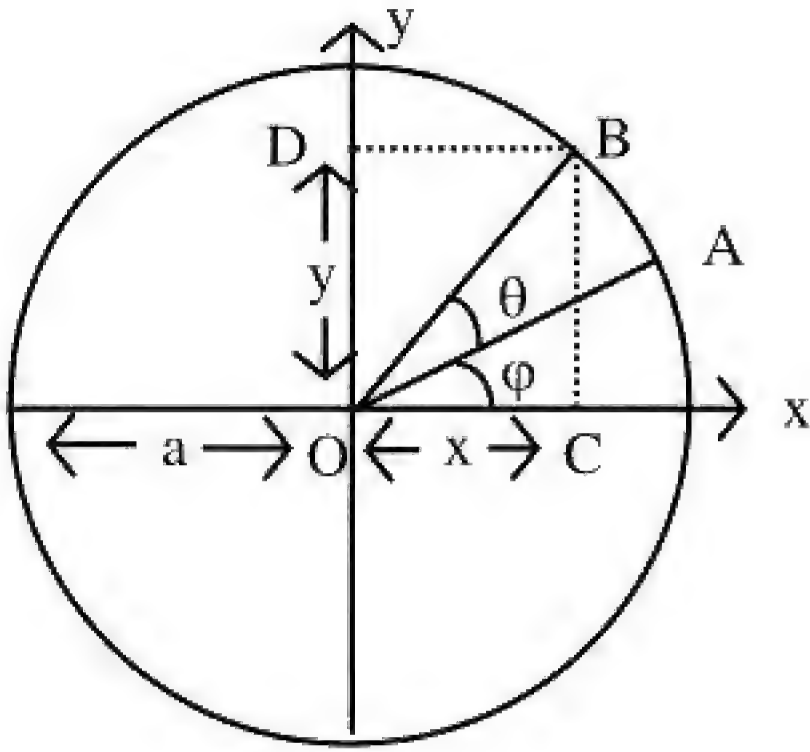
$$t(160 - 16t) = 0$$

هناك احتمالان: إما $t = 0$ وهذا زمن بدء الحركة أو $t = \frac{160}{16} = 10\text{sec}$ وهذا زمن عودة النقطة إلى موضعها الأصلي. من الملاحظ أن زمن صعود القذيفة يساوي 5 ثوان، وزمن الهبوط هو أيضا 5 ثوان.

سرعتها عند عودتها: $\frac{ds}{dt}(10) = 160 - 32(10) = -160\text{ft/sec}$ ، أما السرعة العددية فهي: $|\frac{ds}{dt}(10)| = 160\text{ft/sec}$.

الحركة التوافقية والدائرية المنتظمة

تتحرك نقطة B على دائرة طول نصف قطرها a وتقطع أقواسًا أطوالها متساوية خلال أزمنة متساوية (حركة دائرية منتظمة). فإذا كانت السرعة الزاوية تساوي ω (مقدار ثابت)، فإن الزاوية المقطوعة ابتداء من بدء الحركة A تساوي:



شكل (٨, ٩).

$$\theta = \omega t \quad (\omega > 0) \quad (\theta \text{ زاوية OB مع OA})$$

فإذا كان OA يصنع زاوية ثابتة قدرها φ مع المحور \vec{x} ، فإن إحداثيي النقطة المتحركة B هما على الترتيب:

$$(٩, ١٣) \quad x = a \cos(\theta + \varphi) = a \cos(\omega t + \varphi)$$

$$(٩, ١٤) \quad y = a \sin(\theta + \varphi) = a \sin(\omega t + \varphi)$$

تتحرك النقطة C مسقط B على المحور x وفقًا للمعادلة (٩, ١٣). نسمي هذه الحركة المعرفة بهذه المعادلة بالحركة التوافقية البسيطة.

كما تتحرك النقطة D مسقط B على المحور y وفقًا للمعادلة (٩, ١٤). نسمي هذه الحركة

والمعرفة وفقًا لهذه المعادلة بالحركة التوافقية البسيطة أيضًا. فالحركة التوافقية البسيطة (simple harmonic motion) هي حركة نقطة على مستقيم وفقًا للمعادلة (٩, ١٣) أو المعادلة (٩, ١٤).

أما حركة النقطة B على الدائرة وفقًا للمعادلتين (٩, ١٣)، (٩, ١٤) معًا فتسمى بالحركة الدائرية المنتظمة.

مثال (٩, ١٣)

تتحرك نقطة B على مستقيم وفقًا للمعادلة التالية:

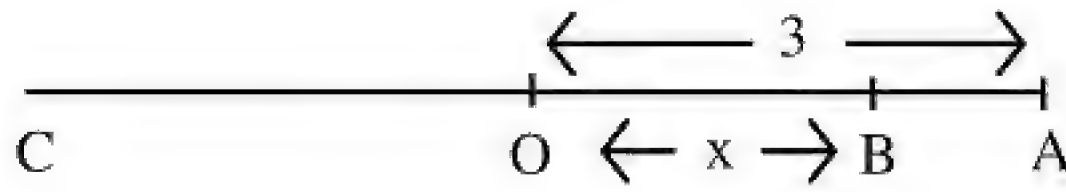
$$x = a \cos(\omega t + \varphi) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{3} t\right)$$

أوجد سعة الحركة a، السرعة الزاوية ω ، دور الحركة $\frac{2\pi}{\omega}$ ، تردد الحركة $\frac{\omega}{2\pi}$ ، السرعة والتسارع في اللحظة t مقدارًا بالسنتيمتر لكل ثانية. العلاقة بين التسارع والمسافة المقطوعة. ثم أعط وصفًا مختصرًا لهذه الحركة.

الحل

سعة الحركة: 3 سم (أبعد مسافة تبلغها النقطة بعيدة عن موضع توازنها 0)

السرعة الزاوية: $\frac{\pi}{3}$ ، دور الحركة $\frac{2\pi}{\pi/3} = 6 \text{ sec}$ ، تردد الحركة: $\frac{1}{6}$ دورة.



$$\left\{ \begin{array}{l} t = 3 \\ v = 0 \end{array} \right\} \leftarrow \left\{ \begin{array}{l} t = \frac{3}{2} \\ |v| = \pi \end{array} \right\} \leftarrow \left\{ \begin{array}{l} t = 0 \\ v = 0 \end{array} \right\}$$

$$\rightarrow t = \frac{9}{2}, |v| = \pi \rightarrow t = 6, v = 0$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\pi \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) \quad \text{السرعة تساوي:}$$

$$\gamma(t) = v' = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\pi^2}{3} \cos\frac{\pi}{3}t \quad \text{التسارع يساوي:}$$

العلاقة بين x والتسارع هي:

$$\gamma(t) = -3 \cdot \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \cos\frac{\pi}{3}t = -\omega^2 x$$

هناك من يعرف الحركة التوافقية بأنها حركة نقطة على مستقيم تتحرك بحيث يكون:

$$\gamma(t) = -\omega^2 x \quad (٩, ١٥)$$

(x المسافة المقطوعة ابتداء من بدء الحركة، $\gamma(t)$ تسارع الحركة ويساوي $\frac{d^2x}{dt^2}$).

وصف الحركة

تتحرك النقطة B على خط الأعداد من الموضع A عند بدء الزمن ($t = 0$) وبسرعة تساوي الصفر ($v = 0$) متجهة نحو 0 بسرعة عددية متزايدة، لتصل هذه النقطة في اللحظة $t = \frac{3}{2}$ حيث تبلغ السرعة (speed) العددية أقصاها: $|v| = \pi$.

تتحرك النقطة من 0 يسارًا وبسرعة عددية متناقصة لتصل الموضع C (أبعد موضع يمكن أن تصله يسارًا) لتصبح سرعتها $v = 0$ عند الزمن $t = 3$ حيث $x = -3$. تتابع النقطة حركتها مغيرة جهة الحركة بسرعة عددية متزايدة و متجهة نحو 0 لتصلها عند $t = \frac{9}{2}$ ولتبلغ سرعتها العددية قيمتها العظمى $|v| = \pi$. تتابع النقطة حركتها بنفس الجهة بسرعة عددية متناقصة لتبلغ الموضع A (نقطة البداية) وبسرعة مقدارها $v = 0$ في اللحظة $t = 6$. وهكذا نجد أن الزمن اللازم للانطلاق من نقطة البدء A والعودة إليه يساوي 6 sec وهو الزمن الدوري (period). أما تردد (frequency) الحركة فهو عدد الدورات المنجزة في الثانية وهنا يساوي $\frac{1}{6}$ دورة. أما السعة (amplitude) فهو أبعد مسافة يمكن أن تبلغها النقطة B وتذكرها عندما تكون في A أو C وهي تساوي 3 cm .

(٩, ٢) الأمثلة

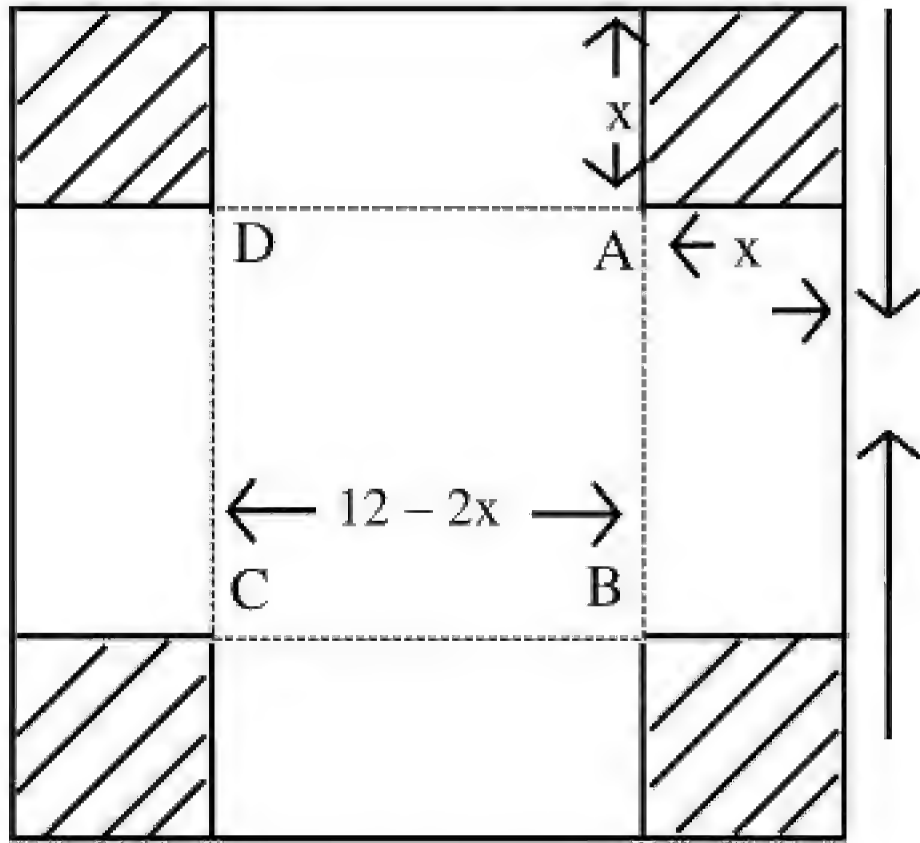
The Optimization

يهتم الرياضيون والاقتصاديون والعاملون في الصناعة بإيجاد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدوال. فالاقتصادي ينشد في عمله إيجاد أقصى ربح ممكن ورجل الصناعة مثلاً يريد صناعة

علبة من الورق المقوى من قطعة محددة من الورق بأكبر حجم ممكن أو مد أنابيب من البترول من موضع إلى آخر بأقل تكلفة ممكنة. والرياضي يبحث عند وضع نموذج رياضي معين مكوّن من دالة تتبع عددًا من المتغيرات عن القيم القصوى لهذه الدالة. فيما يلي سنقدم أمثلة موضحة لذلك وسنسمي القيم التي نحصل عليها بالقيم المثلى ونسمي هذا الموضوع بموضوع الأمثلية.

مثال (٩, ١٤)

في معمل لصناعة علب من الورق المقوى يهتم العاملون بصناعة علبة (من الورق المقوى) بدون غطاء من قطعة مربعة الشكل طول ضلعها 12 cm، وذلك بقص أربعة مربعات متطابقة (identical squares) من أركانها الأربعة ثم ثنيها كما هو موضح بالشكل. ما هي أبعاد العلبة للحصول على أكبر حجم ممكن لها.



شكل (٩, ٩).

الحل

القاعدة للعلبة بعد قص المربعات المربعة هي مربع طول ضلعه $12 - 2x$ فمساحة القاعدة: $(12 - 2x)^2$

وارتفاع العلبة هو x فحجم العلبة (بدون غطاء) هو:

$$V = x(12 - 2x)^2$$

$$6 \geq x \geq 0$$

علماً أن: نريد إيجاد القيم الأمثلية للدالة

المتصلة V على الفترة $[0, 6]$.

$$\text{لذا نحسب المشتقة، فنجد: } \frac{dV}{dx} = (12 - 2x)^2 - 4x(12 - 2x)$$

$$= (12 - 2x)(12 - 2x - 4x) = (12 - 2x)(12 - 6x)$$

والمشتقة تساوي الصفر عندما: $x = 2$ أو $x = 6$ والعددان ينتميان للفترة $[0, 6]$.

لإيجاد القيم المثلى (Optimal values):

(١) نبحث عن قيمتي الدالة V عند العددین الحرجین $x = 2$ ، $x = 6$ ، فنجد:

$$V(6) = 0, V(2) = 2(12 - 4)^2 = 2(8)^2 = 128 \text{ cm}^3$$

(٢) نبحث عن قيمتي الدالة عند طرفي الفترة $[0, 6]$ ، فنجد:

$$V(0) = V(6) = 0$$

إذن القيمة العظمى للدالة V (القيمة المثلى) هي 128 ونحصل عليها عندما $x = 2$ وأبعاد العلبة عند ذلك هي:

$$8, 8, 2$$

مثال (٩, ١٥)

تسقط أشعة الشمس عمودياً على نافذة مستطيلة الشكل محيطها ثابت ويساوي 200 سم. أوجد أبعاد النافذة المصممة من قبل مهندس معماري والتي تسمح بوصول أكبر كمية من الضوء.

الحل

لنفرض أن أحد بعدي النافذة يساوي x سم فيكون البعد الآخر مساوياً: $(100 - x)$ (نصف المحيط - أحد البعدين).
فمساحة المستطيل هي:

$$S = x(100 - x) = 100x - x^2$$

حيث: $100 \geq x \geq 0$ (مجموع البعدين يساوي 100).

لإيجاد القيم المثلى:

$$(١) \text{ نحسب المشتقة، فنجد: } S' = 100 - 2x$$

$$\text{الأعداد الحرجة: } 0 = 100 - 2x \Leftrightarrow x = 50$$

$$\text{قيمة الدالة عند } x = 50: S(50) = 50(50) = 2500$$

قيمتا الدالة عند طرفي الفترة $[0, 100]$:

$$S(0) = S(100) = 0 \text{ (وهنا متساويان)}$$

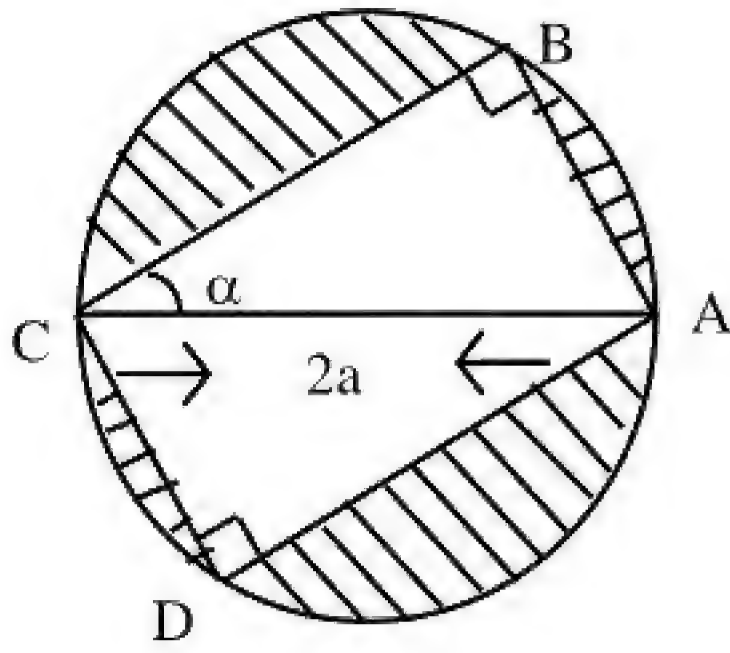
إذن، القيمة المثلى للمساحة: $S(50) = 2500$ ويوافقها $x = 50$.

والبعد الثاني يساوي 50 أيضاً. فالشكل الذي يسمح بوصول أكبر كمية من الضوء هو مربع.

مثال (٩, ١٦)

أنبوب على شكل أسطوانة دائرية قائمة يجري فيه الماء. يريد مهندس زراعي تثبيت مصفاة مستطيلة الشكل على فتحة هذا الأنبوب وبحيث تغلق بقية الفتحة. أوجد أبعاد المصفاة والتي تجعل مساحتها أعظم ما يمكن.

الحل



نفرض أن طول نصف قطر فتحة الأنبوب يساوي a وأن قياس الزاوية ACB يساوي α ، إذن بعدا المستطيل:

$$|AB| = 2a \sin \alpha, |BC| = 2a \cos \alpha$$

فمساحة المصفاة:

$$S = 4a^2 \sin \alpha \cos \alpha = 2a^2 \sin 2\alpha \quad (٩, ١٦)$$

$$(\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha)$$

شكل (٩, ١١).

$\frac{\pi}{2} \geq \alpha \geq 0$ (زاوية حادة في المثلث ABC القائم الزاوية)

لإيجاد القيم القصوى للمقدار S ، نشق فنجد:

$$\frac{dS}{d\alpha} = 4a^2 \cos 2\alpha$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos 2\alpha = 0 \Leftrightarrow \frac{dS}{d\alpha} = 0 \quad \text{جذور المشتقة:}$$

وهو العدد الحرج الوحيد على الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$.

قيمتا الدالة (٩, ١٦) عند طرفي الفترة:

$$S(0) = 0, S(\frac{\pi}{2}) = 0$$

وقيمة الدالة عند $\alpha = \frac{\pi}{4}$ هي: $S(\frac{\pi}{4}) = 2a^2 \sin \frac{\pi}{2} = 2a^2$

إذن: $S(\frac{\pi}{4}) = 2a^2$ هي القيمة العظمى للدالة.

بعدا المستطيل: $|AB| = 2a \sin \alpha = 2a \sin \frac{\pi}{4} = 2a(\frac{\sqrt{2}}{2}) = a\sqrt{2}$

$$|BC| = 2a \cos \alpha = 2a \cos \frac{\pi}{4} = 2a(\frac{\sqrt{2}}{2}) = a\sqrt{2}$$

من الواضح أن البعدين متساويان والشكل يصبح مربعاً.

مثال (٩, ١٧)

يرغب العاملون في أحد مصانع الحليب في تصميم علبة مغلقة حجمها ثابت ويساوي $\frac{352}{7} \text{ cm}^3$ على شكل أسطوانة دائرية (circular cylinder) قائمة. فما هي أبعاد العلبة (طول نصف قطر قاعدتها وطول ارتفاعها) والتي تجعل مساحة المعدن المستخدم أصغر ما يمكن ($\pi \approx \frac{22}{7}$).

الحل

(٩, ١٧)

$$y = \frac{\frac{352}{7}}{\frac{22}{7}x^2} = \frac{16}{x^2} \quad \text{حجم العلبة: } \pi x^2 y = \frac{352}{7} \text{ ومنه:}$$

المساحة الجانبية للعلبة:

$$2\pi x y = \text{محيط القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

مثلا مساحة القاعدة: $2\pi x^2$

$$S = 2\pi x^2 + 2\pi x y \quad \text{المساحة الكلية للعلبة:}$$

$$= 2\pi \left(x^2 + \frac{16}{x} \right)$$

(بالتعويض عن y بدلالة x من (٩, ١٧)).من الملاحظ أن: $\infty > x > 0$

لإيجاد القيمة الصغرى (المطلقة) للدالة:

$$S = 2\pi \left(x^2 + \frac{16}{x} \right)$$

نبحث عن العدد الحرج، فنجد:

$$\frac{dS}{dx} = 2\pi \left(2x - \frac{16}{x^2} \right) = \frac{4\pi(x^3 - 8)}{x^2}$$

$$x = 2 \Leftrightarrow x^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow \frac{dS}{dx} = 0 \text{ ومنه:}$$

$$S(2) = 2\pi(4 + 8) = \frac{24(22)}{7} = \frac{528}{7} \text{ cm}^2 \quad \text{وبالتالي، فإن:}$$

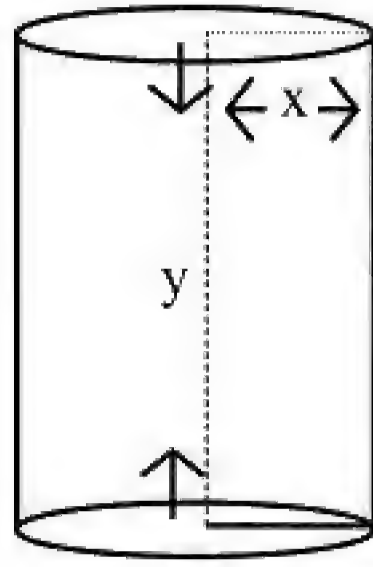
وبملاحظة أن S متصلة على الفترة $(0, \infty)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} S(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} S(x) = \infty \quad \text{وأن:}$$

$$\text{فإن: } S(2) = \frac{528}{7} \text{ هي القيمة الصغرى للدالة.}$$

فطول نصف قطر القاعدة هو: $x = 2 \text{ cm}$ وارتفاع الأسطوانة يساوي:

$$y = \frac{16}{4} = 4 \text{ cm}$$



شكل (٩, ١٢).

مثال (٩, ١٨)

إذا كان عدد الوحدات المنتجة من الآلات الحاسبة والمطلوبة في إحدى الشركات هو x وحدة في اليوم. وكانت تكلفة إنتاج هذا العدد هي:

$$c(x) = 400 + 5x + 0.01x^2$$

فإذا كان سعر مبيع الوحدة هو 50 ريالاً، فأوجد:

(١) دالة المبيع لعدد x من الوحدات.

(٢) دالة الربح (profit function).

(٣) الإنتاج اليومي الموافق لأقصى ربح ممكن والربح الأعظمي في اليوم.

الحل

(١) دالة المبيع تعرف بالشكل: $V = 50x$

(٩, ١٨)

(٢) دالة الربح تعطى بالصورة:

$$R = 50x - c(x)$$

$$= 50x - 400 - 5x - 0.01x^2$$

$$= 45x - 400 - 0.01x^2$$

(٣) لإيجاد الإنتاج اليومي الموافق لأقصى ربح ممكن، نشتق العلاقة

(٩, ١٨)، فنجد:

$$\frac{dR}{dx} = 45 - 0.02x$$

والدالة المعطاة في (٩, ١٨) والتي هي من الدرجة الثانية في x تقبل قيمة عظمى مطلقة

عندما: $\Leftrightarrow \frac{dR}{dx} = 0$

$$x = \frac{45}{0.02} = 2250 \text{ وحدة}$$

والربح الأعظمي هو:

$$\begin{aligned} R(2250) &= 45(2250) - 400 - 0.01(5062500) \\ &= 101250 - 400 - 50625 \\ &= 50225 \end{aligned}$$

مثال (٩, ١٩)

إذا كان عدد الوحدات المنتجة والمطلوبة من سلعة معينة في إحدى المدن هو q وحدة. وإذا كان سعر مبيع الوحدة الواحدة بدلالة عدد الوحدات ولنرمز له بالرمز p معطى بالعلاقة:

$$p = 1000 - 5q \quad (\text{دالة الطلب على السلعة})$$

وإذا كانت التكلفة الكلية لإنتاج هذه الوحدات هو:

$$c = 300q + 13000 \quad (\text{مقدرة بالريال})$$

فأوجد:

- (١) معدل تغير p بالنسبة إلى q مفسراً ما يعنيه ذلك.
- (٢) عدد الوحدات الواجب إنتاجها والمطلوبة لتحقيق أقصى ربح ممكن.
- (٣) سعر الوحدة الموافقة لأقصى ربح.

الحل

$$(١) \text{ معدل التغير هو: } \frac{dp}{dq} = -5$$

وهو مقدار ثابت ومعنى ذلك:

أنه إذا زاد الطلب على هذه السلعة بوحدة واحدة نقص سعر الوحدة الواحدة 5 ريالاً.

(٢) ثمن مبيع q وحدة:

$$\text{سعر الوحدة} \times \text{عدد الوحدات} = pq = (1000 - 5q)q = 1000q - 5q^2$$

دالة الربح الموافق (ثمن المبيع. التكلفة الكلية) هي:

$$R = pq - c = 1000q - 5q^2 - c = 1000q - 5q^2 - 300q - 13000$$

$$R = 700q - 5q^2 - 13000$$

وهذه دالة من الدرجة الثانية في q ويوافقها قيمة عظمى مطلقة ($R'' = -10 < 0$) للربح.

لإيجاد هذه القيمة نشتق R ، فنجد:

$$R' = 700 - 10q$$

$$\text{ومنه: } q = 70 \Leftarrow R' = 0$$

والقيمة العظمى للربح هي: $R(70) = 49000 - 24500 - 13000$

$$= 11500$$

وسعر الوحدة بالريال: $p = 1000 - 350 = 650$

مثال (٩, ٢٠)

أوجد دالة البعد d بين النقطة $B(1, 2)$ والنقطة $A(x, y)$ من المستقيم:
 $y = 2x + 1$
 ثم أوجد النقطة A من هذا المستقيم والتي من أجلها يكون $d(A, B)$ أصغرًا.

الحل

$$\begin{aligned} z &= d(A, B) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} \\ &= \sqrt{(x-1)^2 + (2x+1-2)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (2x-1)^2} \\ &= \sqrt{5x^2 - 6x + 2} \end{aligned}$$

لإيجاد القيمة الصغرى لهذه الدالة:

(١) نحسب المشتقة، فنجد:

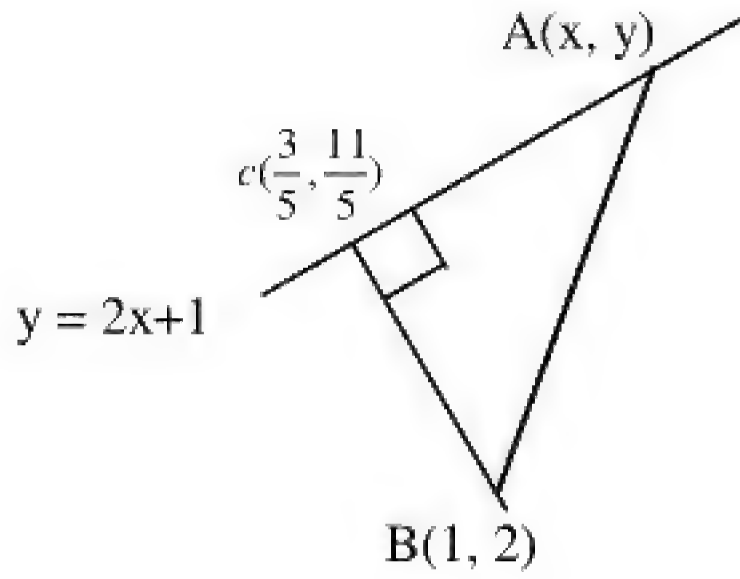
$$z' = \frac{10x - 6}{2\sqrt{5x^2 - 6x + 2}}$$

والعدد الحرج هو: $x = \frac{3}{5}$ (جذر المشتقة)(لاحظ أن المقدار $5x^2 - 6x + 2$ موجب

دومًا لأن مميزه مقدار سالب).

بما أن z متصلة على الفترة $(-\infty, \infty)$ وأن: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} z = \infty$

شكل (٩, ١٢).

وأن قيمة المقدار z عند: $x = \frac{3}{5}$ هي:

$$z\left(\frac{3}{5}\right) = \sqrt{\left(\frac{3}{5} - 1\right)^2 + \left(\frac{6}{5} - 1\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

إذن: $z\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}$ قيمة صغرى للدالة z .والنقطة A الموافقة هي: $C\left(\frac{3}{5}, \frac{11}{5}\right)$

$$\frac{\frac{11}{5}-2}{\frac{3}{5}-1} = \frac{\frac{1}{5}}{-\frac{2}{5}} = -\frac{1}{2} \text{ هو: } CB \text{ ميل}$$

وميل المستقيم هو: 2

هذا يعني أن CB عمودي على المستقيم وأن C مسقط B على المستقيم. الطالب يعلم هذه الحقيقة بشكل هندسي وقد أثبتناها الآن بشكل تحليلي.

مثال (٩, ٢١)

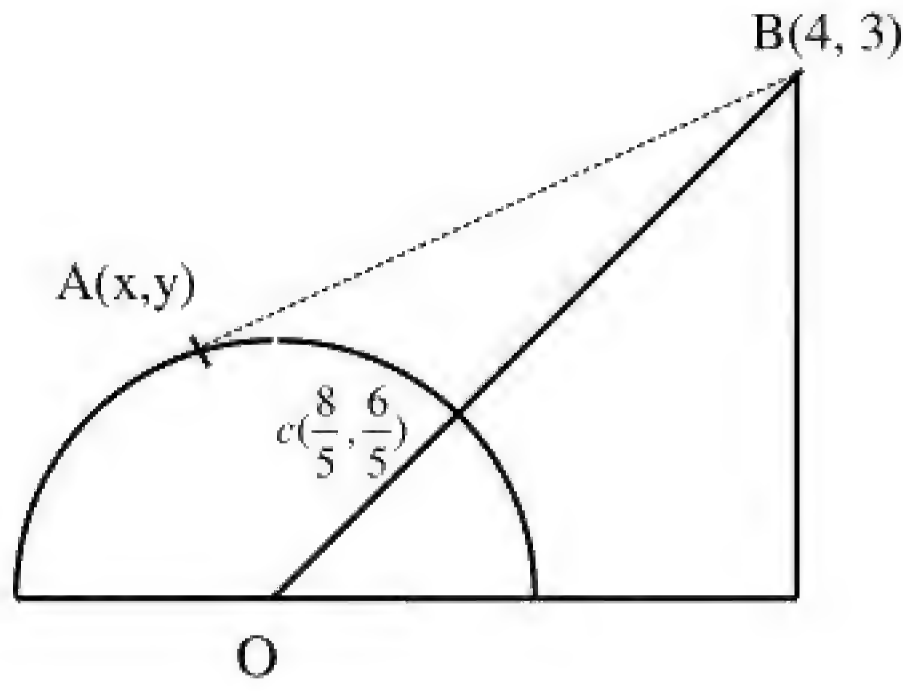
حدد دالة البعد d بين النقطة $B(4, 3)$ والنقطة $A(x, y)$ من نقاط نصف محيط الدائرة.

(٩, ١٩)

$$y = \sqrt{-x^2 + 4}$$

حدد النقطة A بحيث يكون $d(A, B)$ أصغرًا، شكل (٩, ١٩).

الحل



شكل (٩, ١٣).

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2 - 8x - 6y + 25} \\ &= \sqrt{4 - 8x - 6y + 25} = \sqrt{29 - 8x - 6y} \end{aligned}$$

((٩, ١٩) للاستنادا للعلاقة)

والنقطة A على نصف الدائرة والتي تجعل

$d(A, B)$ أصغرياً هي نفسها التي تجعل مربع هذا

البعد أصغرياً لأن: $d(A, B) \geq 0$.

لنفتش عن القيمة الصغرى للدالة:

$$z = (d(A, B))^2 = 29 - 8x - 6\sqrt{4 - x^2} \text{ حيث } 2 \geq x \geq -2$$

نحسب المشتقة، فنجد:

$$z' = -8 + \frac{6x}{\sqrt{4-x^2}}$$

وبالتالي، فإن: $\Leftrightarrow 4 = \frac{3x}{\sqrt{4-x^2}} \Leftrightarrow z' = 0$ (٩, ٢٠)

$$25x^2 = 16(4) \Leftrightarrow 9x^2 = 16(4-x^2) \text{ ومنه } x = \pm \frac{8}{5} \text{ والمقبول حسب}$$

(٩, ٢٠) هو: $x = \frac{8}{5}$. من جهة أخرى فإن المشتقة غير موجودة عند $x = 2, x = -2$

(-2, 2) ينتميان لمجال الدالة). فالأعداد الحرجة هي: $-2, 2, \frac{8}{5}$.

لايجاد القيمة الصغرى للمقدار z :

(١) نبحث عن قيم z عند الأعداد الحرجة، فنجد:

$$z(-2) = 29 + 16 = 45, \quad z(2) = 29 - 16 = 13$$

$$z\left(\frac{8}{5}\right) = 29 - \frac{8(8)}{5} - 6\sqrt{4 - \frac{64}{25}} = 29 - \frac{64}{5} - \frac{36}{5} = 29 - 20 = 9$$

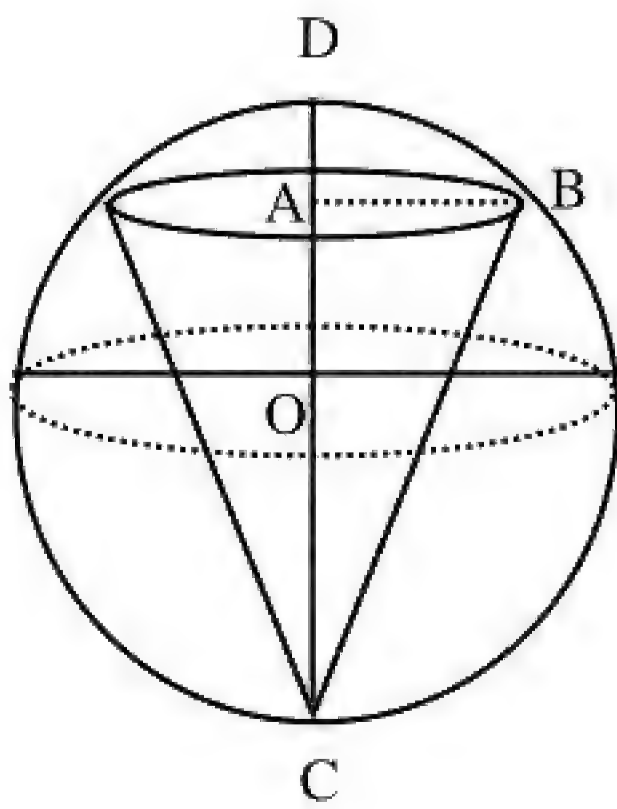
فالقيمة الصغرى هي: $d(A, B) = \sqrt{9} = 3 \Leftrightarrow z\left(\frac{8}{5}\right) = 9$

والنقطة A الموافقة هي: $c\left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$ وهي تقع على المستقيم OB . والطالب يعلم هذه الحقيقة

بشكل هندسي.

مثال (٩, ٢٢)

حدد عناصر المخروط الدوراني القائم الذي حجمه أعظمياً والموجود داخل كرة طول نصف قطرها r . (العناصر: طول نصف قطر قاعدة المخروط، طول ارتفاعه).



شكل (٩, ١٤).

الحل

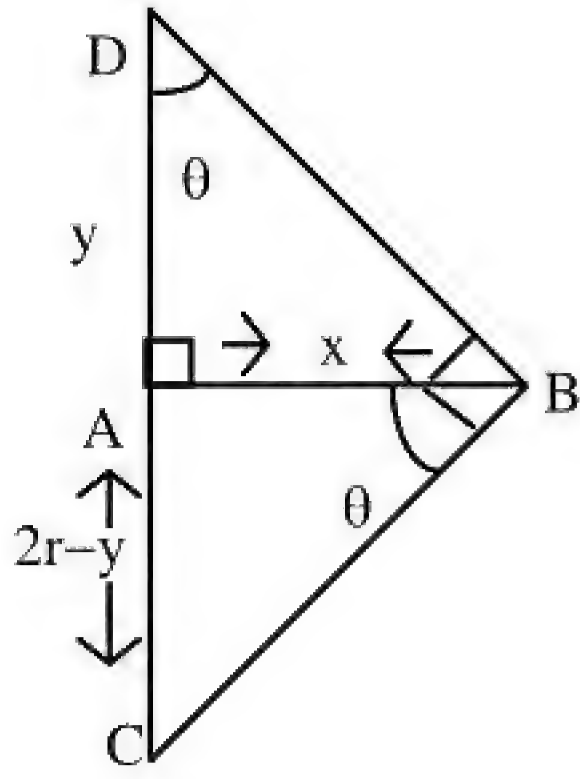
حجم المخروط = $\frac{1}{3}\pi|AB|^2|AC| = V$ (٩, ٢١)

لنفرض أن: $|AD| = y, |AB| = x$

وبالتالي فإن: $|AC| = 2r - y$

من الملاحظ أن DBC مثلث قائم الزاوية في B

وأن: $\widehat{BDA} = \widehat{ABC} = \theta$ (٩, ٢٢)



شكل (٩, ١٥).

وبالتالي فإن:

$$\begin{cases} \tan \widehat{BDA} = \frac{x}{y} \\ \tan \widehat{ABC} = \frac{2r-y}{x} \end{cases}$$

إذن، حسب (٩, ٢٢)، (٩, ٢٣)، فإن:

$$\frac{x}{y} = \frac{2r-y}{x}$$

$$x^2 = y(2r-y) \quad \text{ومنه:}$$

(٩, ٢٣)

(٩, ٢٤)

(أو من تشابه المثلثين ABD، CAB نجد نفس النتيجة).

حجم المخروط يساوي:

$$V = \frac{1}{3} \pi x^2 (2r - y) \quad \text{(استفادة من (٩, ٢١)).}$$

$$(2r \geq y \geq 0)$$

$$V = \frac{1}{3} \pi y (2r - y)^2 \quad \text{وحسب (٩, ٢٤)، فإن:}$$

لنشتق بالنسبة للمتغير y، فنجد:

$$\frac{dV}{dy} = \frac{1}{3} \pi [(2r - y)^2 - 2y(2r - y)]$$

$$= \frac{1}{3} \pi [(2r - y)(2r - 3y)]$$

الأعداد الحرجة لدالة الحجم هي: $y = 2r, y = \frac{2r}{3}$

قيمتا دالة الحجم عند طرفي الفترة $[0, 2r]$ هما: $V(2r) = 0, V(0) = 0$

قيمة دالة الحجم عند العدد الحرج $\frac{2r}{3}$ هي: $V = (\frac{2r}{3}) = \frac{2\pi r}{9} (2r - \frac{2r}{3})^2$

$$= \frac{32\pi r^3}{81}$$

إذن: $V(\frac{2r}{3})$ قيمة عظمى لدالة الحجم. عناصر المخروط: الارتفاع يساوي $\frac{4}{3}r$ ، طول نصف

قطر القاعدة $= \frac{2\sqrt{2}r}{3}$.

تمارين (١, ٩)

- (١) إذا كان معدل تغير طول مستطيل يساوي 0.01 سم/ثا ومعدل تغير عرضه يساوي 0.03 سم/ثا، فأوجد معدل تغير طول قطره ثم معدل تغير مساحته في اللحظة التي يساوي طولها 10 سم وعرضه 8 سم.
- (٢) أوجد أكبر مساحة لمستطيل محيطه ثابت ويساوي 90 سم.
- (٣) إذا كان معدل تغير طول ضلع مكعب يساوي 2 سم/ثا، فأوجد معدل تغير حجمه في اللحظة التي يساوي طول ضلعه 40 سم.
- (٤) أوجد أكبر مساحة مثلث قائم طول قطره ثابت ويساوي 20 سم.
- (٥) نقطة تتحرك على المنحني المعرف بالمعادلة:

$$x^2y + y^2x + xy = 3$$
إذا كان معدل تغير x يساوي $\frac{dx}{dt} = 2$ سم/ثا، فأوجد معدل تغير y في اللحظة التي تكون فيها النقطة عند الموضع (1,1).
- (٦) أوجد أكبر مساحة مثلث قائم تبعد إحدى نقاط وتره عن ضلعيه القائمين: 4 سم، 3 سم على الترتيب.
- (٧) أوجد أكبر مساحة مثلث قائم مجموع طولي ضلعيه القائمين يساوي 80 قدما.
- (٨) إذا كان معدل تغير طول نصف قطر قاعدة أسطوانة دائرية قائمة يساوي 0.001 سم/ثا، ومعدل تغير طول ارتفاعها يساوي 0.02 سم/ثا، فأوجد معدل تغير حجمها ومساحتها الجانبية في اللحظة التي يكون فيها طول نصف قطر قاعدتها مساوياً 5 سم وطول ارتفاعها مساوياً 10 سم.
- (٩) يُصب سائل في خزان أسطواناني الشكل طول نصف قطر قاعدته 2 متر بمعدل تغير قدره 2 سم^٣/ثا. أوجد معدل تغير ارتفاع السائل في كل لحظة.
- (١٠) إذا كان معدل تغير طول ضلع معين يساوي 2 سم/ثا وكانت إحدى زواياه تساوي 60°، فأوجد معدل تغير مساحته في اللحظة التي يكون فيها طول ضلعه مساوياً 15 سم، بفرض أنه يحافظ على شكله.



شكل (٩, ١٥).

(١١) ملعب مكون من مستطيل ونصفي دائرتين كما هو موضح في الشكل. إذا كان طول محيطه يساوي 44 م، فأوجد بعدي المستطيل إذا كانت مساحته أعظم ما يمكن.

(١٢) أوجد أكبر مساحة مستطيل أضلاعه توازي محوري الإحداثيات وموجود داخل قطع ناقص

$$\text{معادلته: } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

(١٣) يُصب سائل في قمع على شكل مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته 6 سم وارتفاعه 12 سم بمعدل تغير قدره 0.2 سم³/ثا، ويتسرب السائل من فتحة القمع السفلي بمعدل تغير قدره 0.01 سم³/ثا. أوجد معدل ارتفاع السائل في القمع في اللحظة التي يكون فيها ارتفاع مخروط السائل مساويا 6 سم.

(١٤) أوجد أبعاد مخروط دائري قائم موجود داخل كرة طول نصف قطرها 15 سم بحيث يكون حجمه أعظم ما يمكن.

(١٥) أوجد أبعاد أسطوانة دائرية قائمة موجودة داخل كرة طول نصف قطرها 20 سم بحيث يكون حجمها أعظم ما يمكن.

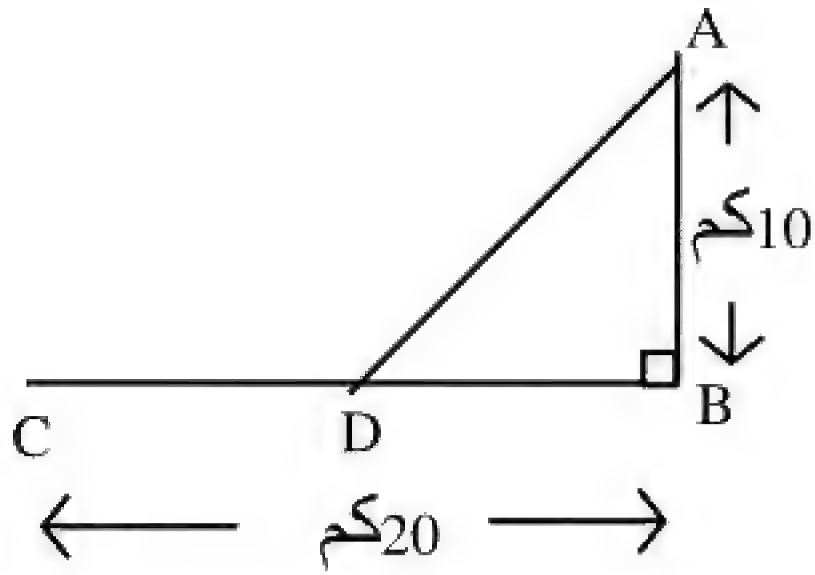
(١٦) يراد صنع مستودع ماء من قطعة معدنية مستطيلة الشكل بعدها 3 متر، 4 متر على شكل متوازي المستطيلات وذلك بقص أربعة مربعات متطابقة من زواياها ثم ثني الجزء الباقي. أوجد أبعاد المستودع لكي يكون حجمه أعظم ما يمكن.

(١٧) إذا كانت C التكلفة اللازمة لصنع سلك كهربائي مساحة مقطعه x، معرفة بالمعادلة:

$$c = \frac{159}{x} + 636x, x \neq 0$$

فحدد مساحة مقطع السلك لكي تكون التكلفة اللازمة لصنعه أصغر ما يمكن.

(١٨) ينفخ منطاد كروي الشكل بغاز الهليوم بمعدل تغير قدره 0.02 سم³/ثا. أوجد معدل تغير طول قطره في اللحظة التي يكون طول نصف قطره مساويا 120 سم.



شكل (١٦, ٩).

- (١٩) محطة كهربائية D يراد إنشاؤها بين القرية C والموقع B. حدد موضع المحطة بحيث تكون تكلفة تعبيد الطريق ADC أصغر ما يمكن علماً أن تكلفة تعبيد الكيلومتر الواحد بين القرية A والمحطة D يساوي 10000 ريال، و تكلفة تعبيد الكيلومتر بين المحطة D والقرية C يساوي 5000 ريال.

- (٢٠) عدد الوحدات المنتجة والمطلوبة من سلعة تعطى بدلالة سعر بيع الوحدة الواحدة بالمعادلة:

$$p = 500 - 0.1q$$

حيث q عدد الوحدات المنتجة، p سعر الوحدة.

إذا كانت التكلفة لإنتاج p وحدة هي:

$$c = 400q + 1000$$

أوجد: عدد الوحدات المنتجة الموافقة لتحقيق أقصى ربح، سعر الوحدة المنتجة، التكلفة الكلية، الربح الناتج.

- (٢١) تتحرك نقطة على مستقيم وفقاً للمعادلة الزمنية:

$$x = 2 \sin 2t$$

أوجد: سرعة النقطة وتسارعها في اللحظة t ، العلاقة بين السرعة والتسارع، ثم صف هذه الحركة.

- (٢٢) برهن أن مجموع الحركتين:

$$x_1 = 3 \sin t$$

$$x_2 = 3 \cos t$$

هو حركة توافقية. حدد دور الحركة الناتجة وسعتها والسرعة الزاوية.

- (٢٣) قذفنا جسمًا نحو الأعلى بسرعة بدء قدرها 320 قدم/ثا. اكتب معادلة الحركة إذا علمت أن

الجسم يخضع لتأثير الجاذبية الأرضية فقط وأن نقطة البدء هي مبدأ الإحداثيات. أوجد سرعة النقطة في اللحظة $t = 5$ ، ثم أعلى موضع تبلغه القذيفة وزمن اصطدامها في الأرض.

- (٢٤) تتحرك نقطة وفقاً للمعادلة الزمنية:

$$S = t^3 + t^2 + 1 \quad (\text{المسافة مقدرة بالمتري والزمن بالثانية})$$

(أ) أوجد سرعة النقطة في اللحظة: $t = 1 \text{ sec}$, $t = 5 \text{ sec}$.

(ب) أوجد التسارع في اللحظتين $t = 3 \text{ sec}$, $t = 5 \text{ sec}$.

الدوال الأسية واللوغاريتمية – التكامل
THE EXPONENTIAL AND LOGARITHMIC FUNCTIONS-
THE INTEGRAL

(١٠, ١) الدوال الأسية واللوغاريتمية

The Logarithmic and Exponential Functions

نعلم من دراستنا في المرحلة الثانوية، أنه إذا كان a, b عددين حقيقيين موجبين، وكان m, n عددين كسريين (قياسيين أو نسبيين)، فإن خواص القوى تتلخص بالصيغ التالية:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (١)$$
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (٢)$$
$$(a^m)^n = a^{mn} \quad (٣)$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \quad (٤)$$
$$(ab)^m = a^m b^m \quad (٥)$$

(١٠, ١)

حيث قبلنا بالتعريف، أن:

$$a^P = \underbrace{a.a.a\dots a}_{\text{مرة } P} \quad (١)$$

$$a^0 = 1 \quad (٢)$$

$$a^{-P} = \frac{1}{a^P} \quad (٣)$$

$$(a^{\frac{1}{P}})^P = a \quad (٤)$$

$$(a^{\frac{1}{P}})^q = a^{\frac{q}{P}} \quad (٥)$$

$$(p, q \text{ صحيحان}, p \neq 0)$$

من المهم هنا، أن نعرف مقادير من الشكل a^x ($a > 0$)، عندما يكون x عددًا حقيقيًا وليس بالضرورة عددًا كسريًا.

من المستحسن في هذه المرحلة أن نقبل بصحة الصيغ الخمس (١٠, ١)، بدون برهان عندما تكون الأسس أعدادًا حقيقية.

$$\text{فمثلاً: (١) } (2^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}} = 2^3 = 8$$

$$\text{(٢) } \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3})^2} = \frac{2}{3}$$

تعريف (١٠, ١)

نسمي الدالة f ، المعرفة بالشكل:

$$f: x \mapsto y = a^x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R}^+, \quad a \neq 1$$

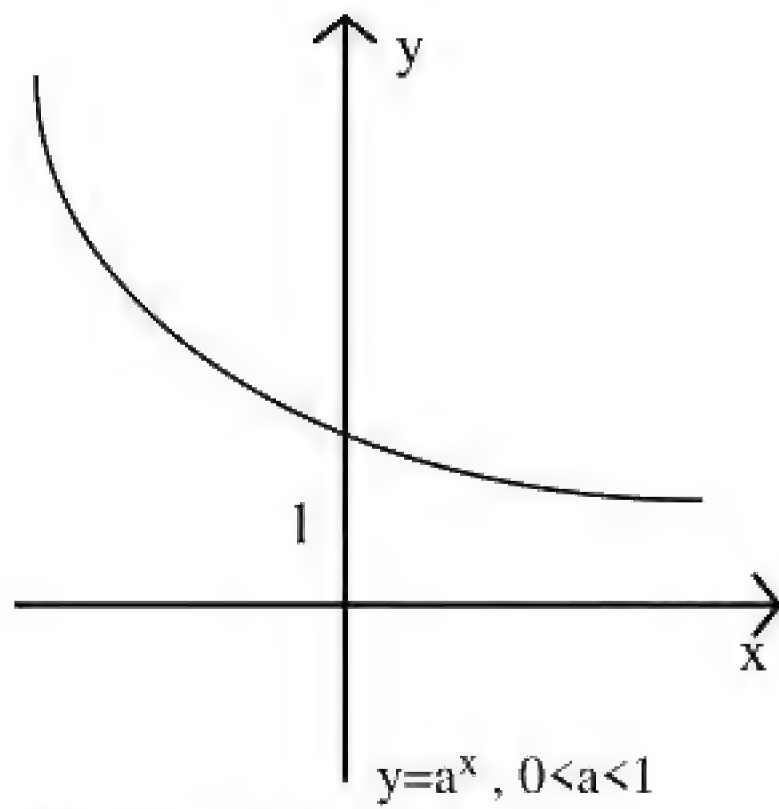
(١٠, ٢)

بالدالة الأسية من الأساس a

$$\text{فمثلاً: } g: x \mapsto y = 2^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

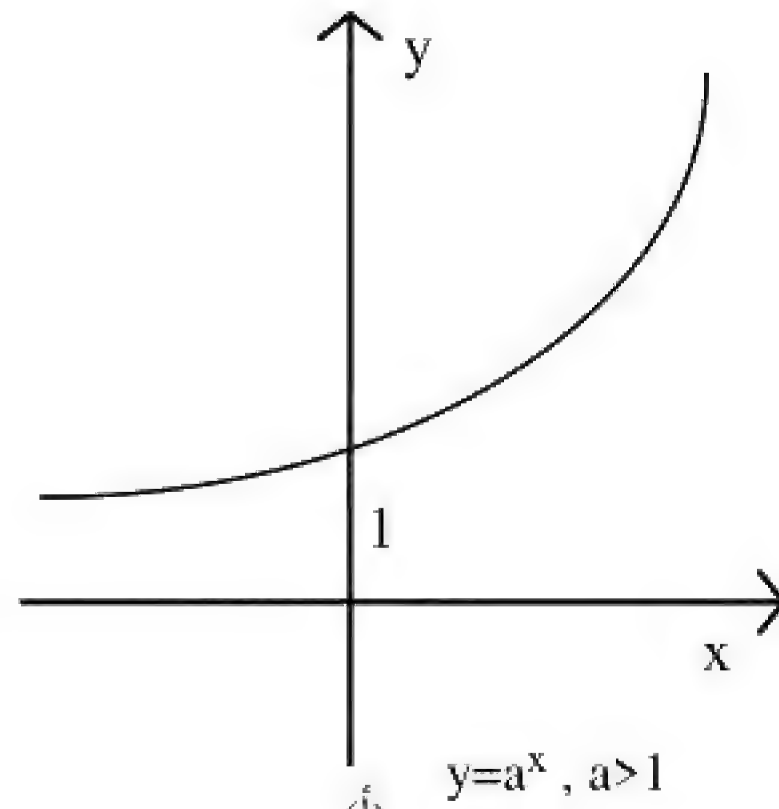
دالة أسية من الأساس 2

نقبل دون برهان، أن: مدى الدالة الأسية f المعرفة في (١٠, ٢)، هو: $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ وأنها متصلة على مجالها \mathbb{R} . وهي متزايدة إذا كان $a > 1$ ، شكل (١٠, ١) (أ) ومتناقصة إذا كان $0 < a < 1$ شكل (١٠, ١) (ب).



(ب) المجال \mathbb{R}

المدى \mathbb{R}^+



(أ)

المجال \mathbb{R}

المدى \mathbb{R}^+

شكل (١٠, ١).

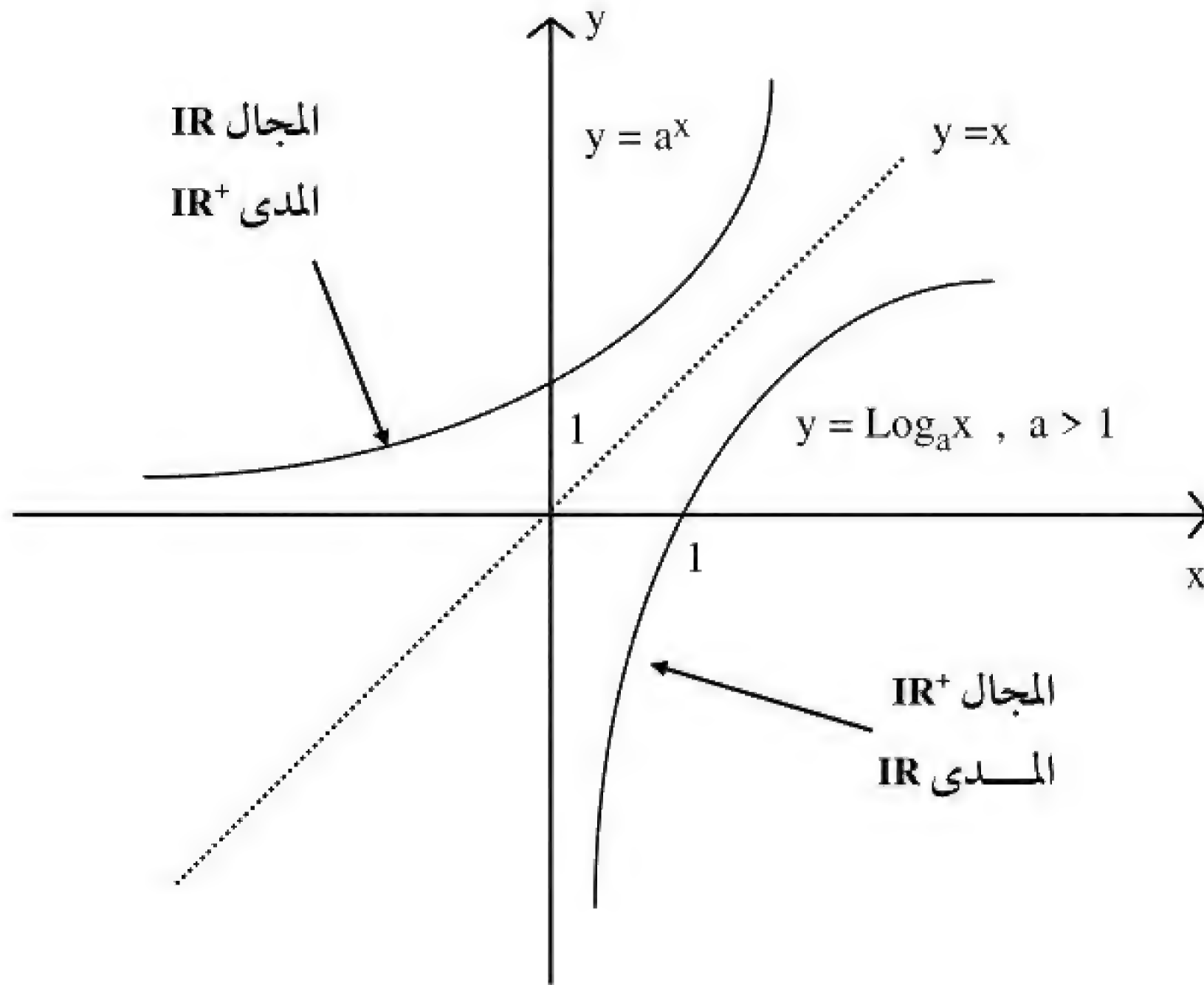
تعريف (١٠, ٢)

الدالة الأسية التي أساسها a متباينة على مجالها \mathbb{R} (لأنها متزايدة شكل (١٠, ١)(أ)، أو متناقصة شكل (١٠, ١)(ب)، فهي تقبل دالة عكسية f^{-1} ، نرمز لها بالرمز \log_a شكل (١٠, ٢)، وندعوها بالدالة اللوغاريتمية من الأساس a ، وهي من الشكل:

$$f^{-1} = \log_a : x \mapsto y = \log_a x$$

لاحظ أن: $x > 0$ ، وأن:

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$$



شكل (١٠, ٢).

فمثلاً: $y = \log_3 x$ ، قاعدة لدالة لوغاريتمية أساسها 3.

لاحظ أن المنحني البياني للدالة اللوغاريتمية، ينشأ من المنحني للدالة الأسية بأخذ نظيره حول المستقيم $y = x$. والعكس صحيح فإن منحني الدالة الأسية، ينشأ من منحني الدالة اللوغاريتمية بأخذ نظيره حول المستقيم $y = x$ ، شكل (١٠, ٢).

مثال (١٠, ١)

أوجد قيمة x فيما يلي:

$$2^3 = 8^x \quad (٢) \quad \log_2 x = 3 \quad (١)$$

الحل

(١) من الملاحظ حسب تعريف الدالة اللوغاريتمية، أن:

$$\log_2 x = 3 \Leftrightarrow x = 2^3 = 8$$

(٢) من الملاحظ هنا، أن:

$$2^3 = 8^x = (2^3)^x = 2^{3x}$$

وحيث إن، الدالة الأسية دالة تقابل، فإن:

$$3x = 3 \Rightarrow x = 1$$

مثال (١٠, ٢)

أوجد لوغاريتمات الأعداد التالية من الأساس 10:

$$\dots, 10^{-3}=0.001, 10^{-2}=0.01, 10^{-1}=0.1, 10^0=1, 10^1=10, 10^2=100, \dots$$

الحل

من الواضح أن:

$$\dots \log_{10} 0.001 = -3, \log_{10} 0.01 = -2, \log_{10} 0.1 = -1, \log_{10} 1 = 0,$$

$$\log_{10} 10 = 1, \log_{10} 100 = 2, \dots$$

ملحوظة (١٠, ١)

بسهولة، نستنتج من المثال (١٠, ٢) أن:

$$(a \neq 1, a \in \mathbb{R}^+) \quad \log_a a = 1, \log_a 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log x = \infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} \log x = -\infty$$

نظرية (١٠, ١)

إذا كانت: $a \neq 1, a, x, y \in \mathbb{R}^+$ فإن:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \quad (١)$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y \quad (٢)$$

$$(m \in \mathbb{R}) \quad \log_a x^m = m \log_a x \quad (٣)$$

$$(b \neq 1, b \in \mathbb{R}^+) \quad \log_a x = \log_b x \cdot \log_a b \quad (٤)$$

البرهان

لنبرهن على صحة الفقرة الأولى والأخيرة:

(١) لنضع: $\log_a x = u, \log_a y = v$ ، فنجد:

(١٠, ٣)

$$x = a^u, y = a^v, \text{ ومنه نجد:}$$

$$xy = a^u \cdot a^v = a^{u+v} \text{ وحسب تعريف الدالة اللوغاريتمية، نجد:}$$

$$\log_a x + \log_a y = \log_a(xy) \Leftrightarrow u + v = \log_a(xy)$$

(بالاستفادة من (١٠, ٣))

(٤) لنضع: $\log_b x = u$ ، فنجد:

(١٠, ٤)

$$x = b^u \text{ وبأخذ لوغاريتم الطرفين من أساس } a, \text{ نجد:}$$

$$\log_a x = \log_a b^u \Leftrightarrow \log_a x = u \cdot \log_a b$$

بالاستفادة من (١٠, ٤) ومن الفقرة (٣)

ملحوظة (١٠, ٢)

إذا كان x عددًا كسريًا من الشكل $x = \frac{m}{n}$ ، حيث m و n عددان صحيحان والعدد $n > 0$ ، فإن a^x يعرف بالشكل:

$$(a > 0) \quad a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

الأساس الطبيعي للوغاريتمات
من الممكن البرهان على أن:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e \quad (١٠, ٥)$$

حيث e مجموع السلسلة التالية:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

ويساوي تقريبًا:

$$e \approx 2.7182818$$

ملحوظة (١٠, ٣)

سنرمز للدالة اللوغاريتمية التي أساسها العدد e بالرمز \ln .

نظرية (١٠, ٢)

$$(١٠, ٦) \quad \text{مشتقة: } f(x) = \ln x, \text{ هو: } f'(x) = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

البرهان

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{h} \ln \frac{x+h}{x} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \cdot \frac{x}{h} \ln \left(1 + \frac{h}{x} \right) \right] \\ &= \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \left[\ln \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{x}{h}} \right] \\ &= \frac{1}{x} \ln \left[\lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{x}{h}} \right] = \frac{1}{x} \ln \left[\lim_{\frac{h}{x} \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{x}{h}} \right] \\ &\quad (\text{لأن دالة متصلة}) \end{aligned}$$

بوضع: $\frac{h}{x} = n$ ، نجد:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x} \ln \left[\lim_{n \rightarrow 0} (1 + n)^{\frac{1}{n}} \right] \\ &= \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x} \\ &\quad (\text{استنادا للعلاقة (١٠, ٥)}). \end{aligned}$$

نتيجة (١٠, ١)

$$\text{إذا كان: } y = \ln|x|, x \neq 0, \text{ فإن: } y' = \frac{1}{x}$$

البرهان

(أ) إذا كان: $x > 0$ ، فإن $|x| = x$ ، وبالتالي:

$$y' = \frac{1}{x} \Leftrightarrow y = \ln x$$

(ب) إذا كان: $x < 0$ ، فإن $|x| = -x$ ، وبالتالي:

$$y' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow y = \ln(-x) \quad (\text{حسب قاعدة السلسلة}).$$

نتيجة (١٠, ٢)

$$\text{إذا كان: } y = \log_a x, \text{ فإن: } y' = \frac{1}{x \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1)$$

البرهان

من الواضح أن: $x = a^y$

بأخذ \ln الطرفين، نجد: $\ln x = y \ln a$

وباشتقاق الطرفين بالنسبة للمتغير x ، فإن:

$$y' = \frac{1}{x \ln a} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = y' \ln a$$

نتيجة (١٠, ٣)

$$\text{إذا كان: } y = \log_a |x|, \text{ فإن: } y' = \frac{1}{x \ln a}$$

البرهان

مشابه للبرهان الوارد في النتيجة (١٠, ١).

نظرية (١٠,٣)

إذا كان $y = a^x, a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$ ، فإن: $y' = a^x \ln a$

من المعادلة: $y = a^x$ ، نجد: $\ln y = x \ln a$

باشتقاق الطرفين بالنسبة للمتغير x ، نجد:

$$\frac{y'}{y} = \ln a \Rightarrow y' = y \ln a \Rightarrow y' = a^x \ln a$$

نتيجة (١٠,٤)

إذا كان $y = e^x$ ، فإن: $y' = e^x \ln e \Leftarrow y' = e^x$

نظرية (١٠,٤)

إذا كان: $y = x^m$ ، حيث $m \in \mathbb{R}$ ، فإن:

$$y' = mx^{m-1}$$

كما سبق، نجد:

$f(x)$	$f'(x)$	ملاحظات
$\ln u $	$\frac{u'}{u}$	$u=g(x)$ (g قابلة للاشتقاق و $u \neq 0$)
$\log_a u $	$\frac{u'}{u \ln a}$	$a \neq 1, a \in \mathbb{R}^+, u \neq 0$
a^u	$a^u \ln a u'$	
e^u	$e^u u'$	
u^m	$m u^{m-1} u'$	$u > 0, m \in \mathbb{R}$

حيث: $u = g(x)$ ، g قابلة للاشتقاق (Differentiable).

ملحوظة (١٠,٤)

$$(x > 0) \quad x = e^{\ln x}$$

البرهان

$$e^{\ln x} = x \quad \text{لنضع}$$

وبأخذ \ln الطرفين، نجد: $\ln u = \ln x$. وبما أن الدالة \ln دالة تقابل، فإن: $u=x$ أي أن:

$$e^{\ln x} = x \quad \text{(حسب (١٠,٧))}$$

ملحوظة (١٠, ٥)

$$(a > 0, x \in \mathbb{R}) a^x = e^{x \ln a}$$

من الملاحظ أن: $a = e^{\ln a}$ ، إذن:

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}$$

مثال (١٠, ٣)

أوجد y' فيما يلي:

$$y = x^2 e^{x^2+1} \quad (٢)$$

$$y = x \ln(1+x^2) \quad (١)$$

$$y = \sec(\ln x) \quad (٤)$$

$$y = x e^{\sin x} \quad (٣)$$

الحل

$$y' = 2xe^{x^2+1} + x^2 e^{x^2+1} (2x) \quad (٢)$$

$$y' = \ln(1+x^2) + \frac{x(2x)}{1+x^2} \quad (١)$$

$$= 2xe^{x^2+1} + 2x^3 e^{x^2+1}$$

$$= \ln(1+x^2) + \frac{2x^2}{1+x^2}$$

$$y' = \sec(\ln x) \cdot \tan(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \quad (٤)$$

$$y' = e^{\sin x} + x e^{\sin x} \cos x \quad (٣)$$

مثال (١٠, ٤)

أوجد y' فيما يلي:

$$y = \frac{2^{x^2+1}}{\log_3 \sqrt{x^2+1}} \quad (٢)$$

$$(x>0) y \log_3 x^4 \quad (١)$$

$$y = (\ln x + x)^{\sin x}, (x > e) \quad (٤)$$

$$y = x^x, x > 0 \quad (٣)$$

الحل

$$y' = \frac{4}{x \ln 3} \Leftrightarrow y = \log_3 x^4 = 4 \log_3 x \quad (١)$$

$$(٢) \text{ لاحظ أن } y = \frac{2^{x^2+1}}{\frac{1}{2} \log_3 (x^2+1)} = \frac{2^{x^2+2}}{\log_3 (x^2+1)}, \text{ بالاشتقاق نجد:}$$

$$y' = (2^{x^2+2} \ln 2 (2x) \log_3 (x^2+1) - \frac{2x}{(x^2+1) \ln 3} \cdot 2^{x^2+2}) / [\log_3 (x^2+1)]^2$$

$$(٣) \text{ بما أن: } x = e^{\ln x}, \text{ فإن: } y = (e^{\ln x})^x = e^{x \ln x}, \text{ ومنه:}$$

$$y' = e^{x \ln x} (\ln x + x \cdot \frac{1}{x}) = e^{x \ln x} (1 + \ln x) = x^x (1 + \ln x)$$

$$(٤) \text{ بما أن: } \ln x + x = e^{\ln(\ln x + x)}, \text{ فإن: } y = e^{\sin x \ln(\ln x + x)}, \text{ ومنه:}$$

$$y' = e^{\sin x \ln(\ln x + x)} \left(\cos x \ln(\ln x + x) + \frac{\sin x}{\ln x + x} \cdot \left(\frac{1}{x} + 1 \right) \right)$$

$$= (\ln x + x)^{\sin x} \left(\cos x \ln(\ln x + x) + \frac{\sin x(1+x)}{x(\ln x + x)} \right)$$

مثال (١٠, ٥)

أوجد y' ، إذا كان:

(١٠, ٨)

$$y = \frac{(x^2 + 1)^3 (x + 1)^2}{(e^{\tan x} + 2^x)^4}$$

الحل

لنأخذ \ln القيمة المطلقة للطرفين، فنجد:

$$\ln|y| = 3\ln(1 + x^2) + 2\ln|1 + x| - 4\ln(e^{\tan x} + 2^x)$$

وبالاشتقاق فإن:

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{1+x^2} \cdot 2x + \frac{2}{1+x} - \frac{4}{e^{\tan x} + 2^x} \cdot (e^{\tan x} \sec^2 x + 2^x \ln 2)$$

ومن ثم،

$$y' = y \left(\frac{6x}{1+x^2} + \frac{2}{1+x} - \frac{4(e^{\tan x} \sec^2 x + 2^x \ln 2)}{e^{\tan x} + 2^x} \right)$$

(١٠, ٩)

وبالتعويض عن y بما يساويها من (١٠, ٨) في (١٠, ٩)، نجد المطلوب.

مثال (١٠, ٦)

أوجد y' ، إذا كان:

(١٠, ١١)

$$y + x e^x + y^2 \ln x = 0$$

الحل

باشتقاق طرفي المعادلة (١٠, ١١) بالنسبة للمتغير x ، نجد:

$$\Leftrightarrow y' + e^x + x e^x + 2y y' \ln x + \frac{y^2}{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow y'(1 + 2y \ln x) = -\left(\frac{y^2}{x} + e^x + xe^x\right)$$

$$y' = \frac{-\left(\frac{y^2}{x} + e^x + xe^x\right)}{1 + 2y \ln x}$$

(٢, ١٠) التكامل غير المحدد

Indefinite Integral

درسنا في الفصول السابقة الطرائق المختلفة لإيجاد مشتقات الدوال بأنواعها المختلفة. ستعرض فيما يلي لحل المسألة التالية وهي: إيجاد الدالة F ، التي عُلِّمت مشتقتها f : فمثلاً، لو كان:

$$F'(x) = f(x) = 3x^2 \quad \text{لكان: } F(x) = x^3$$

تعريف (٣, ١٠)

نقول إن الدالة F (القابلة للاشتقاق على فترة I) هي دالة أصلية للدالة f ، إذا كان:

$$F'(x) = f(x) \quad , \quad \forall x \in I$$

تعريف (٤, ١٠)

نقول إن الدالة F قابلة للاشتقاق على الفترة المغلقة $[a, b]$ ، إذا كانت:

(١) قابلة للاشتقاق على الفترة (a, b)

(٢) وكانت المشتقتان اليمنى عند a واليسرى عند b موجودتين

ملحوظة (٦, ١٠)

إذا كانت F_1, F_2 دالتين أصليتين لنفس الدالة f ؛ قابلتين للاشتقاق على الفترة $[a, b]$ ، فإن:

$$F_2(x) - F_1(x) = c \quad (c \text{ مقدار ثابت}), \quad (\text{استناداً للنظرية (٦, ٧)}).$$

نتيجة (٥, ١٠)

إذا علمنا دالة أصلية F_1 لدالة مفروضة f ، فإن جميع الدوال الأصلية الأخرى F لنفس الدالة f تحقق قيمها المساواة:

$$F(x) = F_1(x) + c \quad (c \text{ مقدار ثابت})$$

تعريف (١٠, ٥)

نعرف التكامل غير المحدد لدالة f ونرمز له بالرمز $\int f(x)dx$ بالصورة:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

(١٠, ١٢) (c مقدار ثابت)

حيث F دالة أصلية للدالة f قابلة للاشتقاق على الفترة I .

فمثلاً: $\int x dx = \frac{x^2}{2} + c$
وأيضاً: $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$
لاحظ أن: $(-\cos x)' = \sin x$ ، $(\frac{x^2}{2})' = x$
نضع فيما يلي جدولاً أساسياً لبعض التكاملات القياسية

$f(x)$	$\int f(x)dx$	ملاحظات
a	$ax + c$	a مقدار ثابت، c ثابت اختياري
ax^n	$\frac{ax^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$	
$\frac{1}{x}$	$\ln x + c$	$x \neq 0$
$\sin(ax)$	$-\frac{\cos(ax)}{a} + c$	$a \neq 0$
$\cos(ax)$	$\frac{\sin(ax)}{a} + c$	
$\sec^2(ax)$	$\frac{\tan(ax)}{a} + c$	
$\csc^2(ax)$	$-\frac{\cot(ax)}{a} + c$	
$\sec(ax) \tan(ax)$	$\frac{\sec(ax)}{a} + c$	
$\csc(ax) \cot(ax)$	$-\frac{\csc(ax)}{a} + c$	
$u^n u'$	$\frac{u^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$	$u=g(x)$ قابلة للاشتقاق على فترة I
$\frac{u'}{u}$	$\ln u + c$	$u \neq 0$
e^{ax}	$\frac{e^{ax}}{a} + c$	$a \neq 0$

f(x)	∫f(x)dx	ملاحظات
a ^x	$\frac{a^x}{\ln a} + c$	a ≠ 1, a ∈ IR ⁺
sinu u'	-cosu + c	u=g(x) قابلة للاشتقاق على فترة I
cosu u'	sinu + c	
sec ² u u'	tanu + c	
csc ² u u'	-cotu + c	
secu tanu u'	secu + c	
e ^u u'	e ^u + c	
a ^u u'	$\frac{a^u}{\ln a} + c$	a ≠ 1, a ∈ IR ⁺
cscu cotuu'	-cscu + c	sinu ≠ 0
$\frac{1}{1+u^2}u'$	tan ⁻¹ u + c	
$\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}u'$	sec ⁻¹ u + c	
$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$	sin ⁻¹ u + c	

نتيجة (٦, ١٠)

من (١٢, ١٠)، نجد أن:

$$\frac{d}{dx}(\int f(x)dx) = f(x)$$

(١٣, ١٠)

نتيجة (٧, ١٠)

(١) ∫ϕ'(x)dx = ϕ(x) + c (ϕ دالة قابلة للاشتقاق على فترة I)

(٢) ∫du = u + c، حيث u = ϕ(x) قابلة للاشتقاق على فترة I.

نظرية (٥, ١٠)

إذا قبلت الدالتان f, g دالتين أصليتين قابلتين للاشتقاق على فترة I، فإن:

(١) ∫cf(x)dx = c∫f(x)dx

(٢) ∫[c₁f(x) + c₂g(x)]dx = c₁∫f(x)dx + c₂∫g(x)dx

(c, c₁, c₂ مقادير ثابتة).

مثال (٧, ١٠)

أوجد التكاملات التالية:

$$\int (\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x^3} + \frac{1}{\sqrt{x}}) dx \quad (٢)$$

$$\int (x^4 + x^2 - x) dx \quad (١)$$

$$\int x\sqrt{x^2+1} dx \quad (٤)$$

$$\int xe^{x^2} dx \quad (٣)$$

الحل

$$\int (x^4 + x^2 - x) dx = \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + c \quad (١)$$

$$\begin{aligned} \int (\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x^3} + \frac{1}{\sqrt{x}}) dx &= \int (x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{3}{4}} + x^{-\frac{1}{2}}) dx \quad (٢) \\ &= \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + \frac{4}{7} x^{\frac{7}{4}} + 2x^{\frac{1}{2}} + c \end{aligned}$$

$$\int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int (2x)e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int u'e^u dx \quad (٣)$$

حيث $u = x^2$

$$= \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + c = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

$$\int x\sqrt{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int (2x)(1+x^2)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \int u'u^{\frac{1}{2}} dx \quad (٤)$$

حيث $u = 1 + x^2$

$$= \frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} + c$$

مثال (٨, ١٠)

أوجد التكاملات التالية:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \sin(\sqrt{x}+1) dx \quad (٢)$$

$$\int \frac{2x+2}{4x^2+8x+1} dx \quad (١)$$

$$\int (\cos x + 1)^3 \sin x dx \quad (٤)$$

$$\int \frac{e^x}{1+e^x} dx \quad (٣)$$

الحل

$$\int \frac{2x+2}{4x^2+8x+1} dx = \frac{1}{4} \int \frac{4(2x+2)}{4x^2+8x+1} dx = \frac{1}{4} \int \frac{u'}{u} dx \quad (١)$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{4} \ln|4x^2+8x+1| + c$$

حيث $u = (4x^2 + 8x + 1)$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \sin(\sqrt{x} + 1) dx = 2 \int \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin(\sqrt{x} + 1) dx \quad (٢)$$

حيث $u = (\sqrt{x} + 1)$

$$= 2 \int u' \sin u dx = 2 \int \sin u du$$

$$= -2 \cos(\sqrt{x} + 1) + c$$

$$\int \frac{e^x}{1 + e^x} dx = \int \frac{u'}{u} dx = \int \frac{du}{u} = \ln(1 + e^x) + c \quad (٣)$$

حيث $u = (1 + e^x)$

$$\int (\cos x + 1)^3 \sin x dx = - \int (\cos x + 1)^3 (-\sin x) dx \quad (٤)$$

حيث $u = (\cos x + 1)$

$$= - \int u^3 u' dx = - \int u^3 du$$

$$= - \frac{(\cos x + 1)^4}{4} + c$$

مثال (٩, ١٠)

أوجد التكاملات التالية:

$$\int \cot x dx \quad (٢) \quad \int \tan x dx \quad (١)$$

$$\int \csc x dx \quad (٤) \quad \int \sec x dx \quad (٣)$$

الحل

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{u'}{u} dx = - \ln |\cos x| + c \quad (١)$$

$$\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{u'}{u} dx = \ln |\sin x| + c \quad (٢)$$

$$\int \sec x dx = \int \frac{\sec x (\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} dx \quad (٣)$$

$$= \ln |\sec x + \tan x| + c$$

(ضربنا البسط والمقام في $\sec x + \tan x$ ولاحظنا أن البسط مشتقة المقام).

$$\int \csc x dx = - \int \frac{-\csc x (\csc x + \cot x)}{\csc x + \cot x} dx = - \ln |\csc x + \cot x| + c \quad (٤)$$

(ضربنا البسط والمقام بالمقدار $\csc x + \cot x$)

مثال (١٠, ١٠)

أوجد كلا من:

$$\int (\cos 3x - \sin x + \sec^2 2x) dx \quad (١)$$

$$\int (\sin 2x - \cos x + \sec 2x \tan 2x) dx \quad (٢)$$

الحل

$$\int (\cos 3x - \sin x + \sec^2 2x) dx = \frac{1}{3} \sin 3x + \cos x + \frac{1}{2} \tan 2x + c \quad (١)$$

$$\int (\sin 2x - \cos x + \sec 2x \tan 2x) dx = -\frac{1}{2} \cos 2x - \sin x + \frac{1}{2} \sec 2x + c \quad (٢)$$

(١٠, ٣) التكامل بالتعويض

The Integration by Substitution

نظرية (١٠, ٦)

إذا كانت الدالة F دالة أصلية للدالة f ($F'=f$)، وكانت g دالة قابلة للاشتقاق على الفترة $[a, b]$ وإذا كانت $u=g(x)$ تقع في مجال F لكل قيم x المنتمية للفترة $[a, b]$ ، فإن:

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(u) du = F(u) + c = F(g(x)) + c \quad (١٠, ١٤)$$

البرهان

استنادا لقاعدة السلسلة، فإن:

$$F(g(x))' = F'(g(x)) g'(x) = F'(u) u' = f(u) u' = f(g(x)) g'(x)$$

بتكامل طرفي المساواة: $(F(g(x)))' = f(g(x)) g'(x)$ ، نجد:

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = F(g(x)) + c \quad (١٠, ١٥)$$

ولو كاملنا طرفي المساواة: $f(u) u' = F(g(x))'$ ، لوجدنا:

$$\int f(u) u' dx = F(g(x)) + c$$

$$\int f(u) du = F(u) + c = F(g(x)) + c \quad \text{أو:} \quad (١٠, ١٦)$$

من (١٠, ١٥)، (١٠, ١٦)، نجد (١٠, ١٤).

مثال (١١, ١٠)

أوجد التكاملات التالية:

$$(١) \int (1-x^2)^4 x^3 dx$$

$$(٢) \int x\sqrt{x-1} dx$$

$$(٣) \int \sin^3 x \cos^4 x dx$$

الحل

$$(١) \text{ (أ) نضع } u = g(x) = 1-x^2 \text{، ومنه: } x^2 = 1-u$$

$$(ب) \text{ لنفاضل، فنجد } 2x dx = -du$$

$$(ج) \text{ من الواضح أن: } x dx = -\frac{1}{2} du$$

$$(د) \text{ نعوض في التكامل، فنجد: } -\frac{1}{2} \int u^4 x^2 du = -\frac{1}{2} \int u^4 (1-u) du$$

$$= -\frac{1}{2} \left(+\frac{u^5}{5} - \frac{u^6}{6} \right) + c = -\frac{(1-x^2)^5}{10} + \frac{(1-x^2)^6}{12} + c$$

$$(٢) \text{ (أ) نضع: } x-1 = u^2 \Leftrightarrow x = 1+u^2 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = u$$

$$(ب) \text{ لنفاضل: } dx = 2u du$$

$$(ج) \text{ لنعوض في التكامل، فنجد}$$

$$\int (1+u^2) u (2u du) = \int (2u^2 + 2u^4) du$$

$$= \frac{2u^3}{3} + \frac{2u^5}{5} + c = \frac{2}{3} (x-1)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5} (x-1)^{\frac{5}{2}} + c$$

$$(٣) \text{ نضع: } u = \cos x \Leftrightarrow du = -\sin x dx$$

ويصبح التكامل على الشكل:

$$-\int \sin^2 x u^4 du = -\int (1 - \cos^2 x) u^4 du$$

$$= -\int (1-u^2) u^4 du$$

$$= -\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + c = -\frac{(\cos x)^5}{5} + \frac{(\cos x)^7}{7} + c$$

ملحوظة (٧, ١٠)

إذا كانت قوة $\sin x$ فردية، نضع $u = \cos x$. أما إذا كانت قوة $\cos x$ فردية فنضع $u = \sin x$.

من جدول التكامل، نعلم أن:

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \sin^{-1} u + c$$
$$\int \frac{1}{1+u^2} = \tan^{-1} u + c$$
$$\int \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} = \sec^{-1} u + c$$

حيث $u=g(x)$ دالة قابلة للاشتقاق على مجالها

لنعمم فيما يلي التكاملات السابقة من خلال النظرية التالية:

نظرية (٧, ١٠)

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1} \frac{u}{a} + c$$
$$\int \frac{1}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + c$$
$$\int \frac{1}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1} \frac{u}{a} + c$$

حيث $u=g(x)$ دالة قابلة للاشتقاق على مجالها

لنبرهن الفقرة الأولى:

لنضع: $u=at$ ، نجد: $du=adt$ ، ومنه:

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} &= \int \frac{adt}{\sqrt{a^2-a^2t^2}} = \int \frac{adt}{a\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= \sin^{-1} t + c = \sin^{-1} \frac{u}{a} + c \end{aligned}$$

بالمثل نثبت بقية الفقرات.

مثال (١٢, ١٠)

أوجد التكاملات التالية:

(٢) $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^4}} dx$

(١) $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{9-\tan^2 x}} dx$

$$\int \frac{x}{9+x^4} dx \quad (٣) \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-4}} \quad (٤)$$

الحل

(١) نضع: $du = \sec^2 x dx \Leftarrow \tan x = u$

يكتب التكامل على الشكل:

$$\int \frac{du}{\sqrt{9-u^2}} = \sin^{-1} \frac{u}{3} + c = \sin^{-1} \frac{\tan x}{3} + c$$

(٢) نضع: $2x dx = dt \Leftarrow x^2 = t$

يصبح التكامل على الصورة:

$$\frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} = \frac{1}{2} \sin^{-1} \frac{t}{2} + c = \frac{1}{2} \sin^{-1} \frac{x^2}{2} + c$$

(٣) نضع: $2x dx = dt \Leftarrow x^2 = t$

من الملاحظ أن التكامل يصبح على الشكل:

$$\frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{9+t^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \tan^{-1} \frac{t}{3} + c = \frac{1}{6} \tan^{-1} \frac{x^2}{3} + c$$

(٤) نضع: $dt = 2x dx \Leftarrow x^2 = t$

والتكامل يصبح على الشكل:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-4}} &= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{x^2 \sqrt{t^2-4}} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t \sqrt{t^2-4}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sec^{-1} \frac{t}{2} + c = \frac{1}{4} \sec^{-1} \frac{x^2}{2} + c \end{aligned}$$

(٤, ١٠) التكامل بالتجزئ

The Integration by Parts

نظرية (٧, ١٠)

لتكن: $v = g(x), u = f(x)$ إذا كانت f', g' متصلتين على الفترة المغلقة $[a, b]$, فإن:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

البرهان

$$\begin{aligned}
 (uv)' &= u'v + uv' && \text{حيث إن:} \\
 \int (uv)' dx &= \int u'v dx + \int uv' dx && \text{فإن:} \\
 uv &= \int v du + \int u dv && \text{إذن:} \\
 &&& \text{ومنه، نجد المطلوب.}
 \end{aligned}$$

مثال (١٣, ١٠)

أوجد التكاملات التالية:

$$\int x \ln x dx \quad (١)$$

$$\int x e^x dx \quad (٢)$$

$$\int e^x \cos x dx \quad (٣)$$

$$\int x^2 \sin x dx \quad (٤)$$

الحل

$$\begin{aligned}
 \int x \ln x dx &&& (١) \text{ لإجراء التكامل:} \\
 u = \ln x, dv = x dx &&& \text{نضع:} \\
 du = \frac{1}{x} dx, v = \frac{1}{2} x^2 &&& \text{فنجد:} \\
 \int x \ln x dx = uv - \int v du = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x^2 \cdot \frac{1}{x} dx &&& \text{ومنه:} \\
 = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int x e^x dx &&& (٢) \text{ لإجراء التكامل:} \\
 u = x, dv = e^x dx &&& \text{نضع:} \\
 du = dx, v = e^x &&& \text{فنجد:} \\
 \int x e^x dx = uv - \int v du &&& \text{ومنه:} \\
 = x e^x - \int e^x dx \\
 = x e^x - e^x + c
 \end{aligned}$$

$$\int e^x \cos x dx \quad (٣) \text{ لإجراء التكامل:}$$

$$u = e^x, \quad dv = \cos x \, dx \quad \text{نضع:}$$

$$du = e^x \, dx, \quad v = \sin x \quad \text{فنجد:}$$

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx \quad (١٠, ١٧)$$

$$\int e^x \sin x dx \quad \text{بالمثل لإجراء التكامل:}$$

$$u = e^x, \quad dv = \sin x \, dx \quad \text{نضع:}$$

$$du = e^x \, dx, \quad v = -\cos x \quad \text{فنجد:}$$

$$\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx \quad \text{ومنه:}$$

$$(١٠, ١٨) \text{ بالتعويض من (١٠, ١٨) بما يساويه في (١٠, ١٧)، نجد:}$$

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \, dx$$

$$2 \int e^x \cos x \, dx = e^x (\sin x + \cos x) \quad \text{ومنه:}$$

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + c \quad \text{إذن:}$$

$$\int x^2 \sin x dx \quad (٤) \text{ لإجراء التكامل:}$$

$$u = x^2, \quad dv = \sin x \, dx \quad \text{نضع:}$$

$$du = 2x \, dx, \quad v = -\cos x \quad \text{فنجد:}$$

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx \quad \text{ومنه:}$$

$$\int x \cos x \, dx \quad \text{بالمثل لإجراء التكامل:}$$

$$u = x, \quad dv = \cos x \, dx \quad \text{نضع:}$$

$$du = dx, \quad v = \sin x \quad \text{فنجد:}$$

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx \quad \text{ومنه:}$$

$$= x \sin x + \cos x + \frac{1}{2} c$$

بالتعويض في (١٠, ١٩)، نجد:

$$\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c$$

مثال (١٠, ١٤)

أوجد التكاملات التالية:

$$\int \sin^{-1} x \, dx \quad (٢) \quad \int x \sec^2 x \, dx \quad (١)$$

$$\int (x^2 + x + 1) \ln x \, dx \quad (٤) \quad \int \tan^{-1} x \, dx \quad (٣)$$

الحل

$$\int x \sec^2 x \, dx \quad (١) \text{ لإجراء التكامل:}$$

$$u = x, \, dv = \sec^2 x \, dx \quad \text{نضع:}$$

$$du = dx, \, v = \tan x \quad \text{فوجد:}$$

$$\begin{aligned} \int x \sec^2 x \, dx &= x \tan x + \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx \\ &= x \tan x + \ln |\cos x| + c \end{aligned} \quad \text{ومنه:}$$

$$\int \sin^{-1} x \, dx \quad (٢) \text{ لإجراء التكامل:}$$

$$u = \sin^{-1} x, \, dv = dx \quad \text{نضع:}$$

$$du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx, \, v = x \quad \text{فوجد:}$$

$$\int \sin^{-1} x \, dx = x \sin^{-1} x + \frac{1}{2} \int (-2x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx \quad \text{ومنه:}$$

$$= x \sin^{-1} x + \frac{1}{2} \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$\int \tan^{-1} x \, dx \quad (٣) \text{ لإجراء التكامل:}$$

$$u = \tan^{-1} x, \, dv = dx \quad \text{نضع:}$$

$$du = \frac{1}{1+x^2} dx, v = x \quad \text{فوجد:}$$

$$\int \tan^{-1} x \, dx = x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx \quad \text{ومنه:}$$

$$= x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$$

(لاحظ أن البسط مشتقة المقام)

$$\int \ln x (x^2 + x + 1) dx \quad (٤) \text{ لإجراء التكامل:}$$

$$u = \ln x, \, dv = x^2 + x + 1 \quad \text{نضع:}$$

$$du = \frac{1}{x} dx, v = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \quad \text{فوجد:}$$

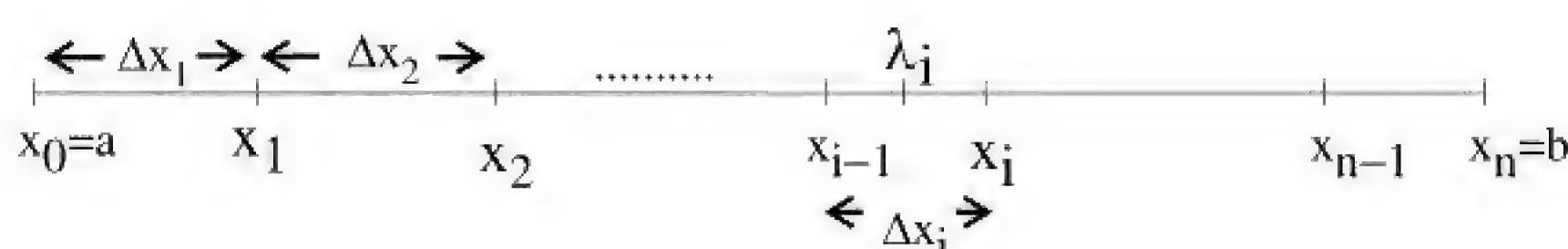
$$\begin{aligned}
 \int \ln x (x^2 + x + 1) dx &= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right) \ln x - \int \frac{\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x}{x} dx \\
 &= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right) \ln x - \int \left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 \right) dx \\
 &= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right) \ln x - \left(\frac{x^3}{9} + \frac{1}{4}x^2 + x \right) + c
 \end{aligned}$$

(٥, ١٠) التكامل المحدد

Definite Integral

لتكن f دالة معرفة على فترة مغلقة $[a, b]$ ، لنجزئ هذه الفترة إلى n فترة جزئية بالنقاط:

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$$



المحققة للشرط:

$$x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_{n-1} < x_n$$

لنحدد أطوال هذه الفترات، بالصورة:

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \dots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$$

لتكن λ_i نقطة اختيارية من الفترة $[x_{i-1}, x_i]$ ، بالتالي، فإن:

$$\lambda_1 \in [x_0, x_1], \lambda_2 \in [x_1, x_2], \dots, \lambda_i \in [x_{i-1}, x_i], \dots$$

من الملاحظ أن:

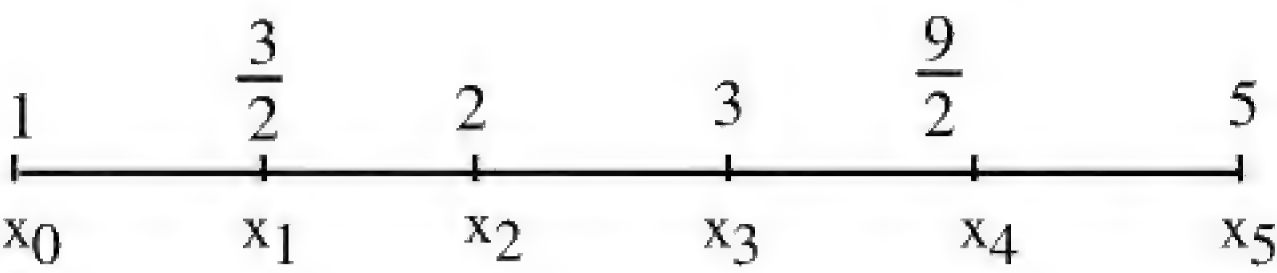
$$f(\lambda_1)\Delta x_1 + f(\lambda_2)\Delta x_2 + \dots + f(\lambda_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\lambda_i)\Delta x_i$$

تعريف (٦, ١٠)

نسمي المجموع $\sum_{i=1}^n f(\lambda_i)\Delta x_i$ بمجموع ريمان (Riemann sum) للدالة f على الفترة $[a, b]$ ونرمز له أحيانا بالرمز S_n .

مثال (١٥, ١٠)

أوجد مجموع ريمان للدالة f ، حيث $f(x) = 2x + 1$ على الفترة $[1,5]$ ، علماً أن نقاط التجزئة لهذه الفترة هي: $1, \frac{3}{2}, 2, 3, \frac{9}{2}, 5$ وأن λ_i هي منتصفات فترات التجزئة ($i = 1,2,3,4,5$).



الحل

i	1	2	3	4	5
λ_i	$1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}+2=\frac{7}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{15}{4}$	$4\frac{3}{4}=\frac{19}{4}$
Δx_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
$f(\lambda_i)$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}$	6	$\frac{17}{2}$	$\frac{21}{2}$
$f(\lambda_i)\Delta x_i$	$\frac{7}{4}$	$\frac{9}{4}$	6	$\frac{51}{4}$	$\frac{21}{4}$

$$\sum_{i=1}^5 f(\lambda_i)\Delta x_i = \frac{112}{4} = 28$$

تعريف (٧, ١٠)

إذا انتهى مجموع ريمان: $S_n = \sum_{i=1}^n f(\lambda_i)\Delta x_i$ نحو نفس النهاية:

(١) مهما كانت التجزئة

(٢) ومهما كان اختيار λ_i داخل فترات التجزئة.

وذلك عندما ينتهي أكبر أطوال الفترات الجزئية نحو الصفر:

$\max \Delta x_i \rightarrow 0$ فإننا نسمي هذا المجموع بالتكامل المحدد للدالة f على

الفترة $[a, b]$ ، ونرمز له بالرمز:

$$\int_a^b f(x)dx$$

إذن:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\lambda_i) \Delta x_i$$

أو:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} S_n$$

نقبل صحة النظرية التالية بدون برهان.

نظرية (٨, ١٠)

إذا كانت f دالة متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ ، فإنها قابلة للتكامل على هذه الفترة.

مثال (١٦, ١٠)

باستخدام التعريف، أوجد التكامل:

$$\int_a^b x dx$$

الحل

f دالة متصلة على $[a, b]$ لأنها دالة كثيرة حدود، إذن هي قابلة للتكامل على $[a, b]$ استناداً للنظرية السابقة.

لنختار التجزئة بحيث تكون أطوال الفترات متساوية (تجزئة منتظمة)، إذن:

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_n = \frac{b-a}{n}$$

بالتالي، فإن:

$$\begin{array}{ccccccc} | & & | & & | & & | \\ x_0=a & & x_1=a+\Delta x & & x_2=a+2\Delta x & & x_i=a+i\Delta x & & x_n=b \end{array}$$

$$x_i = a + i \Delta x, i = 1, 2, \dots, n$$

لنختار λ_i بحيث يكون: $\lambda_i = x_i$ ، فنجد: $f(\lambda_i) = f(x_i) = x_i$
 لنشكل مجموع ريمان، فنجد:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n f(\lambda_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n x_i \Delta x = \Delta x \sum_{i=1}^n x_i \\ &= \Delta x (x_1 + x_2 + \dots + x_i + \dots + x_n) \\ &= \Delta x (a + \Delta x + a + 2\Delta x + \dots + a + i\Delta x + \dots + a + n\Delta x) \\ &= \Delta x [na + \Delta x(1 + 2 + 3 + \dots + n)] \end{aligned}$$

لكن: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ (مجموعة حدود متوالية عددية)
 إذن:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{b-a}{n} \left[na + \frac{b-a}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \right] \\ &= (b-a) \left[a + \frac{b-a}{2} \cdot \frac{n+1}{n} \right] \end{aligned}$$

عندما $\Delta x \rightarrow 0$ ، فإن $n \rightarrow \infty$ ، إذن:

$$\begin{aligned} \int_a^b x dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = (b-a) \left[a + \frac{b-a}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \right] \\ &= (b-a) \left(a + \frac{b-a}{2} \right) = \frac{(b-a)(b+a)}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2} \\ &\quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1 \text{ لأن } \right) \end{aligned}$$

تعريف (٨، ١٠)

نقبل بالتعريف أن:

$$\begin{aligned} (١) \quad \int_a^a f(x) dx &= 0 \quad (f \text{ معرفة عند } a) \\ (٢) \quad \int_a^b f(x) dx &= - \int_b^a f(x) dx \quad (b > a) \\ (٣) \quad \int_a^b f(x) dx &= 0 \quad (f \text{ معرفة عند } a) \end{aligned}$$

استنادًا إلى تعريف التكامل المحدد يمكن البرهان على صحة النظريات التالية والتي نقبلها بدون برهان.

نظرية (١٠, ١٠)

إذا كانت f, g قابلتين للتكامل على الفترة $[a, b]$ ، فإن:

$$\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b [c_1 f(x) + c_2 g(x)]dx = c_1 \int_a^b f(x)dx + c_2 \int_a^b g(x)dx$$

نظرية (١٠, ١١)

إذا كانت f قابلة للتكامل على فترة مغلقة $[a, b]$ ، وإذا كان: $c \in [a, b]$ ، فإن:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

نظرية (١٠, ١٢)

إذا كانت f قابلة للتكامل على الفترة $[a, b]$ ، وكان $f(x) \geq 0$ على هذه الفترة، فإن:

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

نظرية (١٠, ١٣)

إذا كانت f, g قابلتين للتكامل على الفترة $[a, b]$ وكانت $g(x) \leq f(x)$ على هذه الفترة،

$$\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$$

فإن:

نظرية القيمة الوسطى للتكامل (١٠, ١٣)

إذا كانت f دالة متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ ، فإن:

(١٠, ٢١)

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

حيث: $c \in (a, b)$

النظرية الأساسية في التكامل (١٠, ١٤)
The Fundamental Theorem of Calculus

إذا كانت f دالة متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$. فإن:
(١) مشتقة الدالة G المعرفة بالمعادلة:

(١٠, ٢٢)

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt$$

عند x حيث $x \in [a, b]$ ، هي: $G'(x) = f(x)$

(٢) إذا كانت F دالة أصلية للدالة f قابلة للاشتقاق على الفترة $[a, b]$ ، فإن:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

البرهان

لنبرهن على صحة الفقرة الثانية فقط:

من الملاحظ من العلاقة (١٠, ٢٢)، أن G دالة أصلية للدالة f . فإذا كانت F دالة أصلية أخرى للدالة f ، فإن:

(١٠, ٢٣)

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) + c$$

(الفرق بين دالتين أصليتين لنفس الدالة مقدار ثابت).

لتحديد c نعوض في طرفي العلاقة (١٠, ٢٣) عن x بالقيمة a ، فنجد:

$$\int_a^a f(t) dt = F(a) + c = 0$$

(استناداً للتعريف (١٠, ٨))

ومنه $c = -F(a)$. بالتعويض عن c بقيمته في (١٠, ٢٣)، نجد:

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$$

وبشكل خاص إذا كانت: $x = b$ ، فإن:

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

أو:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

مثال (١٧، ١٠)

أوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة الوسطى للتكامل على الفترة $[0, 1]$ ، إذا كان: $f(x) = 3x^2$

الحل

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 3x^2 dx = [x^3]_0^1 = 1 - 0 = 1$$

وحسب العلاقة (٢١، ١٠)، فإن:

$$c = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ إذن } \int_0^1 f(x) dx = 3c^2(1-0) = 1$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{3}} \in (0,1) \text{ والمقبول:}$$

مثال (١٨، ١٠)

أوجد قيمة كل من:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cos x (1 + \sin^2 x)^3 dx \quad (٢)$$

$$\int_1^2 (x^2 + x + 1) dx \quad (١)$$

الحل

$$\begin{aligned} \int_1^2 (x^2 + x + 1) dx &= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right]_1^2 \\ &= \left(\frac{8}{3} + 2 + 2 \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{7}{3} + \frac{5}{2} = \frac{29}{6} \end{aligned} \quad (١)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cos x (1 + \sin^2 x)^3 dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \sin^2 x)^3 (2 \sin x \cos x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{(1 + \sin^2 x)^4}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{(1 + \frac{1}{2})^4}{4} - \frac{1}{4} \right] \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{81}{16} - 1 \right) = \frac{1}{8} \frac{65}{16} = \frac{65}{128} \end{aligned} \quad (٢)$$

نتيجة (٨, ١٠)

استنادًا إلى (١٤, ١٠) وإذا افترضنا أن f متصلة على مدى g وأن g قابلة للاشتقاق على الفترة $[a, b]$ وأن مشتقتها متصلة على هذه الفترة، فإن:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(g(x)) g'(x) dx &= F(g(x)) \Big|_a^b \\ (f \text{ دالة أصلية للدالة } f) &= F(g(b)) - F(g(a)) \end{aligned}$$

لكن استنادًا إلى (١٤, ١٠) أيضًا وبنفس الشروط أعلاه، فإن:

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du = F(g(b)) - F(g(a))$$

إذن:

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$$

مثال (١٩, ١٠)

أوجد قيمة التكامل:

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx \quad (\text{إرشاد: أجزِ التغير } x = 2\sin u)$$

الحل

من المعادلة: $x = 2\sin u$: $(\frac{\pi}{2} \geq u \geq \frac{-\pi}{2})$ نجد: $dx = 2\cos u du$ ، عندما: $x = 0$ ، فإن: $u = 0 \Leftarrow 2\sin u = 0$ وعندما: $x = 2$ ، فإن: $u = \frac{\pi}{2} \Leftarrow 2\sin u = 2$

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2 u} \cdot 2\cos u du$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u du$$

لكن: $\cos^2 u = \frac{1}{2}(1 + \cos 2u)$ ، إذن:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-x^2} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2u) du = 2(u + \frac{\sin 2u}{2}) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi$$

تمارين (١, ١٠)

أوجد مشتقات المقادير التالية:

$$\log_3 x^2 \quad (٢)$$

$$x^{2x^2+1} \quad (١)$$

$$\sqrt{\ln x} \quad (٤)$$

$$xe^{\ln(x^2+1)} \quad (٣)$$

$$\ln\left(\frac{(2x+1)^4 \sqrt{x+1}}{3x-7}\right) \quad (٦)$$

$$x \ln(\sin x) \quad (٥)$$

$$(e^{2x} + 1)^3 \quad (٨)$$

$$2^{\ln x} \quad (٧)$$

$$\log_3 (x^2 + 1) \quad (١٠)$$

$$\frac{\ln x + 1}{x} \quad (٩)$$

$$\log_4 \left| \frac{2x-1}{bx+3} \right| \quad (١٢)$$

$$\tan^2 (e^x + 1) \quad (١١)$$

$$x^{10^x} \quad (١٤)$$

$$(2^x + 2^{-x})^3 \quad (١٣)$$

$$\sec(\tan e^x) \quad (١٦)$$

$$2^{\sin^3 x} \quad (١٥)$$

$$\cos^{-1}(\ln x) \quad (١٨)$$

$$\sin^{-1}\sqrt{1-e^x} \quad (١٧)$$

$$2^x \ln |\sin x| \quad (٢٠)$$

$$\tan^{-1}(2x) \quad (١٩)$$

$$(x^2 + 1)^x \quad (٢٢)$$

$$x^{\sin x}, x > 0 \quad (٢١)$$

$$\ln \left(\frac{(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}}{(1 + \sin^2 x)^3} \right) \quad (٢٤)$$

$$\frac{(x^2 + 1)^7 (x^2 - 1)^4}{\sqrt{x^2 + x + 1}} \quad (٢٣)$$

$$2^{\tan x} \sin x \quad (٢٦)$$

$$(x > 0) \quad x^{\csc x + \tan x} \quad (٢٥)$$

$$3^x \sqrt{x+1} \quad (٢٨)$$

$$\cos^{-1}(\cos(e^{2x})) \quad (٢٧)$$

$$\sec^{-1}(\ln \sqrt{x}) \quad (٣٠)$$

$$\ln(\tan^{-1} x^3) \quad (٢٩)$$

أوجد y' إذا كان:

$$xe^{-xy} + y = 1 \quad (٣٢)$$

$$y \ln x + x = y \quad (٣١)$$

لتكن f دالة قابلة للتكامل على الفترة $[a, b]$. نعرف المساحة الواقعة تحت المنحني $y=f(x)$ ، حيث

$$f(x) \geq 0 \text{ وفوق محور السينات وبين المستقيمين } x=a, x=b \text{ بالصيغة: } S = \int_a^b f(x) dx$$

أوجد فيما يلي المساحة المحصورة بين المنحني والمستقيمات المبينة في كل فقرة:

$$y = 0, x = 1, x = 0, y = e^{-x} \quad (أ) \quad (٣٣)$$

$$y = 0, x = 2, x = 1, y = x^2 \quad (ب)$$

$$y = 0, x = 4, x = 1, y = \sqrt{x} \quad (ج)$$

$$y = 0, x = e, x = 1, y = \ln x \quad (د)$$

أوجد التكاملات التالية:

$$\int \left(x^2 + x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) dx \quad (٣٥)$$

$$\int \frac{(2x-1)^2}{x} dx \quad (٣٤)$$

$$\int \frac{1}{\sin x \tan x} dx \quad (٣٧)$$

$$\int_{-1}^1 (x^2 - 1)^2 dx \quad (٣٩)$$

$$\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) dx \quad (٤١)$$

$$\int \frac{x^2 - x^3 + x + 1}{\sqrt{x}} dx \quad (٤٣)$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 t} dt \quad (٤٥)$$

$$\int_0^1 \frac{d}{dx} (\tan^{-1} x) dx \quad (٤٧)$$

$$\int (ax + b)^{10} dx \quad (٤٩)$$

$$\int_0^1 (x^3 + 1)^2 x^2 dx \quad (٥١)$$

$$\int \frac{2x + 1}{(x^2 + x + 1)^3} dx \quad (٥٣)$$

$$\int x^2 \sqrt[5]{x^3 + 1} dx \quad (٥٥)$$

$$\int \left(1 + \frac{3}{x} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2} dx \quad (٥٧)$$

$$\int \frac{\sec^2 x}{(1 - \tan x)^2} dx \quad (٥٩)$$

$$\int \cos \sqrt[3]{\sin x} dx \quad (٦١)$$

$$\int (\cot 3x + 2^x) dx \quad (٦٣)$$

$$\int \frac{\ln x}{x} dx \quad (٦٥)$$

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 5} dx \quad (٦٧)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x + \sec x \tan x) dx \quad (٣٦)$$

$$\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx \quad (٣٨)$$

$$\int (x^2 - 1)(x^3 + x) dx \quad (٤٠)$$

$$\int_2^3 \frac{x^2 - 1}{x - 1} dx \quad (٤٢)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sec x} dx \quad (٤٤)$$

$$\int \frac{d}{dx} (\sin^3 x + \sqrt{x}) dx \quad (٤٦)$$

$$\frac{d}{dx} \int x^8 (1 + x)^2 dx \quad (٤٨)$$

$$\int (\sin 3x + \cos 4x) dx \quad (٥٠)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} dx \quad (٥٢)$$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \sin^4 t \cos t dt \quad (٥٤)$$

$$\int \frac{(5 + \sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} dx \quad (٥٦)$$

$$\int (\sin 3x + 1)^3 \cos 3x dx \quad (٥٨)$$

$$\int x \sec x^2 \tan x^2 dx \quad (٦٠)$$

$$\int (e^{-3x} + \tan 2x) dx \quad (٦٢)$$

$$\int \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 7} dx \quad (٦٤)$$

$$\int (e^x + 1)^2 dx \quad (٦٦)$$

$$\int_0^1 e^{\ln x} dx \quad (٦٩)$$

$$\int x 2^{x^2} dx \quad (٦٨)$$

$$\int \frac{\tan \sqrt[3]{x}}{x^{\frac{2}{3}}} dx \quad (٧١)$$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx \quad (٧٠)$$

$$\int \frac{1}{\sin 3x} dx \quad (٧٣)$$

$$\int (\sec x + \tan x) dx \quad (٧٢)$$

$$\int 3^{\sin x} \cos x dx \quad (٧٥)$$

$$\int (1 + \cot(\sin x)) \cos x dx \quad (٧٤)$$

$$\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx \quad (٧٧)$$

$$\int (1 + \csc x)^2 dx \quad (٧٦)$$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\tan^{-1} x + 1)^3}{1 + x^2} dx \quad (٧٩)$$

$$\int \sin^{-1} x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (٧٨)$$

$$\int x e^{-x} dx \quad (٨١)$$

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx \quad (٨٠)$$

$$\int x \cos 3x dx \quad (٨٣)$$

$$\int x \ln x dx \quad (٨٢)$$

$$\int x^2 \sin x dx \quad (٨٥)$$

$$\int x^5 \ln x dx \quad (٨٤)$$

$$\int e^{x^2 + \ln x} dx \quad (٨٧)$$

$$\int e^x \sin 2x dx \quad (٨٦)$$

$$\int \sqrt{x} \ln x dx \quad (٨٩)$$

$$\int_{-2}^3 \sqrt{|x-1|} dx \quad (٨٨)$$

$$\int \tan^{-1}(2x) dx \quad (٩١)$$

$$\int \sin \sqrt{x} dx \quad (٩٠)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} x \sec^2 x dx \quad (٩٣)$$

$$\int \sin^{-1}(3x) dx \quad (٩٢)$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| dx \quad (٩٥)$$

$$\int 2^x e^x dx \quad (٩٤)$$

$$\int_{-1}^2 |x-1| dx \quad (٩٧)$$

$$\int x^3 \sqrt{1-x} dx \quad (٩٦)$$

(٦, ١٠) تكامل حاصل ضرب نسبتيين مثلثيتين

مثال (٢٠, ١٠)

أوجد التكاملات التالية:

$$\int \cos 3x \sin 2x \, dx \quad (٢)$$

$$\int \sin 2x \cos x \, dx \quad (١)$$

الحل

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

(١) نعلم أن:

إذن:

$$\int \sin 2x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int (\sin 3x + \sin x) \, dx = -\frac{1}{6} \cos 3x - \frac{1}{2} \cos x + c$$

$$\cos a \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) - \sin(a-b)]$$

(٢) نعلم أن:

إذن:

$$\int \cos 3x \sin 2x \, dx = \frac{1}{2} \int (\sin 5x - \sin x) \, dx = -\frac{1}{10} \cos 5x + \frac{1}{2} \cos x + c$$

مثال (٢١, ١٠)

أوجد التكاملات التالية:

$$\int \sin 3x \sin 2x \, dx \quad (٢)$$

$$\int \cos 4x \cos 3x \, dx \quad (١)$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

(١) نعلم أن:

إذن:

$$\int \cos 4x \cos 3x \, dx = \frac{1}{2} \int (\cos 7x + \cos x) \, dx = \frac{1}{14} \sin 7x + \frac{1}{2} \sin x + c$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

(٢) نعلم أن:

إذن:

$$\int \sin 3x \sin 2x \, dx = \frac{1}{2} \int (\cos x - \cos 5x) \, dx = \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{10} \sin 5x + c$$

(١٠, ٧) التكاملات المثلثية من الشكل: $\int \sin^m x \cos^n x dx$

- (١) إذا كان m عددا فرديا (دالة الجيب من أس فردي)، نفرض: $\cos x = t$
- (٢) إذا كان n عددا فرديا (دالة جيب التمام من أس فردي)، نفرض: $\sin x = t$
- (٣) إذا كان m, n زوجيين، نستعين بالصيغتين:

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2} \\ \cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2} \end{aligned}$$

مثال (١٠, ٢٢)

أوجد التكاملات التالية:

$$\int \sin^3 x \cos^2 x dx \quad (١)$$

$$\int \cos^3 x \sin x dx \quad (٢)$$

$$\int \sin^4 x dx \quad (٣)$$

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx \quad (٤)$$

الحل

$$(١) \text{ لنضع: } dt = -\sin x dx \Leftarrow \cos x = t$$

ويصبح التكامل على الشكل:

$$\int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x \sin x dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \sin x dx$$

$$\begin{aligned} &= -\int (1 - t^2) t^2 dt = -\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + c \\ &= -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + c \end{aligned}$$

$$(٢) \text{ لنضع: } dt = \cos x dx \Leftarrow \sin x = t$$

ويصبح التكامل على الشكل:

$$\int (1 - \sin^2 x) \sin x \cos x \, dx = \int \cos^2 x \sin x \cos x \, dx$$

$$= \int (1 - t^2) t \, dt = \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{4} + c$$

$$= \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\sin^4 x}{4} + c$$

$$\int \sin^4 x \, dx = \int (\sin^2 x)^2 \, dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 \, dx \quad (٣)$$

$$= \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) \, dx$$

$$= \frac{1}{4} \int \left(1 - 2\cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) \, dx$$

$$= \frac{1}{4} \left(x - \sin 2x + \frac{1}{2}x + \frac{\sin 4x}{8} \right) + c$$

$$\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) \cdot \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 \, dx \quad (٤)$$

$$= \frac{1}{8} \int (1 - \cos 2x)(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) \, dx$$

$$= \frac{1}{8} \int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x - \cos 2x - 2\cos^2 2x - \cos^3 2x) \, dx$$

$$= \frac{1}{8} \int \left(1 + \cos 2x - \frac{1 + \cos 4x}{2} - \cos^3 2x \right) \, dx$$

$$= \frac{1}{8} \left(x + \frac{\sin 2x}{2} - \frac{1}{2}x - \frac{\sin 4x}{8} \right) - \frac{1}{8} \int \cos^3 2x \, dx$$

لكن:

$$\int \cos^3 2x \, dx = \int \cos^2 2x \cos 2x \, dx$$

$$= \int (1 - \sin^2 2x) \cos 2x \, dx$$

$$= \int \cos 2x - \frac{1}{2} \int \sin^2 2x (2\cos 2x) \, dx$$

$$= \frac{\sin 2x}{2} - \frac{1}{2} \frac{\sin^3 2x}{3} + a$$

(a ثابت اختياري)

وبالتالي، فإن:

$$\begin{aligned} & \int \sin^2 x \cos^4 x dx \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 4x}{8} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{\sin 2x}{2} - \frac{1}{6} \sin^3 2x \right) + c \\ &= \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{1}{48} \sin^3 2x + c \end{aligned}$$

(٨, ١٠) التكاملات المثلثية من الشكل $\int \tan^m x \sec^n x dx$

حيث: m, n عددان طبيعيين وقد يساوي أحدهما الصفر.

تصادفنا هنا ثلاث حالات أساسية:

(١) قوة $\sec x$ زوجية:

والوسيلة لتبسيط التكامل إجراء التغيير: $\tan x = u$

(٢) قوة $\sec x$ وبالمثل قوة $\tan x$ فردية:

والوسيلة لتبسيط التكامل إجراء التغيير: $\sec x = u$

(٣) قوة $\sec x$ فردية وقوة $\tan x$ زوجية:

هنا نلجأ إلى التكامل بالتجزئ لتبسيط التكامل.

(٤) قوة $\sec x$ تساوي الصفر: نكتب التكامل على الشكل:

$$\int \tan^m x dx = \int \tan^{m-2} x (\sec^2 x - 1) dx, \quad (m \geq 2), \text{ فنجد:}$$

(١٠, ٢٤)

$$\boxed{\int \tan^m x dx = \frac{1}{m-1} \tan^{m-1} x - \int \tan^{m-2} x dx}$$

ثم نتابع بنفس الطريقة بالنسبة للتكامل الناتج. وسنوضح ذلك بالتفصيل فيما يلي:

(١) قوة $\sec x$ زوجية وأكبر من 2

(أ) نكتب التكامل على الشكل: $\int \tan^m x \sec^{n-2} x \sec^2 x dx$

(ب) نعبر عن $\sec^{n-2} x$ بدلالة $\tan x$ باستخدام العلاقة:

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$

(ج) نجري التغيير $\tan x = u$ فيتحول التكامل إلى تكامل كثيرة حدود في المتغير u .

مثال (٢٣, ١٠)

أوجد التكامل: $\int \tan^3 x \sec^6 x dx$

الحل

(أ) نكتب التكامل على الشكل: $\int \tan^3 x \sec^4 x \sec^2 x dx$ (ب) نعبر عن $\sec^4 x$ بدلالة $\tan x$ ، فنجد: $\sec^4 x = (1 + \tan^2 x)^2$ (ج) نجري التغير $\tan x = u$ ، فنجد: $du = \sec^2 x dx$ يصبح التكامل على الشكل:

$$\begin{aligned} \int \tan^3 x (1 + \tan^2 x)^2 \sec^2 x dx &= \int u^3 (1 + u^2)^2 du = \int u^3 (1 + 2u^2 + u^4) du \\ &= \int (u^3 + 2u^5 + u^7) du = \frac{u^4}{4} + \frac{2u^6}{6} + \frac{u^8}{8} + c = \frac{\tan^4 x}{4} + \frac{\tan^6 x}{3} + \frac{\tan^8 x}{8} + c \end{aligned}$$

مثال (٢٤, ١٠)

أوجد التكامل: $\int \sec^4 x dx$

الحل

نكتب التكامل على الشكل: $\int \sec^2 x \sec^2 x dx = \int (1 + \tan^2 x) \sec^2 x dx$ نضع: $du = \sec^2 x dx \Leftarrow \tan x = u$ يصبح التكامل على الشكل: $\int (1 + u^2) du = \frac{u^3}{3} + u + c = \frac{\tan^3 x}{3} + \tan x + c$ (٢) قوة $\sec x$ وبالمثل قوة $\tan x$ فردية(أ) نكتب التكامل على الشكل: $\int \tan^{m-1} x \sec^{n-1} x \sec x \tan x dx$ (ب) نعبر عن $\tan^{m-1} x$ بدلالة $\sec x$ باستخدام العلاقة: $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ (ج) نجري التغير: $\sec x = u$ فيتحول التكامل إلى تكامل كثيرة حدود في المتغير u .

مثال (٢٥, ١٠)

أوجد التكامل: $\int \sec^3 x \tan^3 x dx$

الحل

(أ) نضع التكامل على الشكل: $\int \sec^2 x \tan^2 x \sec x \tan x dx$ (ب) نعبر عن $\tan^2 x$ بدلالة $\sec x$ باستخدام الصيغة: $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ (ج) نجري التغير: $du = \sec x \tan x dx \Leftarrow \sec x = u$

يصبح التكامل على الشكل:

$$\begin{aligned}\int \sec^2 x (\sec^2 x - 1) \sec x \tan x dx &= \int u^2 (u^2 - 1) du \\ &= \int (u^4 - u^2) du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + c = \frac{\sec^5 x}{5} - \frac{\sec^3 x}{3} + c\end{aligned}$$

(٣) قوة $\sec x$ فردية وقوة $\tan x$ زوجية نعبر عن $\tan x$ بدلالة $\sec x$ باستخدام الصيغة:
 $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ ثم نكامل بالتجزئي.

نظرية (١٦, ١٠)

إذا كان $I_n = \int \sec^n x dx$ ، حيث n عدد طبيعي ($n \geq 2$) ، فإن:

$$I_n = \frac{1}{n-1} \tan x \sec^{n-2} x + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2} \quad (١٠, ٢٥)$$

البرهان

نكتب التكامل على الشكل:

$$I_n = \int \sec^{n-2} x \sec^2 x dx$$

$$\left. \begin{aligned} u = \tan x &\Leftarrow \sec^2 x dx = du \\ dv = (n-2) \sec^{n-3} x \sec x \tan x dx &\Leftarrow \sec^{n-2} x = v \end{aligned} \right\} \text{نضع:}$$

نطبق الصيغة: $\int v du = uv - \int u dv$ ، فنجد:

$$\begin{aligned}I_n &= \int \sec^{n-2} x \sec^2 x dx = \tan x \sec^{n-2} x - (n-2) \int \sec^{n-2} x \tan^2 x dx \\ &= \tan x \sec^{n-2} x - (n-2) \int \sec^{n-2} x (\sec^2 x - 1) dx\end{aligned}$$

$$= \tan x \sec^{n-2} x - (n-2) I_n + (n-2) I_{n-2}$$

$$(n-1) I_n = \tan x \sec^{n-2} x + (n-2) I_{n-2}$$

ومنه، فإن:

$$I_n = \frac{1}{n-1} \tan x \sec^{n-2} x + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}$$

أو:

إذا كان: $n = 3$ ، فإن:

$$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2} \tan x \sec x + \frac{1}{2} \int \sec x dx$$

(١٠, ٢٦)

$$\int \sec^3 x = \frac{1}{2} \tan x \sec x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| + c$$

ملحوظة (١٠, ٨)

ينصح بتطبيق الصيغة (١٠, ٢٦) فقط عندما يكون n عددا فرديا، أما بالنسبة للأعداد الزوجية فمن الأسهل مكاملتها مباشرة حسبما أشرنا إليه سابقا.

مثال (١٠, ٢٦)

أوجد التكامل: $\int \tan^2 x \sec^3 x dx$

الحل

نغير عن $\tan x$ بدلالة $\sec x$ ، فيصبح التكامل على الصورة:

$$(١٠, ٢٧) \quad \int (\sec^2 x - 1) \sec^3 x dx = \int \sec^5 x dx - \int \sec^3 x dx$$

بالاستفادة من الصيغة (١٠, ٢٥)، نجد:

$$I_5 = \frac{1}{4} \tan x \sec^3 x + \frac{3}{4} I_3$$

ومن نفس الصيغة، نجد:

$$I_3 = \frac{1}{2} \tan x \sec x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| + c$$

بالتعويض في (١٠, ٢٧)، نجد المطلوب.

مثال (١٠, ٢٧)

أوجد التكامل: $\int \csc^5 x dx$

الحل

بالاستفادة من (١٠, ٢٥)، نعلم أن:

$$\int \sec^n x dx = \frac{1}{n-1} \tan x \sec^{n-2} x + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x dx$$

لنبدل x في طرفي المساواة السابقة بالمقدار: $\frac{\pi}{2} - x$ ، فنجد:

$$-\int \csc^n x dx = \frac{1}{n-1} \cot x \csc^{n-2} x - \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} x dx$$

(لاحظ أن: $\csc x = \sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ ، وأن: $d\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -dx$)

إذن:

$$\int \csc^n x dx = -\frac{1}{n-1} \cot x \csc^{n-2} x + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} x dx$$

بالأسلوب نفسه المتبع في المثال السابق، نجد المطلوب.

(٤) قوة $\sec x$ تساوي الصفر

مثال (٢٨, ١٠)

أوجد التكاملين:

$$\int \tan^5 x dx \quad (٢) \quad \int \tan^6 x dx \quad (١)$$

الحل

(١) نكتب التكامل على الصورة: $\int \tan^4 x \tan^2 x dx$ ثم نعوض عن $\tan^2 x$ بالقيمة $\sec^2 x - 1$ ، فنجد:

$$\int \tan^4 x \tan^2 x dx = \int \tan^4 x (\sec^2 x - 1) dx = \int \tan^4 x \sec^2 x dx - \int \tan^4 x dx$$

نتبع نفس الأسلوب بالنسبة للتكامل: $\int \tan^4 x dx$ ، فنجد:

$$\int \tan^6 x dx = \int \tan^4 x \sec^2 x dx - \int \tan^2 x (\sec^2 x - 1) dx$$

$$= \int \tan^4 x \sec^2 x dx - \int \tan^2 x \sec^2 x dx + \int (\sec^2 x - 1) dx$$

$$= \int \tan^4 x \sec^2 x dx - \int \tan^2 x \sec^2 x dx + \int \sec^2 x dx - \int dx$$

(بالنسبة للتكاملات الثلاث الأول نضع: $\tan x = u$)

$$= \frac{\tan^5 x}{5} - \frac{\tan^3 x}{3} + \tan x - x + c$$

(٢) نكتب التكامل على الصورة: $\int \tan^3 x \tan^2 x dx$

بنفس الأسلوب السابق نكتب التكامل على الشكل:

$$\int \tan^5 x dx = \int \tan^3 x (\sec^2 x - 1) dx = \int \tan^3 x \sec^2 x dx - \int \tan x (\sec^2 x - 1) dx$$

$$= \int \tan^3 x \sec^2 x dx - \int \tan x \sec^2 x dx + \int \tan x dx = \frac{\tan^4 x}{4} - \frac{\tan^2 x}{2} - \ln |\cos x| + c$$

مثال (١٠, ٢٩)

$$(n \geq 2) \quad I_n = \int \tan^n x dx \quad \text{ليكن:}$$

$$(١٠, ٢٨) \quad I_n = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - I_{n-2} \quad \text{أثبت أن:}$$

الحل

من الملاحظ أن:

$$\begin{aligned} I_n &= \int \tan^n x dx = \int \tan^{n-2} x \cdot \tan^2 x dx = \int \tan^{n-2} x (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \int \tan^{n-2} x \cdot \sec^2 x dx - I_{n-2} \end{aligned}$$

(نضع: $du = \sec^2 x dx \Leftrightarrow \tan x = u$ ، إذن:

$$I_n = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - I_{n-2}$$

مثال (١٠, ٣٠)

أوجد التكامل: $\int \cot^8 x dx$

الحل

من (١٠, ٢٨)، نعلم أن:

$$\boxed{\int \tan^n x dx = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x dx}$$

لنعوض عن x بالمقدار: $\frac{\pi}{2} - x$ في طرفي المطابقة السابقة، فنجد:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \int \tan^n \left(\frac{\pi}{2} - x \right) d \left(\frac{\pi}{2} - x \right) &= \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) - \int \tan^{n-2} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) d \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \\ - \int \cot^n x dx &= \frac{1}{n-1} \cot^{n-1} x + \int \cot^{n-2} x dx \end{aligned}$$

$$\boxed{\int \cot^n x = -\frac{1}{n-1} \cot^{n-1} x - \int \cot^{n-2} x dx}$$

ومنه:

ومنه:

$$\int \cot^8 x dx = -\frac{1}{7} \cot^7 x - \int \cot^6 x dx$$

$$\int \cot^6 x dx = -\frac{1}{5} \cot^5 x - \int \cot^4 x dx$$

$$\int \cot^4 x dx = -\frac{1}{3} \cot^3 x - \int \cot^2 x dx$$

$$\int \cot^2 x dx = -\cot x - x + c$$

إذن:

$$\int \cot^8 x dx = -\frac{1}{7} \cot^7 x + \frac{1}{5} \cot^5 x - \frac{1}{3} \cot^3 x + \cot x + x + c$$

تمارين (٢, ١٠)

أوجد التكاملات التالية:

$$\int \sin 10x \sin 15x dx \quad (٢)$$

$$\int \sin 3x \cos 5x dx \quad (١)$$

$$\int \sin \frac{x}{3} \cos \frac{x}{2} dx \quad (٤)$$

$$\int \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3} dx \quad (٣)$$

$$\int \sin wt \sin (wt + \varphi) dt \quad (٦)$$

$$\int \cos(ax+b) \cos(ax-b) dx \quad (٥)$$

$$\int \sin x \sin 2x \sin 3x dx \quad (٨)$$

$$\int \cos x \cos^2 3x dx \quad (٧)$$

أوجد التكاملات التالية:

$$\int \sin^5 x dx \quad (١٠)$$

$$\int \cos^3 x dx \quad (٩)$$

$$\int \sin^3 \frac{x}{2} \cos^5 \frac{x}{2} dx \quad (١٢)$$

$$\int \sin^2 x \cos^3 x dx \quad (١١)$$

$$\int \sin^4 x dx \quad (١٤)$$

$$\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x} dx \quad (١٣)$$

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx \quad (١٦)$$

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx \quad (١٥)$$

$$\int \csc^4 x dx \quad (١٨)$$

$$\int \cos^6 3x dx \quad (١٧)$$

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x} dx \quad (٢٠)$$

$$\int \sec^6 x dx \quad (١٩)$$

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x \cos^3 x} \quad (٢٢)$$

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^4 x} \quad (٢١)$$

$$\int \frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x \cos x} dx \text{ (٢٤)}$$
$$\int \sec^5 4x dx \text{ (٢٦)}$$
$$\int \cot^4 x dx \text{ (٢٨)}$$
$$\int x \sin^2 x^2 dx \text{ (٣٠)}$$
$$\int \sin^5 x \sqrt[3]{\cos x} dx \text{ (٣٢)}$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{\tan x}} \text{ (٣٤)}$$

$$\int \frac{dx}{\sin \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2}} \text{ (٢٣)}$$
$$\int \csc^5 x dx \text{ (٢٥)}$$
$$\int \tan^2 5x dx \text{ (٢٧)}$$
$$\int \left(\tan^3 \frac{x}{3} + \tan^4 \frac{x}{4} \right) dx \text{ (٢٩)}$$
$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx \text{ (٣١)}$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos^3 x}} \text{ (٣٣)}$$
$$\int \cot^3 x dx \text{ (٣٥)}$$

(٩, ١٠) التعويضات المثلثية
The Trigonometric Substitution

نظرية (١٧, ١٠)

لتكن f دالة متصلة على الفترة [a,a].

(١) إذا كانت f دالة زوجية تحقق الشرط $f(-x) = f(x)$ ، فإن: $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

(٢) إذا كانت f دالة فردية تحقق الشرط $f(-x) = -f(x)$ ، فإن: $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

يستحسن في كثير من التكاملات التي تحوي المقادير:
 $\sqrt{a^2-x^2}$ ، $\sqrt{a^2+x^2}$ ، $\sqrt{x^2-a^2}$ ، حيث $a > 0$

إجراء التغير للمتحول x، كما يلي:

المقدار	التغير	القيمة الجديدة للمقدار	مجال t	قيمة t بدلالة x
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x = a \sin t$	$a \cos t$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$t = \sin^{-1} \frac{x}{a}$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x = a \tan t$	$a \sec t$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$t = \tan^{-1} \frac{x}{a}$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x = a \sec t$	$a \tan t$	$[+\pi, \frac{3\pi}{2}) \cup [0, \frac{\pi}{2})$	$t = \sec^{-1} \frac{x}{a}$

لاحظ أن: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ، $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ ، $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$

مثال (١٠, ٣١)

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{x^2 \sqrt{1-x^2}} \text{ أوجد قيمة التكامل:}$$

الحل

نضع: $x = \sin u$ ، فنجد $dx = \cos u du$ (لاحظ أن: $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ ، وأن $u \neq 0$)عندما: $x = \frac{1}{2}$ ، فإن: $u = \frac{\pi}{6} \Leftarrow \sin u = \frac{1}{2}$ وعندما: $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ، فإن: $u = \frac{\pi}{4} \Leftarrow \sin u = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ، إذن:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{x^2 \sqrt{1-x^2}} &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos u du}{\sin^2 u \cdot \cos u} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{du}{\sin^2 u} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \csc^2 u du \\ &= -\cot u \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = -\cot \frac{\pi}{4} + \cot \frac{\pi}{6} = -1 + \sqrt{3} \approx -1 + 1.73 \approx 0.73 \end{aligned}$$

نظرية (١٨, ١٠)

إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a, b]$ ، وإذا كانت الدالتان F, G المعرفتين بالمعادلتين: $v = F(x)$ ، $u = G(x)$ قابلتين للاشتقاق على الفترة I . وإذا كان المقداران u, v ينتميان إلى الفترة $[a, b]$ ، فإن:

$$\frac{d}{dx} \left(\int_u^v f(t) dt \right) = f(v) \frac{dv}{dx} - f(u) \frac{du}{dx}$$

مثال (١٠, ٣٢)

$$y = \int_x^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt \text{ أوجد مشتقة الدالة المعرفة بالمساواة:}$$

الحل

$$\text{نعلم أن: } \frac{d}{dx} \left(\int_u^v f(t) dt \right) = f(v) \frac{dv}{dx} - f(u) \frac{du}{dx}$$

إذن:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \int_x^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt \\ &= \sqrt{1+v^2} \cdot 2x - \sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+x^4} \cdot (2x) - \sqrt{1+x^2} \\ & \quad (v = x^2) \end{aligned}$$

مثال (١٠, ٣٣)

$$\int \frac{x^2}{(1-4x^2)^{\frac{3}{2}}} dx \text{ أوجد التكامل:}$$

الحل

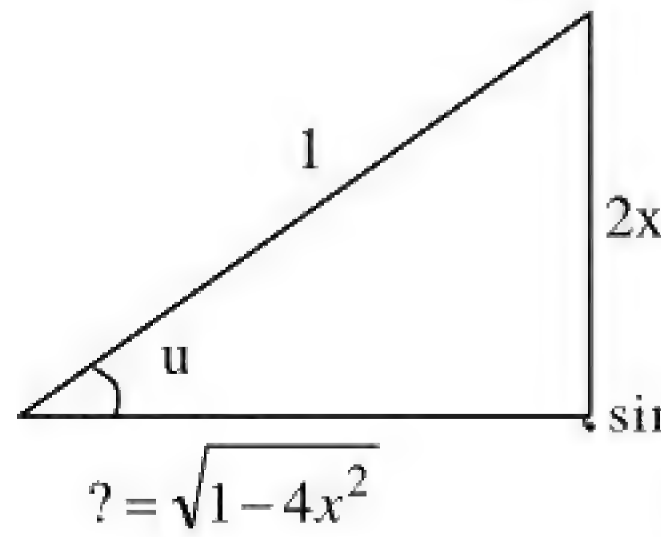
لنجر التغيير: $u = \sin^{-1}(2x) \Leftrightarrow 2x = \sin u$

$$\left(\frac{\pi}{2} > u > -\frac{\pi}{2} \right)$$

$$dx = \frac{1}{2} \cos u du, \quad 1-4x^2 = 1 - \sin^2 u = \cos^2 u$$

يكتب التكامل على الشكل:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(1-4x^2)^{\frac{3}{2}}} dx &= \frac{1}{4} \int \frac{\sin^2 u}{(\cos^2 u)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{2} \cos u du = \frac{1}{8} \int \frac{\sin^2 u \cos u}{\cos^3 u} du \\ &= \frac{1}{8} \int \tan^2 u du = \frac{1}{8} \int (\sec^2 u - 1) du \\ &= \frac{1}{8} (\tan u - u) + c \end{aligned}$$



(لاحظ أن: $\tan u = \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}} \Leftrightarrow \sin u = \frac{2x}{1}$)
(اعتبرنا u زاوية حادة)

ملحوظة:

لو وقعت u في الربع الرابع، لكنت $\sin u \leq 0$ ، $x \leq 0$
 $\tan u \leq 0$ ، $\cos u > 0$ ولحصلنا على نفس النتيجة.

$$\left(\sin u = \frac{2x}{1} \right)$$

مما سبق، نجد:

$$\int \frac{x^2}{(1-4x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{1}{8} \left(\frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}} - \sin^{-1} 2x \right) + c$$

مثال (٣٤, ١٠)

$$\int \frac{t^2 - 4t + 4}{(-4t^2 + 16t - 15)^{\frac{3}{2}}} dt: \text{ أوجد التكامل:}$$

الحل

من الواضح أن:

$$-4t^2 + 16t - 15 = -4(t^2 - 4t) - 15$$

نتمم إلى مربع كامل (Perfect Square) المقدار ما بين القوسين بإضافة وطرح مربع نصف

معامل t ، فنجد:

$$\begin{aligned} -4(t^2 - 4t) - 15 &= -4[(t^2 - 4t + 4) - 4] - 15 \\ &= -4[(t - 2)^2 - 4] - 15 = -4(t - 2)^2 + 16 - 15 = 1 - 4(t - 2)^2 \\ dt = dx &\Leftarrow t = x + 2 \Leftarrow t - 2 = x \end{aligned}$$

يكتب التكامل على الشكل:

$$\int \frac{x^2}{(1-4x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$$

(لاحظ أن: $t^2 - 4t + 4 = (t - 2)^2 = x^2$)

وبالاستفادة من المثال السابق، نجد:

$$\begin{aligned} \int \frac{t^2 - 4t + 4}{(-4t^2 + 16t - 15)^{\frac{3}{2}}} dt &= \int \frac{x^2}{(1-4x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{1}{8} \left(\frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}} - \sin^{-1} 2x \right) + c \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{2(t-2)}{\sqrt{-4t^2 + 16t - 15}} - \sin^{-1}(2t-4) \right) + c \\ &= \frac{t-2}{4\sqrt{-4t^2 + 16t - 15}} - \frac{1}{8} \sin^{-1}(2t-4) + c \end{aligned}$$

مثال (١٠, ٣٥)

أوجد التكامل: $\int \frac{1}{(9+x^2)^2} dx$

الحل

لنجر التغيير: $u = \tan^{-1} \frac{x}{3} \Leftrightarrow x = 3 \tan u$

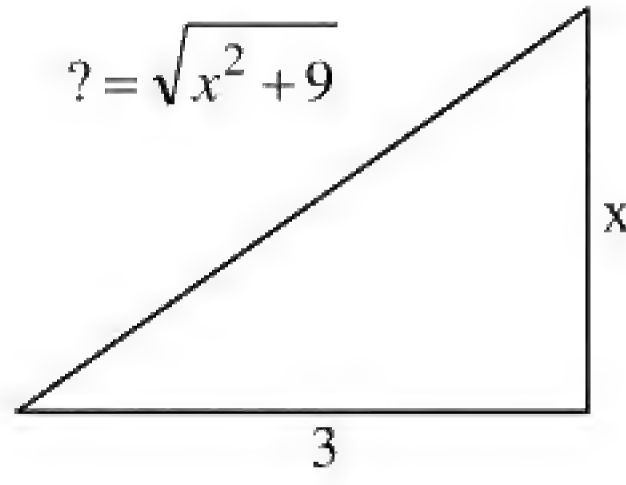
$$\left(\frac{\pi}{2} > u > -\frac{\pi}{2} \right)$$

فنجد: $dx = 3 \sec^2 u du$ ، $9 + x^2 = 9(1 + \tan^2 u) = 9 \sec^2 u$

يكتب التكامل على الشكل:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(9+x^2)^2} dx &= \frac{3}{81} \int \frac{\sec^2 u}{\sec^4 u} du = \frac{1}{27} \int \frac{1}{\sec^2 u} du = \frac{1}{27} \int \cos^2 u du \\ &= \frac{1}{54} \int (1 + \cos 2u) du = \frac{1}{54} \left(u + \frac{\sin 2u}{2} \right) + c = \frac{1}{54} (u + \sin u \cos u) + c \end{aligned}$$

لاحظ أن:



$$\sin u = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}, \cos u = \frac{3}{\sqrt{x^2+9}} \Leftrightarrow \tan u = \frac{x}{3}$$

(اعتبرنا u زاوية حادة)

ملحوظة:

لو وقعت u في الربع الرابع، لكانت $x \leq 0$ ، $\sin u \leq 0$ ، $\cos u > 0$ ، ولحصلنا على نفس النتيجة.

$$\left(\tan u = \frac{x}{3} \right)$$

مما سبق، نجد:

$$\int \frac{1}{(9+x^2)^2} dx = \frac{1}{54} \left(\tan^{-1} \frac{x}{3} + \frac{3x}{x^2+9} \right) + c$$

مثال (١٠, ٣٦)

أوجد التكامل: $\int \frac{1}{(4t^2 + 4t + 37)^2} dt$

الحل

من الواضح أن: $4t^2 + 4t + 37 = 4(t^2 + t) + 37$
 نتمم إلى مربع كامل المقدار ما بين القوسين بإضافة وطرح مربع نصف معامل t ، فنجد:

$$4(t^2 + t) + 37 = 4\left(t^2 + t + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) + 37$$

$$= 4\left[\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] + 37 = 4\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - 1 + 37 = 4\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + 36$$

$$dt = dx \Leftrightarrow t = x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow t + \frac{1}{2} = x$$

يكتب التكامل على الشكل:

$$\int \frac{1}{(4t^2 + 4t + 37)^2} dt = \int \frac{1}{(4x^2 + 36)^2} dx = \frac{1}{16} \int \frac{dx}{(x^2 + 9)^2}$$

وبالاستفادة من المثال السابق، نجد:

$$\int \frac{1}{(4t^2 + 4t + 37)^2} dt = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{54} \left(\tan^{-1} \frac{x}{3} + \frac{3x}{x^2 + 9} \right) + c$$

(c ثابت جديد، لاحظ أن $x = t + \frac{1}{2}$)

مثال (٣٧، ١٠)

$$\int \frac{1}{(x^2 - 2)\sqrt{x^2 - 4}} dx$$

الحل

$$\text{لنضع: } u = \sec^{-1} \frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 2 \sec u$$

$$\left(\frac{3\pi}{2} > u > \pi \quad \text{أو} \quad \frac{\pi}{2} > u > 0 \right)$$

$$\text{فنجد: } \sqrt{x^2 - 4} = 2 \tan u, \quad dx = 2 \sec u \tan u du$$

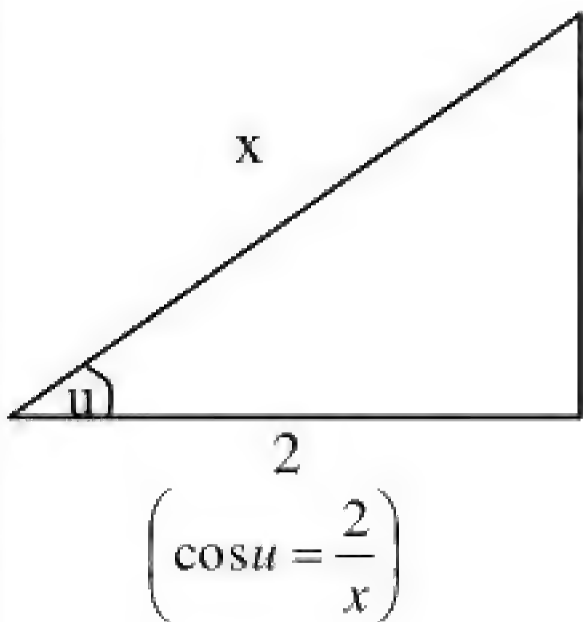
يكتب التكامل على الشكل:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2 - 2)\sqrt{x^2 - 4}} dx &= \int \frac{2 \sec u \tan u}{(4 \sec^2 u - 2)(2 \tan u)} du = \frac{1}{2} \int \frac{\sec u}{2 \sec^2 u - 1} du \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{\frac{1}{\cos u}}{\frac{2}{\cos^2 u} - 1} du = \frac{1}{2} \int \frac{\cos u}{2 - \cos^2 u} du \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{\cos u}{2 - (1 - \sin^2 u)} du = \frac{1}{2} \int \frac{\cos u}{1 + \sin^2 u} du \end{aligned}$$

نضع $dt = \cos u du \Leftarrow \sin u = t$

بالتالي فإن:

$$\int \frac{1}{(x^2 - 2)\sqrt{x^2 - 4}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{2} \tan^{-1} t + c = \frac{1}{2} \tan^{-1}(\sin u) + c$$



لاحظ أن: $\sin u = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} \Leftarrow \cos u = \frac{2}{x} \Leftarrow \sec u = \frac{x}{2}$
(اعتبرنا u زاوية حادة)

ملحوظة:

لو وقعت u في الربع الثالث، لكانت:

$x < 0$ ، $\sin u < 0$ ولحصلنا على نفس النتيجة.

مما سبق، نجد:

$$\int \frac{1}{(x^2 - 2)\sqrt{x^2 - 4}} dx = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} + c$$

مثال (١٠, ٣٨)

$$\int \frac{dt}{(t^2 + 2t - 1)\sqrt{t^2 + 2t - 3}} : \text{أوجد التكامل}$$

الحل

$$t^2 + 2t - 3 = t^2 + 2t + 1 - 1 - 3$$

أضفنا وطرحنا مربع نصف معامل t ، فأصبح ثلاثي الحدود على

$$\text{الشكل: } t^2 + 2t - 3 = (t + 1)^2 - 4$$

$$\text{لنجر التغيير: } dt = dx \Leftarrow t = x - 1 \Leftarrow t + 1 = x$$

يكتب التكامل على الشكل:

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{(t^2 + 2t - 1)\sqrt{t^2 + 2t - 3}} &= \int \frac{dx}{[(x - 1)^2 + 2(x - 1) - 1]\sqrt{x^2 - 4}} \\ &= \int \frac{dx}{(x^2 - 2)\sqrt{x^2 - 4}} \end{aligned}$$

وبالاستفادة من المثال السابق، فإن:

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{(t^2 + 2t - 1)\sqrt{t^2 + 2t - 3}} &= \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} + c \\ &= \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{\sqrt{t^2 + 2t - 3}}{t + 1} + c \end{aligned}$$

تمارين (١٠, ٣)

أوجد العدد c الذي يحقق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل للدالة f في كل ما يلي، على الفترة المرافقة:

$$[-1, 3], f(x) = 3x^2 - 2x + 3 \quad (٢) \quad [-2, 2], f(x) = 3 + |x - 1| \quad (١)$$

$$[-2, 0], f(x) = \sqrt[3]{x + 1} \quad (٤) \quad [-2, 1], f(x) = |x| + 2 \quad (٣)$$

$$[0, 3], f(x) = \sqrt{1 + x} \quad (٦) \quad [0, \sqrt{5}], f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} \quad (٥)$$

أوجد y' ، إذا كان:

$$y = x \int_1^{x^3} \sin(2t^2) dt + \int_{2x}^{\frac{1}{x}} \cos \frac{1}{t} dt \quad (\vee)$$

$$y = x^2 \int_1^{x^2} \sin(2t^2) dt + \int_0^{\pi} \sin^2 t dt \quad (\wedge)$$

أوجد التكاملات:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{25+3x}} \quad (١٠)$$

$$\int_0^2 (x^2 - 4x + 2) dx \quad (٩)$$

$$\int_3^8 \sqrt{2x} + \sqrt[3]{x} dx \quad (١٢)$$

$$\int_2^6 \sqrt{x-2} dx \quad (١١)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx \quad (١٣)$$

(١٤) إذا كانت f دالة متصلة على الفترة $[a, b]$ ، فبالتعريف نحدد معدل الدالة f على الفترة $[a, b]$ ،

$$\text{بالصيغة: } f_{av} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

أوجد المعدل لكل من دوال التكامل الموضحة في التمارين من ٩ حتى ١٢ على فترات التكامل المشار إليها في كل تمرين.

أوجد التكاملات التالية:

$$\int \sqrt{2+x^2} dx \quad (١٦)$$

$$\int \sqrt{3-2x-x^2} dx \quad (١٥)$$

$$\int \sqrt{x^2-2x+2} dx \quad (١٨)$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}} dx \quad (١٧)$$

$$\int \sqrt{x^2+x} dx \quad (٢٠)$$

$$\int \sqrt{x^2-4} dx \quad (١٩)$$

$$\int (x^2+x+1)^{\frac{3}{2}} dx \quad (٢٢)$$

$$\int \sqrt{x^2-6x-7} dx \quad (٢١)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2-2x+5)^{\frac{3}{2}}} \quad (٢٤)$$

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}} \quad (٢٣)$$

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}} \quad (٢٦)$$

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} \quad (٢٥)$$

الإجابات

$$\frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2} + 2\sin^{-1}\frac{x+1}{2} \quad (١٥)$$

$$\frac{x}{2}\sqrt{2+x^2} \ln(x+\sqrt{2+x^2}) \quad (١٦)$$

$$\frac{x}{2}\sqrt{9+x^2} - \frac{9}{2} \ln(x+\sqrt{9+x^2}) \quad (١٧)$$

$$\frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x+2} + \frac{1}{2} \ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+2}) \quad (١٨)$$

$$\frac{x}{2}\sqrt{x^2-4} - 2\ln|x+\sqrt{x^2-4}| \quad (١٩)$$

$$\frac{2x+1}{4}\sqrt{x^2+x} - \frac{1}{8}\ln|2x+1+2\sqrt{x^2+x}| \quad (٢٠)$$

$$\frac{x-3}{2}\sqrt{x^2-6x-7} - 8\ln|x-3+\sqrt{x^2-6x-7}| \quad (٢١)$$

$$\frac{1}{64}(2x+1)(8x^2+8x+17)\sqrt{x^2+x+1} + \frac{27}{128}\ln(2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}) \quad (٢٢)$$

$$2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}} \quad (٢٣)$$

$$\frac{x-1}{4\sqrt{x^2-2x+5}} \quad (٢٤)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}} \quad (٢٥)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}\right| \quad (٢٦)$$

(١٠, ١٠) تكامل الدوال الكسرية باستخدام الكسور الجزئية

Integration of Rational Functions by Partial Fractions

الهدف من دراستنا التالية هو تكامل الدوال الكسرية الحقيقية من الشكل:

(١٠, ٢٩)

$$h(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \dots + b_m}$$

وذلك بتفريقها إلى كسور جزئية بسيطة يسهل تكاملها، ونظرية تفريق الكسور تجيب على هذا التساؤل.

لتفريق كسر من الشكل (٢٩, ١٠)، كل من بسطه ومقامه كثيرة حدود في المتغير x ، يجب مراعاة الأمور التالية:

(١) قوة البسط أقل من قوة المقام، وإلا قسمنا البسط على المقام واستنتجنا القسم الصحيح.

(٢) اختصار العوامل المشتركة بين البسط والمقام.

(٣) تحليل المقام إلى عوامل من الشكل:

$$(أ) \quad (x-a)^m \quad \text{حيث } m \text{ عدد طبيعي، } a \in \mathbb{R}.$$

$$(ب) \quad \text{أو الشكل: } (bx^2 + cx + d)^n, \quad \text{حيث } n \text{ عدد طبيعي: } b, c, d \in \mathbb{R}$$

بشرط أن لا يكون المقدار: $bx^2 + cx + d$ قابلاً للتحليل إلى عوامل من الدرجة الأولى. بلغة

أخرى أن يكون مميز هذا المقدار سالبا ($c^2 - 4bd < 0$). يكون شكل التفريق للكسر:

$h(x)$ إن كان مقامه مساويا $(x-a)^m$ على الصورة:

$$h(x) = \frac{A_0}{(x-a)^m} + \frac{A_1}{(x-a)^{m-1}} + \dots + \frac{A_{m-1}}{x-a}, \quad m \in \mathbb{N}$$

يكون شكل التفريق للكسر $h(x)$ ، إن كان المقام مساويا $(bx^2 + cx + d)^n$ ، حيث: $c^2 - 4bd < 0$ على الصورة:

$$h(x) = \frac{B_0x + C_0}{(bx^2 + cx + d)^n} + \frac{B_1x + C_1}{(bx^2 + cx + d)^{n-1}} + \dots + \frac{B_{n-1}x + C_{n-1}}{(bx^2 + cx + d)}$$

أما إذا كان المقام حاصل ضرب عوامل مختلطة من الصنفين $(x-a)^m$ و $(cx^2 + bx + d)^n$ معاً، كما في الكسر:

$$h(x) = \frac{x^4 + x^2 + x + 1}{(x-3)(x^2 + 4)^2(x+1)^2(x^2 + x + 1)}$$

فيكون التفريق، على الصورة:

$$h(x) = \frac{A_0}{x-3} + \frac{A_1}{(x+1)^2} + \frac{A_2}{(x+1)} + \frac{A_3x + A_4}{x^2 + x + 1} + \frac{A_5x + A_6}{(x+4)^2} + \frac{A_7x + A_8}{x^2 + 1}$$

حيث: $\frac{A_0}{x-3}$ ، هو الجزء الموافق للعامل $x-3$

$\frac{A_1}{(x+1)^2} + \frac{A_2}{x+1}$ ، هو الجزء الموافق للعامل $(x+1)^2$

$\frac{A_3x + A_4}{x^2 + x + 1}$ ، هو الجزء الموافق للعامل $x^2 + x + 1$

$$\frac{A_5x + A_6}{(x+4)^2} + \frac{A_7x + A_8}{x^2 + 4}$$

هو الجزء الموافق للعامل $(x^2 + 4)^2$

مثال (٣٩, ١٠)

بين الشكل الذي يجب أن نفرق عليه الكسور التالية:

$$\begin{array}{ll} \frac{x+1}{x+x^2} & (١) \\ \frac{x^2+4}{x^3+x^2+x} & (٢) \\ \frac{x^3+x^2+2}{x(x^2-4)(x^2+5)} & (٣) \\ \frac{x^3+7x}{(x+1)^2(x^2+2)^2} & (٤) \\ \frac{3x^4}{(x^2+x+1)^3(x^2-1)} & (٥) \\ \frac{2x^2+3x}{(x^2+5x+6)(x^2+3)} & (٦) \end{array}$$

الحل

$$\frac{x+1}{x+x^2} = \frac{x+1}{x(1+x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1+x} \quad (١)$$

$$\frac{x^2+4}{x^3+x^2+x} = \frac{x^2+4}{x(x^2+x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} \quad (٢)$$

$$\frac{x^3+x^2+2}{x(x^2-4)(x^2+5)} = \frac{x^3+x^2+2}{x(x-2)(x+2)(x^2+5)} \quad (٣)$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2} + \frac{Dx+E}{x^2+5}$$

$$\frac{x^3+7x}{(x+1)^2(x^2+2)^2} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+2)^2} + \frac{Ex+F}{x^2+2} \quad (٤)$$

$$\frac{3x^4}{(x^2+x+1)^3(x^2-1)} = \frac{3x^4}{(x^2+x+1)^3(x-1)(x+1)} \quad (٥)$$

$$= \frac{Ax+B}{(x^2+x+1)^3} + \frac{Cx+D}{(x^2+x+1)^2} + \frac{Ex+F}{x^2+x+1} + \frac{G}{x-1} + \frac{H}{x+1}$$

$$\frac{2x^2+3x}{(x^2+5x+6)(x^2+3)} = \frac{2x^2+3x}{(x+2)(x+3)(x^2+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} + \frac{Cx+D}{x^2+3} \quad (٦)$$

لاحظ أن قوة البسط أقل من قوة المقام في جميع الفقرات، وأنه لا يوجد عوامل مشتركة بين البسط والمقام.

مثال (١٠, ٤٠)

أوجد التكامل: $\int \frac{x^2 + 1}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx$

الحل

يكتب الكسر على الشكل:

$$h(x) = \frac{x^2 + 1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

وتحدد الثوابت وبشكل وحيد، بالطريقة التالية:

بتوحيد المقامات وحذفها، نجد:

$$x^2 + 1 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2)$$

لنعوض، عن:

x، بالقيمة 1 (جذر العامل الأول)، فنجد: $A = 1 \Leftarrow 2 = A(-1)(-2)$ x، بالقيمة 2 (جذر العامل الثاني)، فنجد: $B = -5 \Leftarrow 5 = B(1)(-1)$ x، بالقيمة 3 (جذر العامل الثالث)، فنجد: $C = 5 \Leftarrow 10 = C(2)(1)$

(يمكن استخدام هذه الطريقة إذا كانت العوامل من الدرجة الأولى وجذورها بسيطة)، بالتالي:

$$h(x) = \frac{x^2 + 1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-1} + \frac{-5}{x-2} + \frac{5}{x-3}$$

$$\int h(x) dx = \ln|x-1| - 5\ln|x-2| + 5\ln|x-3| + C$$

إذن:

(تسمى الطريقة التي حددنا بها الثوابت: طريقة تحديد الثوابت بإعطاء قيم مناسبة للمتغير x)

مثال (١٠, ٤١)

(الطريقة العامة لتحديد الثوابت) (طريقة المطابقة)

فرق الكسر التالي إلى كسوره البسيطة:

$$h(x) = \frac{x^2 + 1}{(x+1)(x^2 + x + 1)}, \text{ ثم أوجد: } \int h(x) dx$$

الحل

شكل التفريق:

$$\frac{x^2 + 1}{(x+1)(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2 + x + 1}$$

بتوحيد المقامات ثم حذفها، نجد:

$$x^2 + 1 = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x + 1) \Rightarrow$$

$$x^2 + 1 = x^2(A + B) + x(A + B + C) + A + C$$

بإجراء المطابقة بين طرفي المساواة، نجد:

$$(x^2 \text{ معامل}) \quad 1 = A + B$$

$$(x \text{ معامل}) \quad 0 = A + B + C$$

$$(\text{الحد الثابت}) \quad 1 = A + C$$

(ساوينا بين معاملات قوى x المشابهة).

حصلنا على ثلاث معادلات خطية بثلاثة مجاهيل. بحلها، نجد:

$$C = -1 \quad (\text{طرحنا المعادلة الأولى من الثانية})$$

$$A = 2 \quad (\text{عوضنا عن } C \text{ بقيمتها في المعادلة الثالثة})$$

$$B = -1 \quad (\text{عوضنا عن } A \text{ بقيمتها في المعادلة الأولى})$$

$$h(x) = \frac{2}{x+1} - \frac{x+1}{x^2+x+1} \quad \text{فشكل التفريق، هو:}$$

من الملاحظ أن:

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = t^2 + \frac{3}{4}$$

$$(أتممنا إلى مربع كامل، ووضعنا $x + \frac{1}{2} = t \Leftrightarrow x = t - \frac{1}{2}$)$$

إذن:

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{x^2+x+1} dx &= \int \frac{t+\frac{1}{2}}{t^2+\frac{3}{4}} dt = \frac{1}{2} \int \frac{2t dt}{t^2+\frac{3}{4}} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \ln\left(t^2 + \frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{2t}{\sqrt{3}} + c \end{aligned}$$

ومنه:

$$\int h(x) dx = 2 \ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c$$

(c ثابت جديد)

مثال (١٠, ٤٢)

$$\int \frac{x^3 + x}{(x-2)^3(x+1)} dx : \text{أوجد التكامل}$$

الحل

يكتب الكسر على الشكل:

$$h(x) = \frac{x^3 + x}{(x-2)^3(x+1)} = \frac{A}{(x-2)^3} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x+1}$$

بتوحيد المقامات، نجد:

$$(10, 30) \quad x^3 + x = A(x+1) + B(x-2)(x+1) + C(x-2)^2(x+1) + D(x-2)^3$$

$$= A(x+1) + B(x^2 - x - 2) + C(x^2 - 4x + 4)(x+1) + D(x^3 - 6x^2 + 12x - 8)$$

الحدود الثابتة في الطرفين ثم بين معاملات x ، x^2 ، ... وهكذا...، نجد:

$$0 = A - 2B + 4C - 8D \quad \text{الحد الثابت:}$$

$$1 = A - B - 4C + 4C + 12D \quad \text{معامل } x:$$

$$(10, 31) \quad 0 = B + C - 4C - 6D \quad \text{معامل } x^2:$$

$$1 = C + D \quad \text{معامل } x^3:$$

لنعوض في المعادلة (١٠, ٣٠) عن:

$$x, \text{ بالقيمة } -1 \text{ (جذر العامل } (x+1), \text{ فنجد: } D = \frac{2}{27}$$

$$x, \text{ بالقيمة } 2 \text{ (جذر العامل } (x-2), \text{ فنجد: } A = \frac{10}{3}$$

$$\text{وبالتعويض عن } D \text{ بقيمتها في المعادلة الأخيرة من المجموعة (١٠, ٣١)، نجد: } C = \frac{25}{27}$$

أخيراً، نستنتج من المعادلة الثالثة من نفس المجموعة:

$$B = 6D + 3C = \frac{12}{27} + \frac{75}{27} = \frac{29}{9}$$

هنا مزجنا بين طريقة المطابقة لتحديد الثوابت وبين إعطاء قيم مناسبة للمتغير x وهذه أسرع الطرائق

لإيجاد الثوابت، بالتالي:

$$\int h(x) dx = \frac{10}{3} \int \frac{dx}{(x-2)^3} + \frac{29}{9} \int \frac{dx}{(x-2)^2} + \frac{25}{27} \int \frac{dx}{x-2} + \frac{2}{27} \int \frac{dx}{x+1}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{10}{3} \frac{(x-2)^{-2}}{-2} + \frac{29}{9} \frac{(x-2)^{-1}}{-1} + \frac{25}{27} \ln|x-2| + \frac{2}{27} \ln|x+1| + C \\
&= -\frac{5}{3} \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{29}{9} \frac{1}{(x-2)} + \frac{25}{27} \ln|x-2| + \frac{2}{27} \ln|x+1| + C
\end{aligned}$$

مثال (٤٣، ١٠)

أوجد التكامل:

$$\int \frac{x^4 + 1}{(x+1)(x^2 + x + 1)} dx$$

الحل

من الملاحظ أن درجة البسط أكبر من درجة المقام، لذا نقسم البسط على المقام فنجد:

$$\begin{array}{r}
\overline{x^3 + 2x^2 + 2x + 1} \quad \left. \begin{array}{l} x-2 \\ x^4 + 1 \end{array} \right\} \\
\hline
\begin{array}{r}
x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x \\
- 2x^3 - 2x^2 - x + 1 \\
\hline
2x^3 + 4x^2 + 4x + 2 \\
\hline
\end{array}
\end{array}$$

(الباقى) $\frac{2x^2 + 3x + 3}{x^2 + x + 1}$

بالتالي:

$$h(x) = \frac{x^4 + 1}{(x+1)(x^2 + x + 1)} = x - 2 + \frac{2x^2 + 3x + 3}{(x+1)(x^2 + x + 1)}$$

نكتب الجزء الكسري على الشكل:

$$(١٠، ٣٢) \quad \frac{2x^2 + 3x + 3}{(x+1)(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2 + x + 1}$$

لاحظ أن $\frac{A}{x+1}$ هو الجزء الموافق للمقدار $x+1$ (عامل من الدرجة الأولى في المقام)، وأن $\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$ هو الجزء الموافق للمقدار x^2+x+1 (عامل من الدرجة الثانية في المقام).

لاحظ أن المقدار x^2+x+1 لا يمكن تحليله إلى عوامل من الدرجة الأولى.

بتوحيد المقامات في (٣٢, ١٠) وحذفها، نجد:

$$2x^2 + 3x + 3 = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x + 1)$$

لتحديد الثوابت، نطابق طرفي المساواة السابقة:

$$\text{الحد الثابت: } 3 = A + C$$

$$\text{معامل } x: 3 = A + B + C$$

$$\text{معامل } x^2: 2 = A + B$$

بطرح المعادلتين الأخيرتين طرفاً من طرف، نجد: $C = 1$

وبالتعويض في الأولى، فإن: $A = 2$. بالتعويض في الثانية، نجد: $B = 0$

نسمي الطريقة السابقة في تحديد الثوابت (A,B,C) بطريقة المطابقة.

لنكامل الآن، فنجد:

$$\begin{aligned} \int h(x)dx &= \int (x-2)dx + 2 \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{dx}{x^2+x+1} \\ &= \frac{x^2}{2} - 2x + 2\ln|x+1| + \int \frac{dx}{x^2+x+1} \end{aligned}$$

التكامل في الطرف الثاني يساوي:

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$$

(أتمننا إلى مربع كامل)

نجري التعويض: $dx = dt \Leftrightarrow x = t - \frac{1}{2} \Leftrightarrow x + \frac{1}{2} = t$

$$\text{ومنه: } \int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \tan^{-1} \frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{2(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

$$\text{إذن: } \int h(x)dx = \frac{x^2}{2} - 2x + 2\ln|x+1| + \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

(١٠, ١١) التكاملات من الشكل: $\int f(\sin x, \cos x, \tan x) dx$

(التكامل باستخدام ظل نصف الزاوية)

من المستحسن في كثير من الأحيان إجراء التحويل:

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \tan^{-1} t \Leftrightarrow \tan \frac{x}{2} = t$$

مع ملاحظة أن:

$$\sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2} \quad (١)$$

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad (٢)$$

$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2} \quad (٣)$$

مثال (١٠, ٤٤)

أوجد التكاملات التالية:

$$\int \frac{\sec x}{2 \tan x + \sec x - 1} dx \quad (١)$$

$$\int \frac{\sin x \cos x}{(2 + \cos x)^2} dx \quad (٢)$$

$$\int \frac{dx}{\cos x (1 + \sin x)} \quad (٣)$$

$$\int \frac{dx}{3 + 2 \cos x} \quad (٤)$$

الحل

$$\int \frac{\sec x}{2 \tan x + \sec x - 1} dx \quad (١)$$

$$= \int \frac{\frac{1}{\cos x}}{\frac{2 \sin x}{\cos x} + \frac{1}{\cos x} - 1} dx = \int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 1}$$

نجري التغير: $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ ، $dx = \frac{2dt}{1+t^2} \Leftrightarrow \tan \frac{x}{2} = t$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \int \frac{2dt}{(1+t^2) \left(\frac{4t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1 \right)} = \int \frac{2dt}{(4t-1+t^2+1+t^2)} = \int \frac{dt}{t^2+2t} \\ &\int \frac{dt}{t^2+2t} = \int \frac{dt}{t(t+2)} \\ &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+2} \right) dt = \frac{1}{2} (\ln |t| - \ln |t+2|) + c \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t}{t+2} \right| + c = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\tan \frac{x}{2}}{\tan \frac{x}{2} + 2} \right| + c \end{aligned}$$

(٢) نضع: $\cos x = t - 2$ ، $dt = -\sin x dx \Leftrightarrow 2 + \cos x = t$

يصبح التكامل على الشكل:

$$\begin{aligned} - \int \frac{t-2}{t^2} dt &= - \int \left(\frac{1}{t} - \frac{2}{t^2} \right) dt \\ &= -\ln |t| - \frac{2}{t} + c = -\ln(2 + \cos x) - \frac{2}{2 + \cos x} + c \end{aligned}$$

(٣) نضع: $dx = \frac{dt}{\cos x} \Leftrightarrow dt = \cos x dx \Leftrightarrow \sin x = t$

يصبح التكامل على الشكل:

$$\int \frac{dt}{\cos^2 x (1+t)} = \int \frac{dt}{(1-t^2)(1+t)} = \int \frac{dt}{(1+t)^2(1-t)}$$

شكل التفريق، هو: $\Leftrightarrow \frac{1}{(1-t)(1+t)^2} = \frac{A}{(1+t)^2} + \frac{B}{1+t} + \frac{C}{1-t}$

$$1 = A(1-t) + B(1+t)(1-t) + C(1+t)^2$$

بالتعويض عن t بالقيمة -1 ، نجد: $A = \frac{1}{2}$ ، ثم بالقيمة: $t=1$ ، نجد:

$$C = \frac{1}{4}$$

ثم بالقيمة $t=0$ ، نجد: $\Leftrightarrow A + B + C = 1$ ، ومنه: $B = \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{(1+t)^2(1-t)} &= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{(1+t)^2} + \frac{1}{4} \int \frac{dt}{1+t} + \frac{1}{4} \int \frac{dt}{1-t} \\ &= -\frac{1}{2(1+t)} + \frac{1}{4} \ln |1+t| - \frac{1}{4} \ln |1-t| + c \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2(1+\sin x)} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| + c$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad , \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \Leftrightarrow \tan \frac{x}{2} = t \quad \text{نضع:} \quad (٤)$$

يصبح التكامل على الشكل:

$$\int \frac{dx}{3+2\cos x} = \int \frac{2dt}{(1+t^2) \left(3+2\frac{1-t^2}{1+t^2} \right)} = 2 \int \frac{dt}{t^2+5} = \frac{2}{\sqrt{5}} \tan^{-1} \frac{t}{\sqrt{5}} + c$$

$$\left(\int \frac{dt}{a^2+t^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{t}{a} + c \text{ : لا حظ أن:} \right) = \frac{2}{\sqrt{5}} \tan^{-1} \left(\frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{5}} \right) + c$$

تمارين (٤, ١٠)

$$\int \frac{dx}{(x-4)(x-5)(x+1)} \quad (٢)$$

$$\int \frac{(x^2+1)dx}{(x+1)(x-1)^4} \quad (٤)$$

$$\int \frac{x^2+1}{x^3-x^2} dx \quad (٦)$$

$$\int \frac{(x^4+1)}{(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2} dx \quad (٨)$$

$$\int \frac{x^4+x^2+1}{(x-1)^5} dx \quad (١٠)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} dx \quad (١٢)$$

$$\int \frac{x^2+1}{x^3+1} dx \quad (١٤)$$

$$\int \frac{x^4+x+1}{x^3-6x^2+12x-8} dx \quad (١٦)$$

$$\int \frac{x^5+1}{(x^2+1)(x-1)^2} dx \quad (١٨)$$

$$\int \frac{1}{x^4+x^2+1} dx \quad (٢٠)$$

$$\int \frac{dx}{(x-1)(x-2)} \quad (١)$$

$$\int \frac{dx}{(1-x)(x^2+4)} \quad (٣)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2-2x+2)^2} \quad (٥)$$

$$\int \frac{x^2+1}{(x+1)(x-1)^5(x^2+4)} dx \quad (٧)$$

$$\int \frac{x^2+x+2}{(x^2-2x+3)^2} dx \quad (٩)$$

$$\int \frac{dx}{x(1+x^2)^3} \quad (١١)$$

$$\int \frac{x^2+2}{x^4+1} dx \quad (١٣)$$

$$\int \frac{x^2+2x+7}{(x^2-3x-10)^2} dx \quad (١٥)$$

$$\int \frac{2x^2+4}{x^3+2x^2-3} dx \quad (١٧)$$

$$\int \frac{x^3+x+1}{(x^2+1)(x-1)} dx \quad (١٩)$$

$$\int \frac{x^2 + x + 1}{(x^2 - 1)(x^2 - 4)} dx \quad (٢٢)$$

$$\int \frac{dx}{x^4 + 1} \quad (٢٤)$$

$$\int \frac{x^5}{(x^3 + 1)(x^3 + 8)} dx \quad (٢٦)$$

إرشاد: أجز التغيير $x^3 = t$

$$\int \frac{x^2 + x - 2}{(x - 2)^3(x - 1)} dx \quad (٢٨)$$

$$\int \frac{dx}{x^4(x^3 + 1)^2} \quad (٣٠)$$

إرشاد: ضع $x^3 = t$

$$\int \frac{dx}{(x - 1)^3(x - 2)^3} \quad (٣٢)$$

$$\int \frac{x^2 dx}{(x - 2)^8} \quad (٣٤)$$

$$\int \frac{dx}{x(x^6 + 1)^2} \quad (٣٦)$$

ضع: $x^3 = t$

$$\int \frac{dx}{3 + 5 \cos x} \quad (٣٨)$$

$$\int \frac{\cos x}{1 + \cos x} dx \quad (٤٠)$$

$$\int \frac{dx}{8 - 4 \sin x + 7 \cos x} \quad (٤٢)$$

$$\int \frac{3 \sin x + 2 \cos x}{2 \sin x + 3 \cos x} dx \quad (٤٤)$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x - 6 \sin x + 5} dx \quad (٤٦)$$

$$\int \frac{dx}{1 + 3 \cos^2 x} \quad (٤٨)$$

قسم البسط والمقام على $\cos^2 x$

ثم ضع $\tan x = t$

$$\int \frac{x^3 + 2x}{(x^2 - 4x + 3)(x^2 + 4x + 5)} dx \quad (٢١)$$

$$\int \frac{dx}{(x + 1)(x^2 + 1)^2} \quad (٢٣)$$

$$\int \frac{x^5 dx}{(1 + x^2)^4} \quad (٢٥)$$

$$\int \frac{x^7 + x^3}{x^{12} - 2x^4 + 1} dx \quad (٢٧)$$

$$\int \frac{dx}{x(x^7 + 1)} \quad (٢٩)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 1)(x^2 + 2x + 5)} \quad (٣١)$$

$$\int \frac{(x^4 + 1)dx}{(x^2 + 1)(x - 2)(x - 3)} \quad (٣٣)$$

$$\int \frac{dx}{x^6 + x^8} \quad (٣٥)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 3)^2(x - 1)} \quad (٣٧)$$

$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x} \quad (٣٩)$$

$$\int \frac{\sin x}{1 - \sin x} dx \quad (٤١)$$

$$\int \frac{dx}{\cos x + 2 \sin x + 3} \quad (٤٣)$$

$$\int \frac{\cos^2 x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx \quad (٤٥)$$

$$\int \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} dx \quad (٤٧)$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\sin x \cos x - \cos^2 x} \quad (٤٩)$$

استفد من المثال السابق

$$\int \frac{\sin x}{(1 - \cos x)^3} dx \quad (٥١)$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x - 5\sin x \cos x} \quad (٥٠)$$

$$\int \frac{dx}{(2 - \sin x)(3 - \sin x)} \quad (٥٣)$$

$$\int \frac{\sin x}{1 + \sin^2 x} dx \quad (٥٢)$$

$$\int \frac{1 - \sin x + \cos x}{1 + \sin x - \cos x} dx \quad (٥٤)$$

(١٠, ١٢) التكاملات من الشكل:

$$\int f \left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots \right] dx$$

أعداد كسرية (قياسية) وضعت بأبسط صورة لها. لإجراء التكامل، نجري

التغيير: $\frac{ax+b}{cx+d} = z^n$ ، حيث n المضاعف المشترك الأصغر للأعداد: n_1, n_2, \dots

مثال (٤٥, ١٠)

أوجد التكاملات:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-1} + (x-1)} \quad (٢)$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x} + 1} dx \quad (١)$$

الحل

(١) يكتب التكامل على الشكل:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x} + 1} dx = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}} + 1} dx$$

المضاعف المشترك للعددين: 2 و 3 هو 6. لنفرض أن:

$$dx = 6t^5 dt \Leftrightarrow x = t^6 \quad (t \geq 0)$$

$$\int \frac{t^3}{t^2 + 1} 6t^5 dt = 6 \int \frac{t^8}{t^2 + 1} dt$$

باستخدام القسمة المطولة، نجد:

$$\frac{t^8}{t^2+1} = t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2}$$

والتكامل يساوي:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x+1}} dx &= 6\left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t + \tan^{-1} t\right) + C \\ &= 6\left(\frac{x^{\frac{7}{6}}}{7} - \frac{x^{\frac{5}{6}}}{5} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{3} - x^{\frac{1}{6}} + \tan^{-1} x^{\frac{1}{6}}\right) + C \end{aligned}$$

(٢) يكتب التكامل على الشكل:

$$\int \frac{dx}{(x-1)^{\frac{1}{2}} + (x-1)}$$

المضاعف المشترك الأصغر للعددين: 1 و 2 هو 2. لنفرض أن: $x-1=t^2$ ($t > 0$)، فنجد: $dx = 2t dt$ ، ومنه:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x-1)^{\frac{1}{2}} + (x-1)} &= \int \frac{2t dt}{t+t^2} = \int \frac{2dt}{1+t} = 2\ln|1+t| + C \\ &= 2\ln(1+\sqrt{x-1}) + C \end{aligned}$$

مثال (٤٦، ١٠)

أوجد التكاملين:

$$\int \frac{\cos x}{(\sin x)^{\frac{1}{2}} + (\sin x)^{\frac{1}{3}}} dx \quad (٢)$$

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx \quad (١)$$

الحل

$$dz = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \Leftarrow z = x^{\frac{1}{2}} \Leftarrow x = z^2, \quad z > 0 \quad (١) \quad \frac{m_1}{n_1} = \frac{1}{2}$$

التكامل يكتب على الشكل:

$$\begin{aligned} \int \frac{2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} dz &= 2 \int \frac{z}{z^2+z} dz = 2 \int \frac{dz}{1+z} = 2\ln|1+z| + c \\ &= 2\ln(1+\sqrt{x}) + c \end{aligned}$$

(٢) نضع: $du = \cos x dx \Leftarrow \sin x = u$. يصبح التكامل على الصورة:

$$\int \frac{du}{u^{\frac{1}{2}} + u^{\frac{1}{3}}}$$

المضاعف المشترك الأصغر للعددين: 2,3 هو 6. نفرض:

$$du = 6z^5 dz \Leftarrow u = z^6, \quad z > 0$$

$$\int \frac{6z^5}{z^3 + z^2} dz = 6 \int \frac{z^3}{z+1} dz = 6 \int (z^2 - z + 1) dz - 6 \int \frac{dz}{1+z}$$

(أجرينا القسمة المطولة، لأن قوة البسط أكبر من قوة المقام).

$$= 6 \left(\frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2} + z \right) - 6 \ln(1+z) + c$$

$$= 6 \left(\frac{\sin^2 x}{3} - \frac{\sin^3 x}{2} + \sin^{\frac{1}{6}} x \right) - 6 \ln \left(1 + \sin^{\frac{1}{6}} x \right) + c$$

(١٣, ١٠) التكاملات من الشكل: $\int f(e^{ax}) dx$

تكامل بوجه عام بإجراء التغيير: $t = e^{ax}$

مثال (٤٧, ١٠)

أوجد التكاملين:

$$\int \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} dx \quad (٢)$$

$$\int \frac{1}{e^x + 1} dx \quad (١)$$

الحل

(١) نفرض أن: $dt = e^x dx \Leftarrow e^x = t$. يكتب التكامل على الشكل:

$$\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{1}{e^x(1+e^x)} dt = \int \frac{1}{t(1+t)} dt$$

$$\frac{1}{t(1+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+t} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} \quad \text{لكن:}$$

$$\int \frac{dx}{1+e^x} = \ln|t| - \ln|1+t| + C \quad \text{إذن:}$$

$$= \ln \left| \frac{e^x}{1+e^x} \right| + C = \ln \frac{e^x}{1+e^x} + C$$

(٢) نضع: $dt = e^x dx \Leftarrow e^x = t$. نكتب التكامل على الشكل:

$$\int \frac{dt}{t + \frac{1}{t}} = \int \frac{t dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{2} \ln(1+t^2) + C = \frac{1}{2} \ln(1+e^{2x}) + C$$

طريقة أخرى:

$$\int \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + 1} dx = \frac{1}{2} \ln(1 + e^{2x}) + C \quad \text{من الواضح أن:}$$

(البسط مشتقة المقام)

تمارين (٥, ١٠)

$$\int \frac{\sqrt{x}}{(2-x)\sqrt{1+x}} dx \quad (٢)$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x+2} dx \quad (١)$$

$$\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} dx \quad (٤)$$

$$\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx \quad (٣)$$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}} dx \quad (٦)$$

$$\int \frac{x+3}{x^2 \sqrt{2x+3}} dx \quad (٥)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}} \quad (٨)$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x+2}} \quad (٧)$$

$$\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x+1}} dx \quad (١٠)$$

$$\int \frac{dx}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} \quad (٩)$$

$$\int \frac{dx}{x \sqrt[3]{1+x^5}} \quad (١٢)$$

$$\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}} dx \quad (١١)$$

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{1+x^{\frac{3}{4}}}} dx \quad (١٤)$$

$$\int \frac{dx}{x^2 (2+x^3)^{\frac{5}{3}}} dx \quad (١٣)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} \quad (١٦)$$

$$\int x^3 (1+2x^2)^{-\frac{3}{2}} dx \quad (١٥)$$

$$\int \frac{(e^x+3)}{(e^{2x}+e^x+1)} dx \quad (١٨)$$

$$\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^2}} \quad (١٧)$$

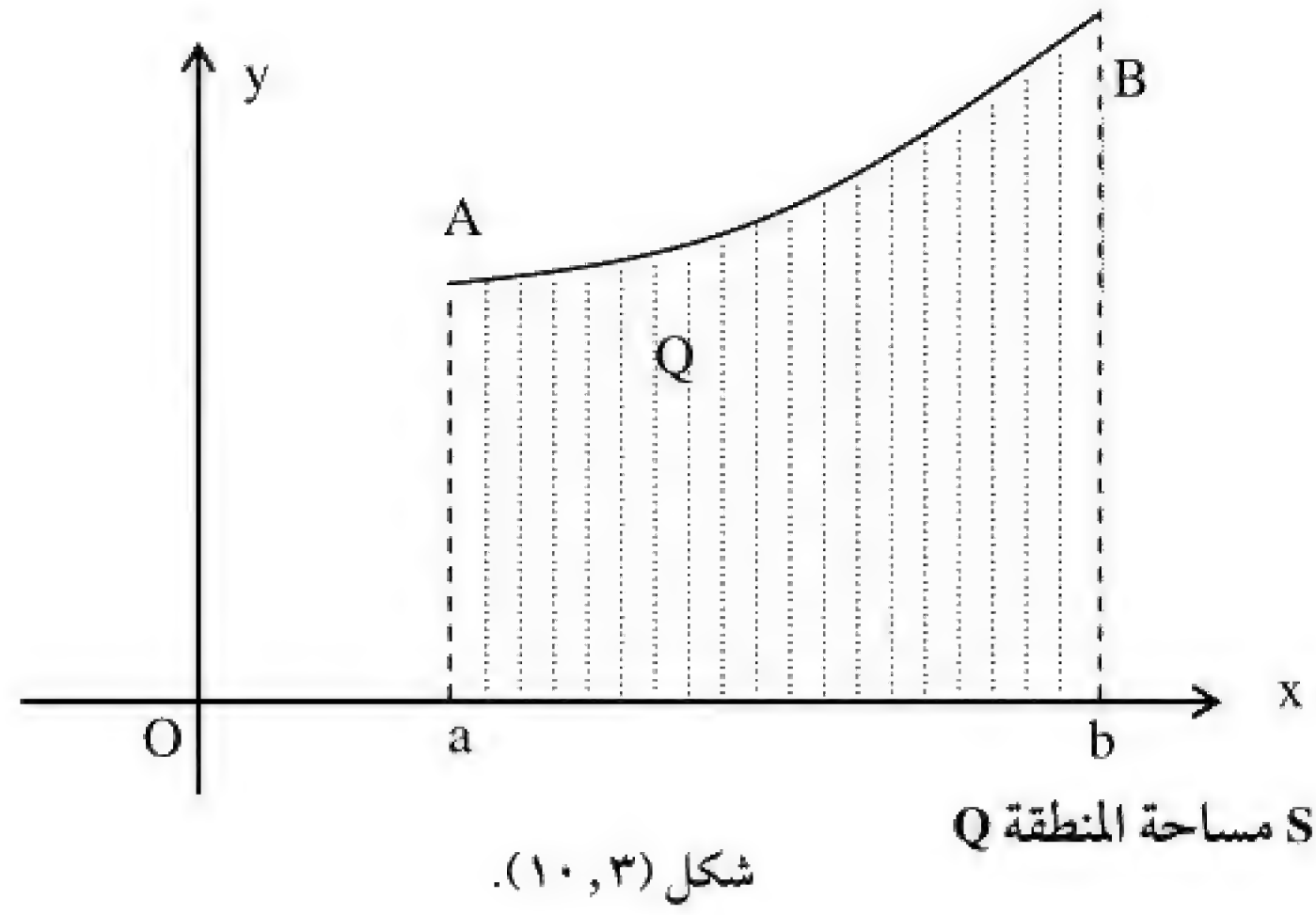
$$\int \frac{e^x}{e^{2x}-5e^x+6} dx \quad (٢٠)$$

$$\int \frac{e^{4x}}{e^{2x}+3} dx \quad (١٩)$$

أجر التغيير: $e^x = t$

$$\int \frac{e^{4x}}{e^{8x} + e^{-4x}} dx \quad (٢١)$$

(١٤, ١٠) حساب المساحات باستخدام الإحداثيات الديكارتية

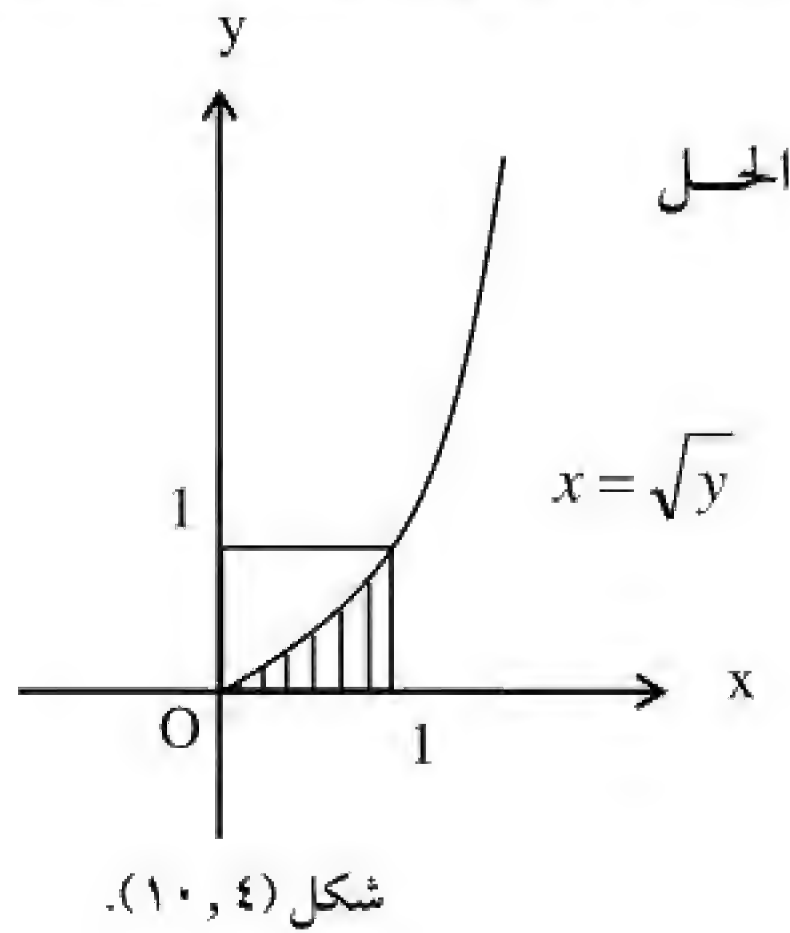


إذا كانت f دالة متصلة على الفترة $[a, b]$ ، وكانت $f(x) \geq 0$ ، فإن S : مساحة المنطقة Q الواقعة بين المستقيمين $x=a$ ، $x=b$ وفوق المحور x وتحت المنحني: $y=f(x)$ شكل (٣, ١٠)، تساوي:

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

مثال (٤٨, ١٠)

أوجد المساحة الواقعة تحت المنحني: $x = \sqrt{y}$ وفوق محور السينات وبين المستقيمين: $x=0$ ، $x=1$.

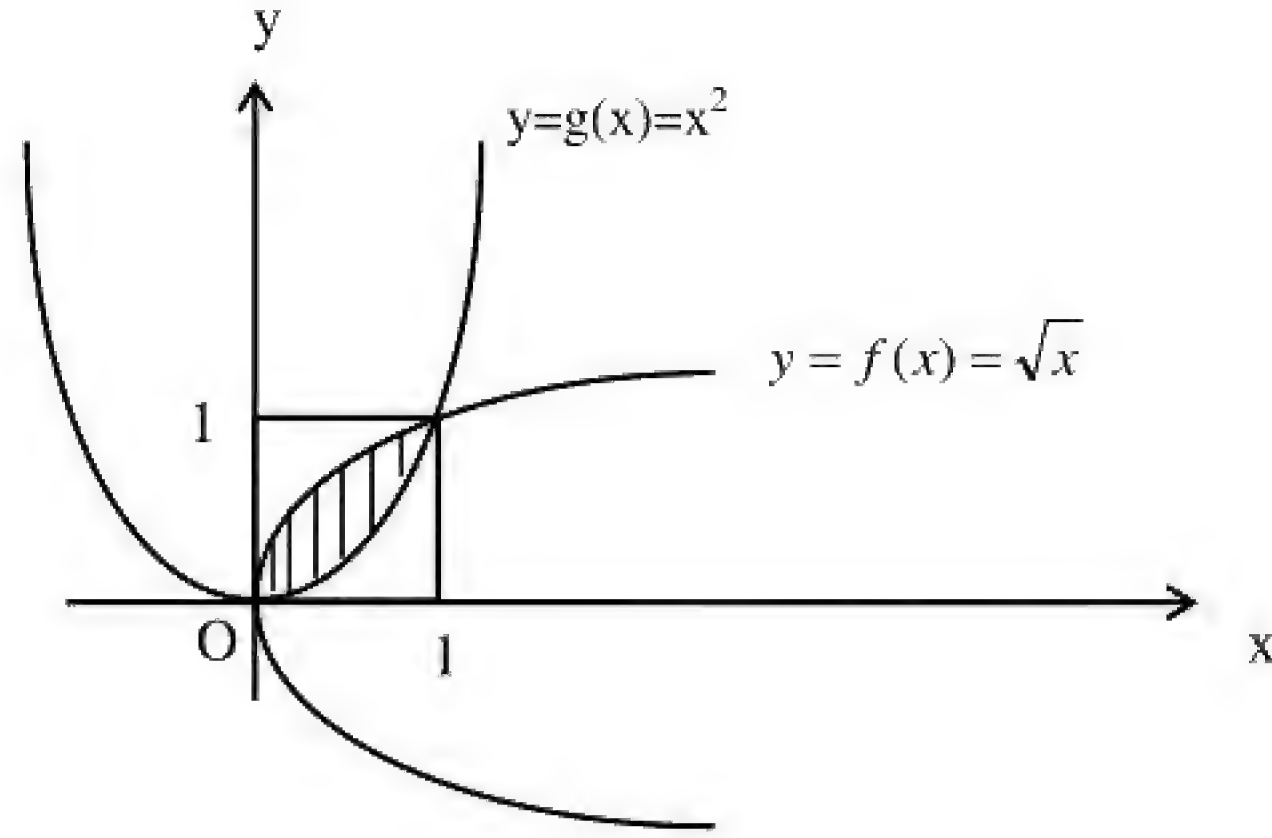


$$S = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

مثال (١٠, ٤٩)

أوجد المساحة المحصورة بين المنحنيين:

$$x=y^2, y=x^2$$



شكل (١٠, ٥).

الحل

لإيجاد إحداثيات نقط التقاطع، نعوض عن y من إحدى المعادلتين في المعادلة الأخرى، فنجد:

$$x = 1 \text{ أو } x = 0 \Leftarrow x(1 - x^3) = 0 \Leftarrow x = x^4$$

نقطتا التقاطع هما: $(0,0)$ ، $(1,1)$

المساحة الواقعة تحت المنحني: $y = \sqrt{x}$ (الجزء الأعلى من القطع المكافئ: $x=y^2$) وبين المستقيمين $x=0$ ، $x=1$ وفوق المحور x (بعبارة مختصرة فوق القطعة $[0,1]$ وتحت المنحني $y = \sqrt{x}$)، هي:

$$S_1 = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} [x^{\frac{3}{2}}]_0^1 = \frac{2}{3}$$

والمساحة الواقعة تحت المنحني: $y=g(x)=x^2$ وفوق القطعة $[0,1]$ ، تساوي:

$$S_2 = \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 x^2 dx = [\frac{x^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{3}$$

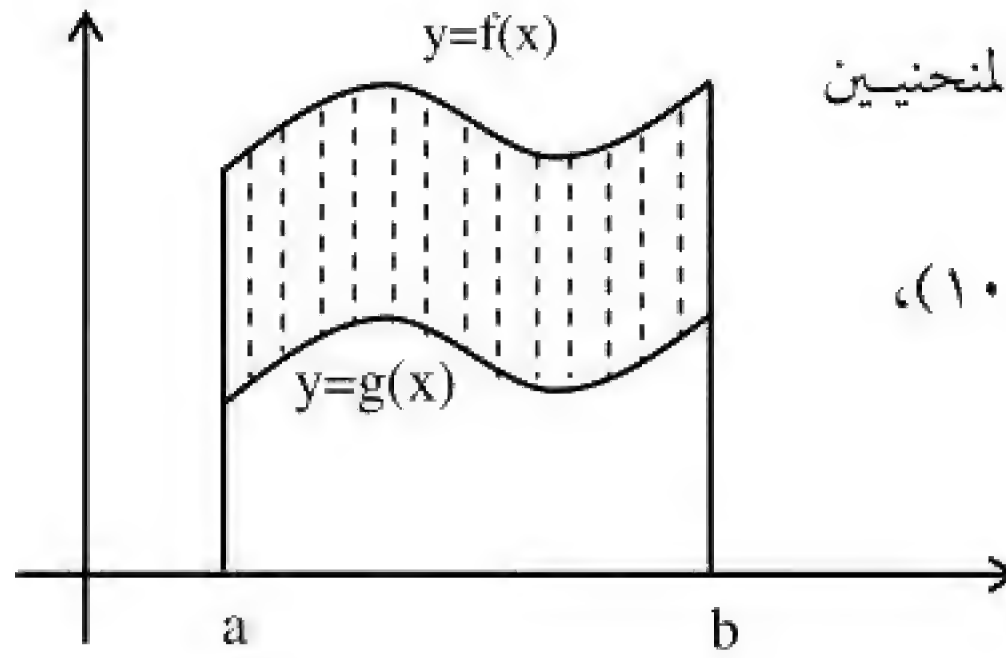
أما المساحة المحصورة بين المنحنيين، فتساوي:

$$S = S_1 - S_2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \quad \text{شكل (١٠, ٥).}$$

ملحوظة (٩, ١٠)

بشكل عام إذا كانت f, g دالتين متصلتين على الفترة $[a, b]$ ، وكان:

$$f(x) \geq g(x)$$



فإن مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين

$$y=g(x), y=f(x)$$

والمستقيمين $x=a, x=b$ ، شكل (٦, ١٠)،

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

تساوي:

شكل (٦, ١٠).

مثال (٥٠, ١٠)

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين:

(Find the area of the region Enclosed by the two curves)

$$y = x, y = x^3$$

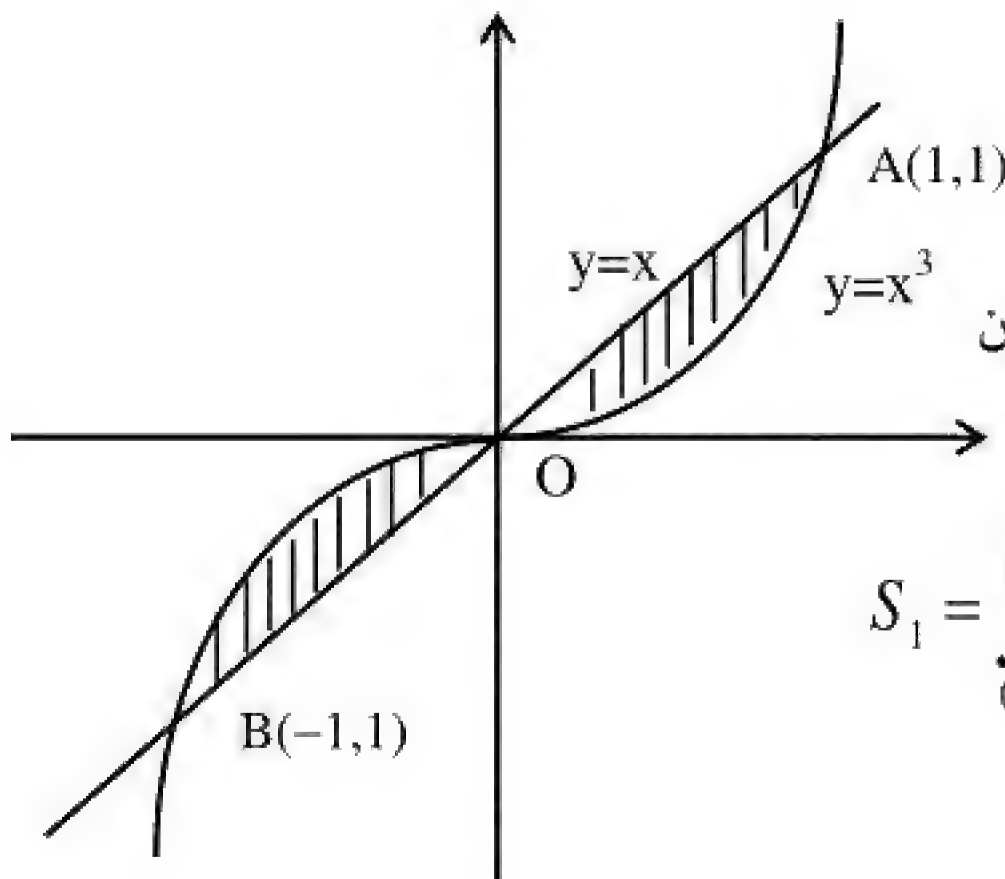
الحل

لنحسب المساحة الواقعة في الربع الأول:

بملاحظة أن: $x \geq x^3$ على الفترة: $[0, 1]$ ، فإن

المساحة تساوي:

$$S_1 = \int_0^1 (x - x^3) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$



شكل (٧, ١٠).

لنحسب المساحة الواقعة في الربع الثالث:

بملاحظة أن: $x^3 \geq x$ ، على الفترة: $[-1, 0]$ ، فإن المساحة تساوي:

$$S_2 = \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 = -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

فالمساحة الكلية تساوي:

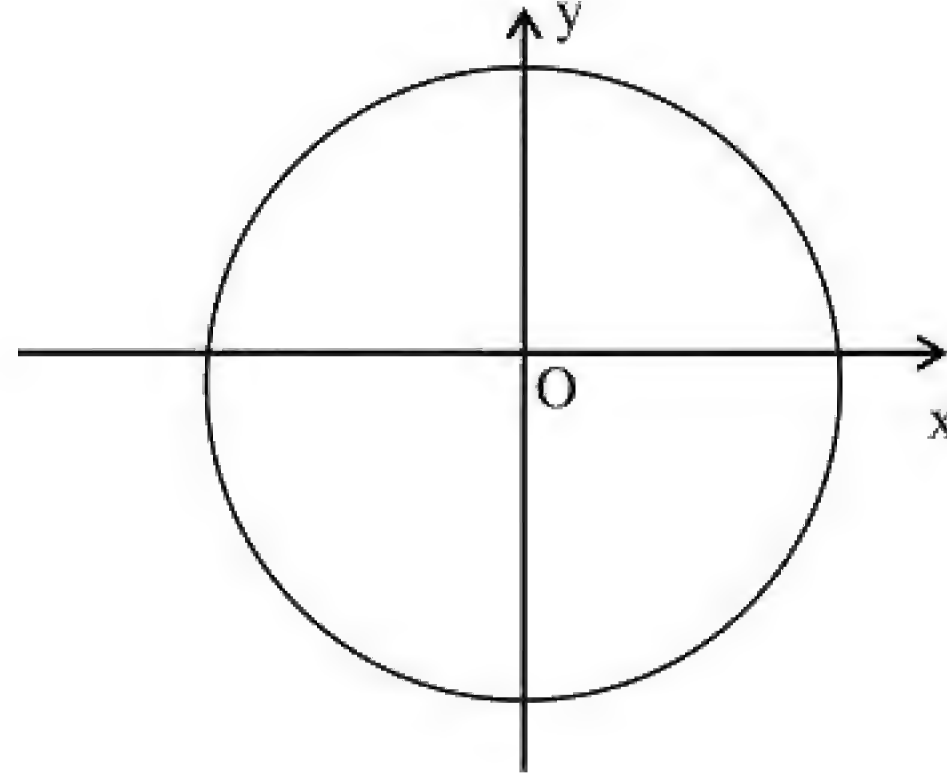
$$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad (\text{وحدة مساحة})$$

كان بالإمكان مضاعفة المساحة الواقعة في الربع الأول للحصول على المساحة الكلية، لأن

المنطقة الواقعة في الربع الأول نظيرة المنطقة الواقعة في الربع الثالث حيث O هو مركز التناظر.

مثال (١٠, ٥١)

احسب مساحة الدائرة: $x^2 + y^2 = a^2$



شكل (١٠, ٨).

الحل

مساحة القرص تساوي: $S = 4 \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$

(أربعة أمثال مساحة ربع الدائرة)

لنضع : $x = a \sin t$ ، فنجد :

$$S = 4 \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} (a \cos t dt) = 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt$$

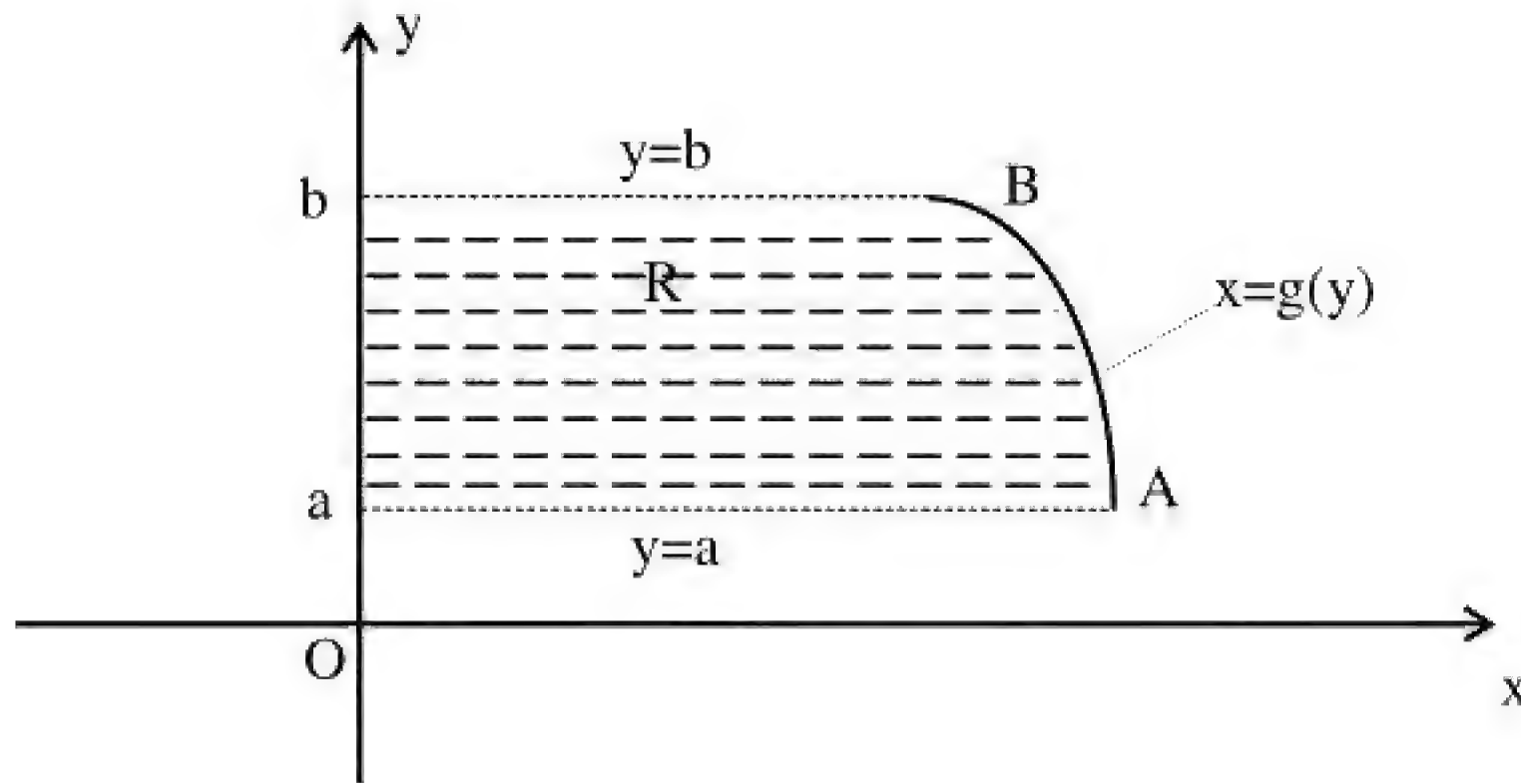
(لاحظ أن : $t = 0 \Leftarrow \sin t = 0 \Leftarrow x = 0$ وأن : $t = \frac{\pi}{2} \Leftarrow \sin t = 1 \Leftarrow x = a$)

$$= 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = 2a^2 \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2a^2 \left(\frac{\pi}{2} \right) = a^2 \pi$$

ملحوظة (١٠, ١٠)

إذا كانت g دالة متصلة على الفترة $[a, b]$ وتحقق الشرط : $g(y) \geq 0$ ، فإن مساحة المنطقة R المحصورة بين المستقيمين : $y=b, y=a$ والمحور y والمنحني : $x=g(y)$ ، شكل (١٠, ٩) يعبر عنها بالصيغة :

$$S = \int_a^b g(y) dy = \int_a^b x dy$$



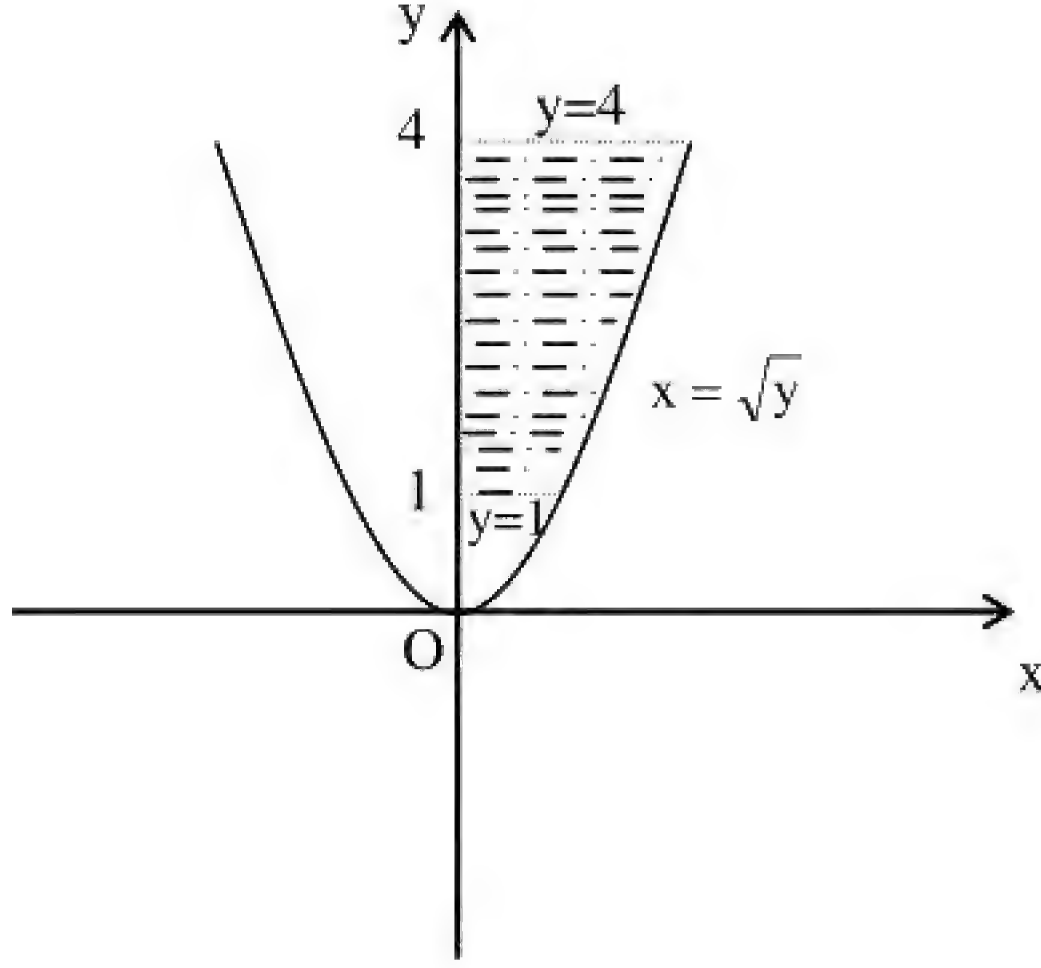
شكل (١٠, ٩).

مثال (١٠, ٥٢)

أوجد المساحة المحصورة بين القطع المكافئ : $x^2 = y$ والمستقيمين : $y=1, y=4$ والمحور y والواقعة في الربع الأول.

الحل

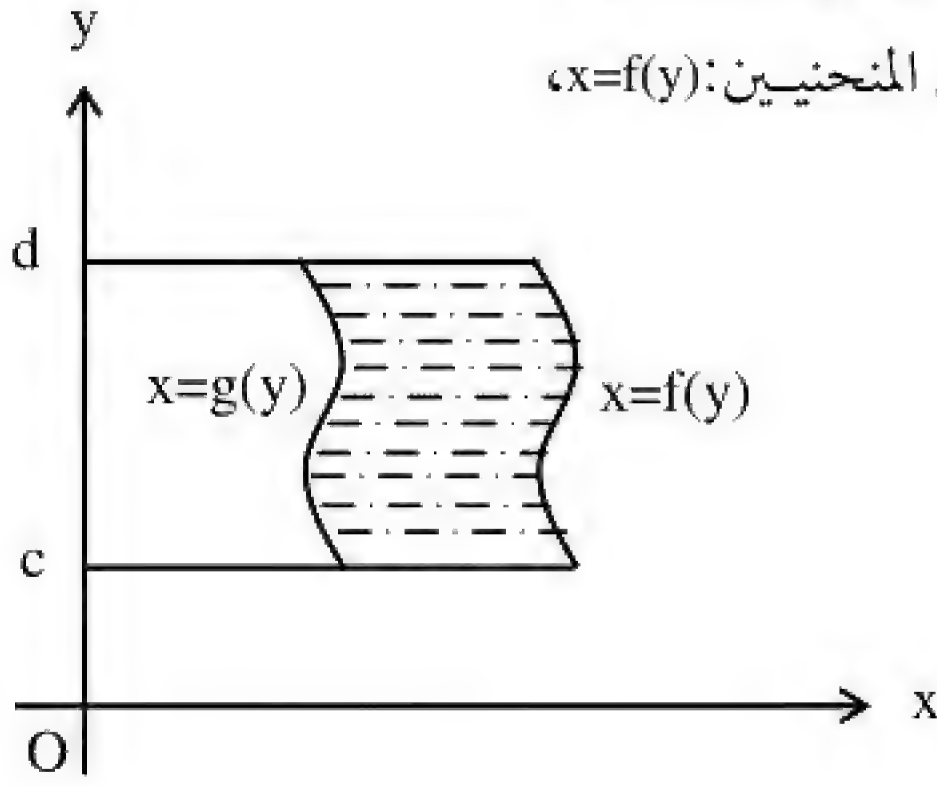
المساحة تساوي:



$$\begin{aligned}
 S &= \int_1^4 x dy = \int_1^4 \sqrt{y} dy \\
 &= \left[\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 = \frac{2}{3} ((4)^{\frac{3}{2}} - 1) \\
 &= \frac{2}{3} ((2^2)^{\frac{3}{2}} - 1) = \frac{2}{3} (8 - 1) \\
 &= \frac{14}{3}
 \end{aligned}$$

شكل (١٠, ١٠).

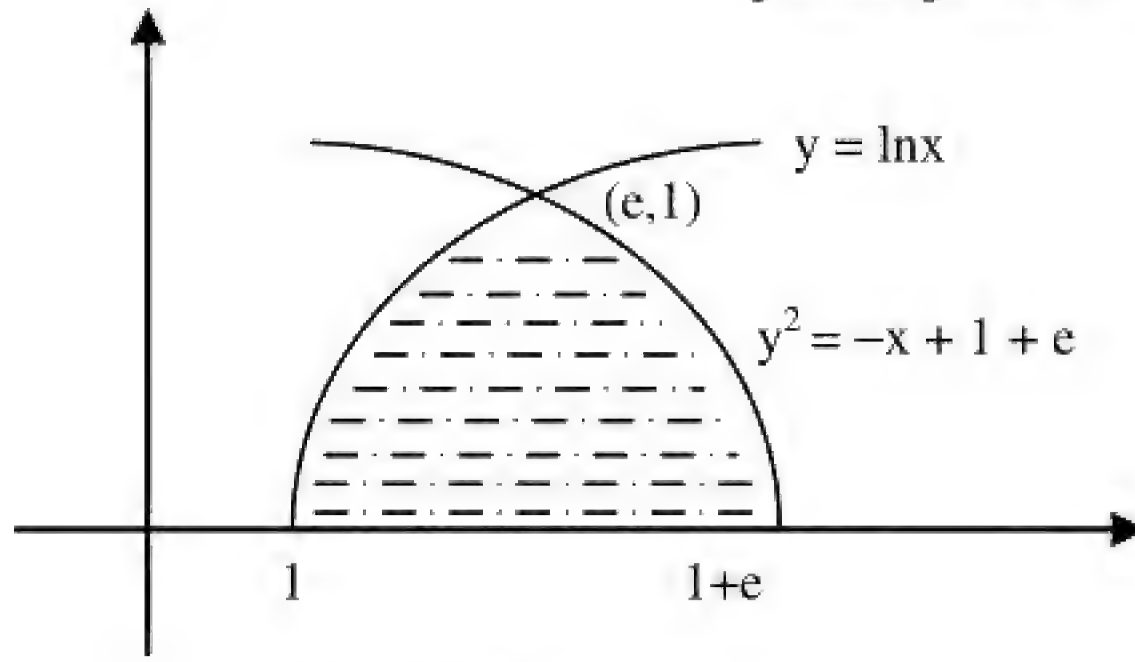
ملحوظة (١٠, ١١)

إذا كانت f و g دالتين متصلتين على الفترة $[c, d]$ ، وكان: $f(y) \geq g(y)$ ، فإن مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين: $x=f(y)$ ، $x=g(y)$ والمستقيمين $y=c$ ، $y=d$ ، شكل (١٠, ١١)،تساوي: $S = \int_c^d [f(y) - g(y)] dy$ 

شكل (١٠, ١١).

مثال (١٠, ٥٣)

أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنيات: $y = \ln x$ ، $y^2 = -x + 1 + e$ ، $y = 0$ ،
والواقعة في الربع الأول.



شكل (١٢, ١٠).

الحل

من الملاحظ أن:

$$x = e^y \Leftrightarrow y = \ln x$$

$$x = 1 + e - y^2 \Leftrightarrow y^2 = -x + 1 + e$$

مساحة المنطقة Q تساوي:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 [(1+e-y^2) - e^y] dy \\ &= (1+e)y - \frac{y^3}{3} - e^y \Big|_0^1 = \left((1+e) - \frac{1}{3} - e \right) + 1 = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

تمارين (٦, ١٠)

- (١) احسب مساحة المنطقة المحدودة بالقطع المكافئ: $y = 4x - x^2$ ومحور السينات.
- (٢) احسب مساحة الشكل المحدود بالمنحني: $y = \ln x$ ، والمحور x والمستقيم $x = e$.
- (٣) احسب مساحة الشكل المحدود بالمنحني: $y = x(x-1)(x-2)$ ومحور السينات.
- (٤) أوجد مساحة الشكل المحدود بالمنحني: $y^3 = x$ والمستقيمين: $y = 1$ و $x = 8$.
- (٥) أوجد مساحة الشكل المحدود بقوس المنحني: $y = \sin x$ المحدود بالنقطتين $x = 0$ ، $x = \pi$ والمحور x .
- (٦) احسب مساحة الشكل المحدود بالمنحني: $y = \tan x$ ومحور السينات والمستقيم: $x = \frac{\pi}{3}$.
- (٧) أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالقطع الزائد: $xy = m^2$ والمستقيمين: $x = a$ ، $x = 3a$ ($a > 0$)، والمحور x .
- (٨) احسب مساحة الشكل المحدود بالمنحني: $y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$ ومحور السينات.
- (٩) أوجد مساحة الشكل المحدود بالمنحني: $y = x^3$ ومحور الصادات والمستقيم: $y = 8$.
- (١٠) أوجد مساحة الشكل المحدود بالقطعين المكافئين: $y^2 = 2ax$ ، $x^2 = 2ay$.

- (١١) احسب مساحة الشكل المحدود بالقطع المكافئ: $y = 2x - x^2$ والمستقيم $y = -x$.
- (١٢) أوجد مساحة جزء القطع المكافئ: $y = x^2$ المحدود بالمستقيم: $y = 3 - 2x$.
- (١٣) أوجد مساحة الشكل المحدود بالقطعين المكافئين: $y = x^2$ ، $y = \frac{x^2}{2}$ والمستقيم: $y = 2x$.
- (١٤) أوجد مساحة الشكل المحدود بالقطعين المكافئين: $y = \frac{x^2}{2}$ ، $y = 4 - \frac{2}{3}x^2$.
- (١٥) أوجد مساحة الشكل المحدود بالمنحني: $y = \frac{1}{1+x^2}$ والقطع المكافئ $y = \frac{x^2}{2}$.

الإجابات

$\frac{17}{4}$ (٤)	$\frac{1}{2}$ (٣)	1 (٢)	$\frac{32}{3}$ (١)
πa^2 (٨)	$m^2 \ln 3$ (٧)	$\ln 2$ (٦)	2 (٥)
$\frac{32}{3}$ (١٢)	$\frac{9}{2}$ (١١)	$\frac{4}{3}a^2$ (١٠)	12 (٩)
	$\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$ (١٥)	$\frac{32}{3}$ (١٤)	4 (١٣)

(١٥, ١٠) طول قوس منحن معرف بمعادلته الديكارتية

إذا أعطي المنحني C ، بالمعادلة الديكارتية: $y = f(x)$ ، حيث f دالة قابلة للاشتقاق على الفترة $[a, b]$ ومشتقتها f' متصلة على هذه الفترة، فإن طول قوس المنحني الواصل بين النقطتين

$$(b > a) \quad A(a, f(a)) \text{ و } B(b, f(b)) \text{، يساوي: } L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

مثال (١٠, ٥٤)

أوجد طول قوس القطع المكافئ $y = \frac{1}{2}x^2$ الواقع بين النقطتين $A(1, \frac{1}{2})$ ونقطة الأصل 0.

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + x^2} dx$$

الحل

$$\text{لنضع: } dx = \sec^2 t dt \Leftarrow x = \tan t$$

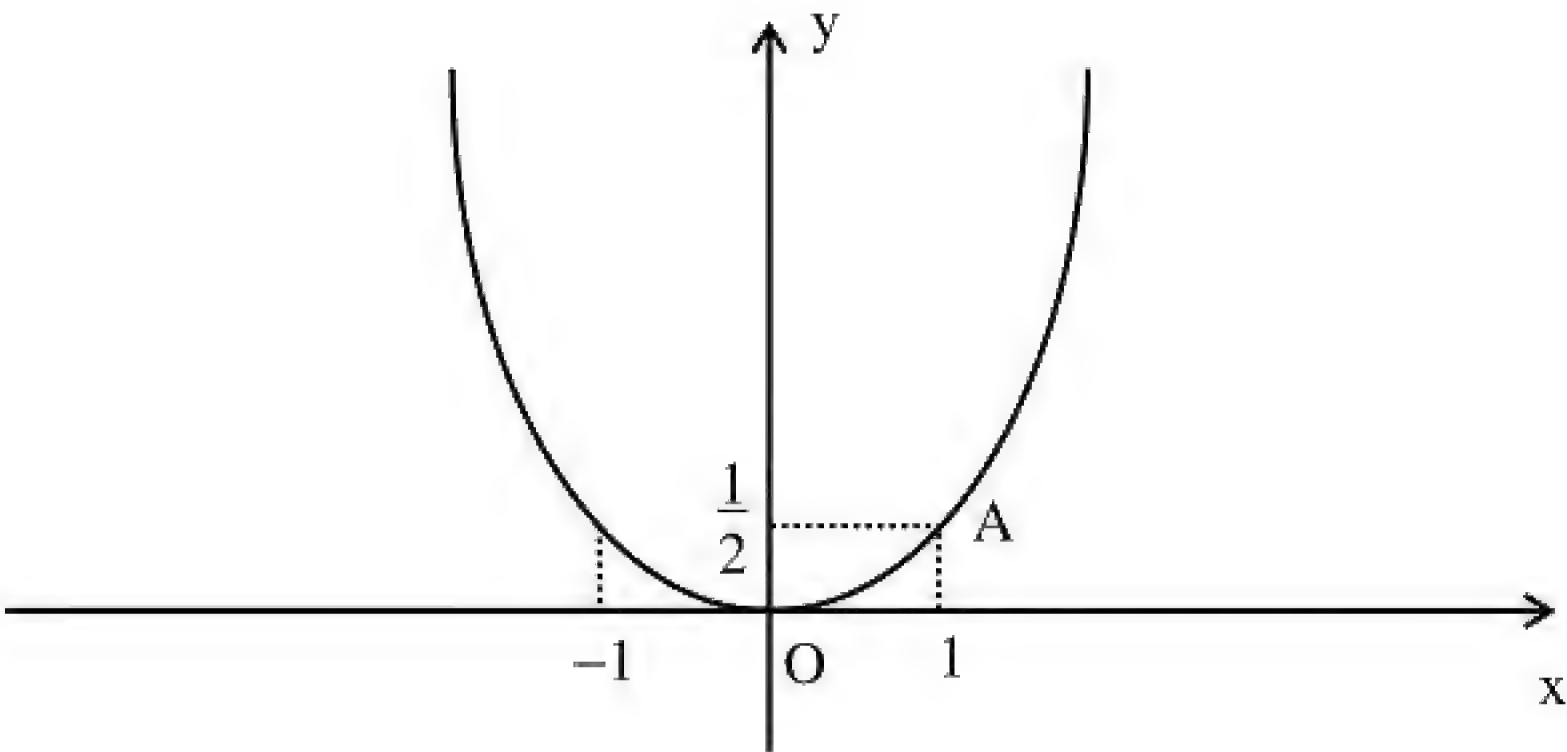
$$\text{إذا كان: } x = 0 \text{، فإن: } t = 0 \Leftarrow \tan t = 0$$

$$\text{إذا كان: } x = 1 \text{، فإن: } t = \frac{\pi}{4} \Leftarrow \tan t = 1$$

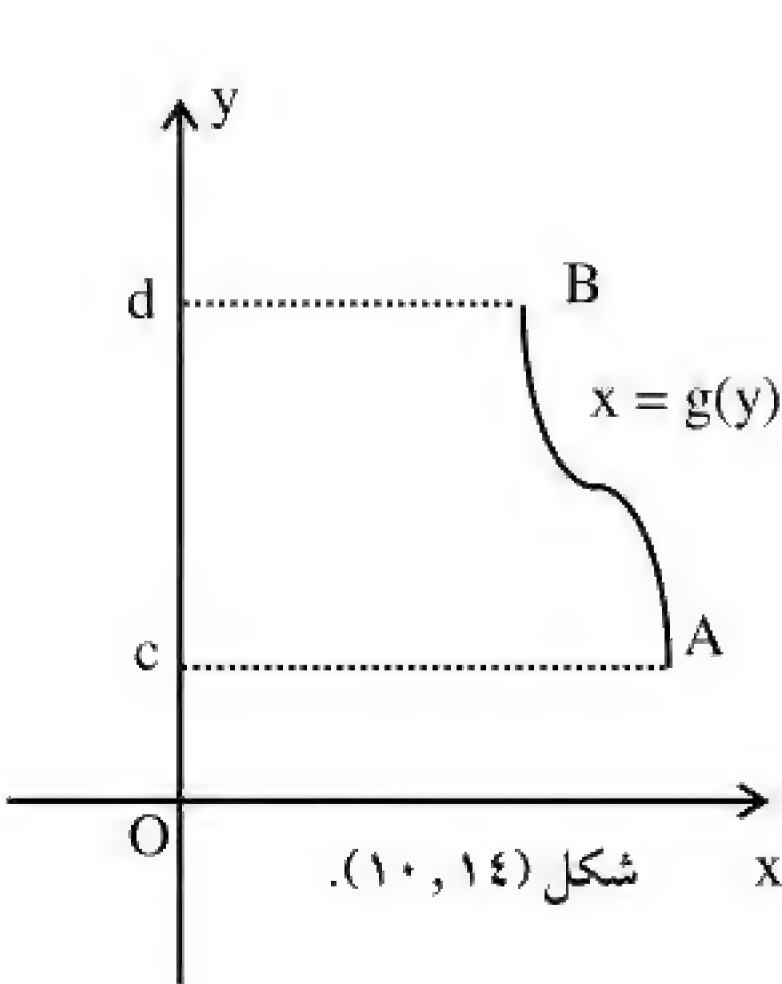
$$L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \tan^2 t} \sec^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 t dt$$

(لاحظ أن: $\sqrt{1+\tan^2 t} = \sec t$)
وبالاستفادة من (٢٦, ١٠)، فإن:

$$L = \left[\frac{1}{2} \tan x \sec x + \frac{1}{2} \operatorname{Ln} |\sec x + \tan x| \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$



شكل (١٣, ١٠).



شكل (١٤, ١٠).

إذن: $L = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{Ln}(\sqrt{2} + 1)$
(لاحظ أن: $\sec \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ ، $\operatorname{Ln} 1 = 0$ ، $\tan 0 = 0$)

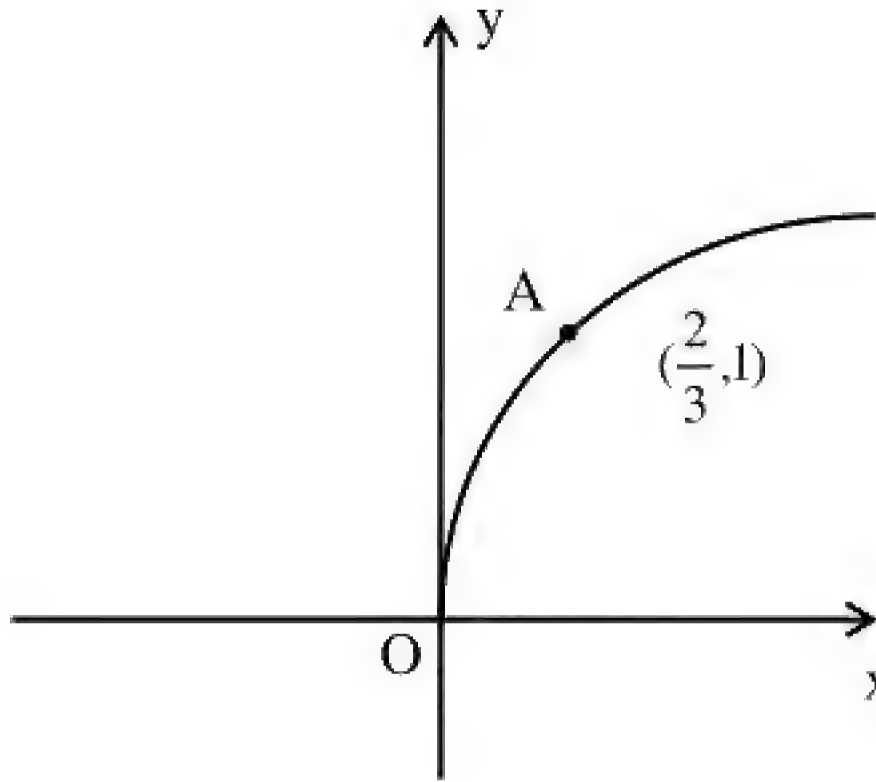
ملحوظة (١٠, ١٢)

إذا أعطي المنحني C بالمعادلة: $x=g(y)$ ، حيث g دالة قابلة للاشتقاق على الفترة $[c,d]$ ومشتقتها متصلة على هذه الفترة شكل (١٤, ١٠)، فإن طول قوس المنحني الواقع بين النقطتين: $A(g(c),c)$ ، $B(g(d),d)$ يعطى بالصيغة:

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + (g'(y))^2} dy$$

مثال (١٠, ٥٥)

أوجد طول قوس المنحني: $x = \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}$ الواقع بين النقطتين O (نقطة الأصل) والنقطة $A(\frac{2}{3}, 1)$.



الحل

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + (g'(y))^2} dy = \int_0^1 \sqrt{1 + y} dy$$

$$= \frac{2}{3} \left[(1+y)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3} \left(2^{\frac{3}{2}} - 1 \right) = \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1)$$

شكل (١٥, ١٠).

تمارين (١٠, ٧)

أوجد طول قوس كل من المنحنيات المعرفة فيما يلي، والمحصور بين النقطتين الموافقتين للقيمتين المرفقتين:

$$(x=1, x=0) \quad y=2\sqrt{x} \quad (٢)$$

$$(x=4, x=0) \quad y^2 = x^3 \quad (١)$$

$$(x=\sqrt{8}, x=\sqrt{3}) \quad y=\ln x \quad (٤)$$

$$(x=1, x=0) \quad y=e^x \quad (٣)$$

$$(y=\frac{\pi}{3}, y=0) \quad x=\ln(\sec y) \quad (٦)$$

$$(x=1, x=0) \quad y=\sin^{-1}(e^{-x}) \quad (٥)$$

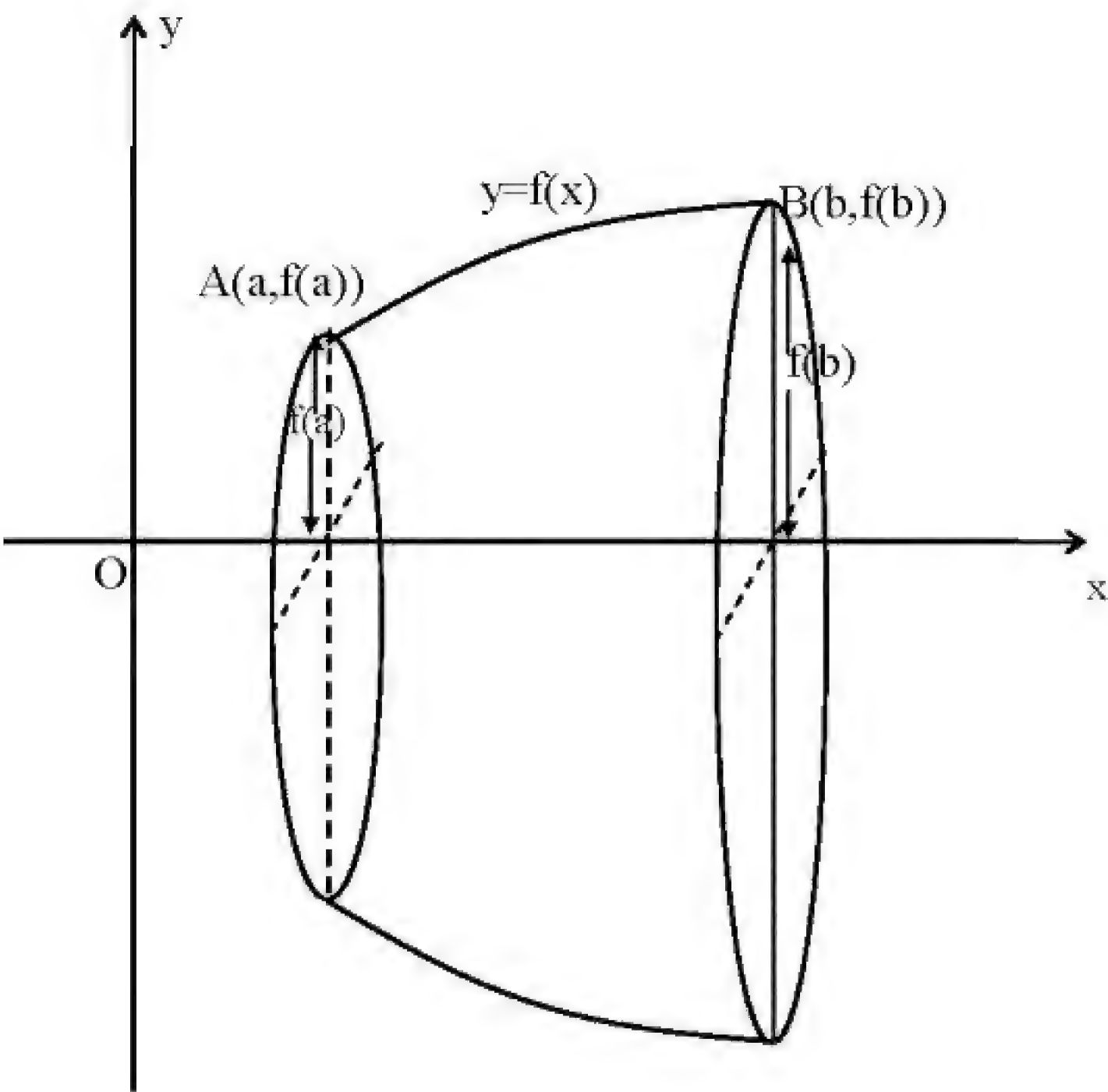
$$(y=e, y=1) \quad x=\frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y \quad (٧)$$

$x = \sqrt{4 - y^2} + 2 \ln \left| \frac{2 + \sqrt{4 - y^2}}{y} \right|$ (٨) حيث $x > 0$, $y = 1$, $y = 2$

الإجابات

- $\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})$ (٢)
- $\frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1)$ (١)
- $1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$ (٤)
- $\sqrt{1 + e^2} - \sqrt{2} + \ln \frac{(\sqrt{1 + e^2} - 1)(\sqrt{2} + 1)}{e}$ (٣)
- $\ln(2 + \sqrt{3})$ (٦)
- $\ln(e + \sqrt{e^2 - 1})$ (٥)
- $2 \ln 2$ (٨)
- $\frac{1}{4}(e^2 + 1)$ (٧)

(١٠ , ١٦) الحجم الدورانية بطريقة الأقراص الدائرية



شكل (١٠ , ١٦).

إذا كانت f متصلة على الفترة $[a, b]$ وكانت $f(x) \geq 0$ ، فإن: الحجم الناتج من دوران المنطقة الواقعة تحت القوس \widehat{AB} والذي مبدؤه $A(a, f(a))$ ونهايته $B(b, f(b))$ وفوق القطعة $[a, b]$ عند دورانها حول المحور x شكل (١٠، ١٦)، يساوي:

$$V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx = \int_a^b \pi y^2 dx$$

مثال (١٠، ٥٦)

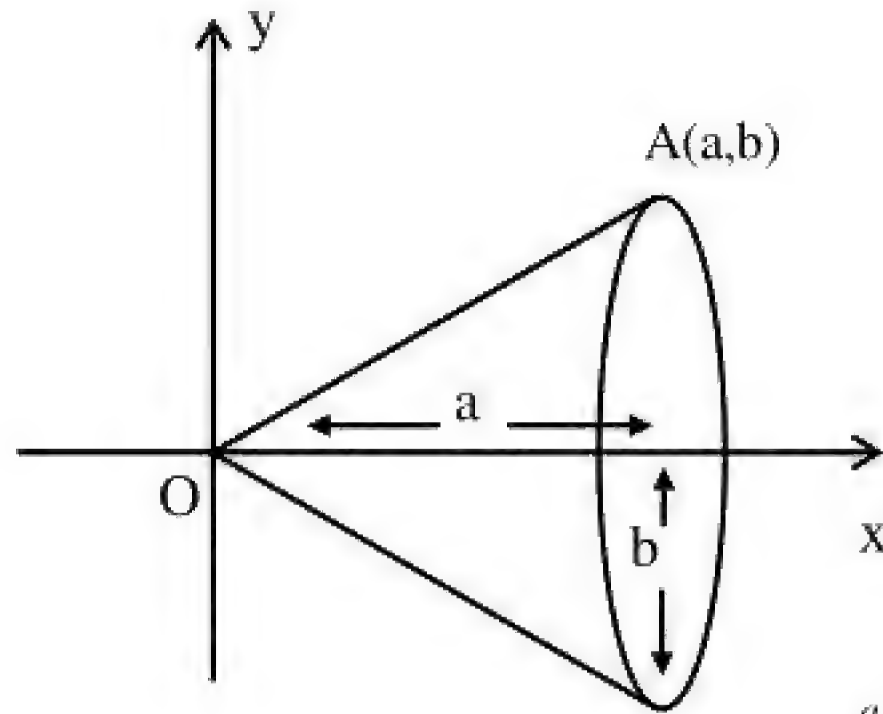
أوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة الواقعة تحت القطعة $[0, A]$ وفوق القطعة $[0, a]$ ، عند دورانها حول المحور x ، علماً أن: $A=(a, b)$.

الحل

الحجم الحاصل هو مخروط دوراني، رأسه O وطول نصف قطر قاعدته b وطول ارتفاعه a .

معادلة المستقيم OA ، هي:

$$y = \frac{b}{a}x \text{، ومنه } \frac{y}{x} = \frac{b}{a}$$



شكل (١٠، ١٧).

$$V = \pi \int_0^a y^2 dx = \pi \int_0^a \left(\frac{b}{a}\right)^2 x^2 dx \text{ فالحجم يساوي:}$$

$$= \frac{\pi b^2}{a^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{\pi b^2}{3a^2} a^3 = \frac{\pi b^2 a}{3}$$

$$= \frac{\text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}}{3} = \frac{1}{3} (\pi b^2) a$$

ومنه

$$\text{حجم المخروط الدوراني} = \frac{\text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}}{3}$$

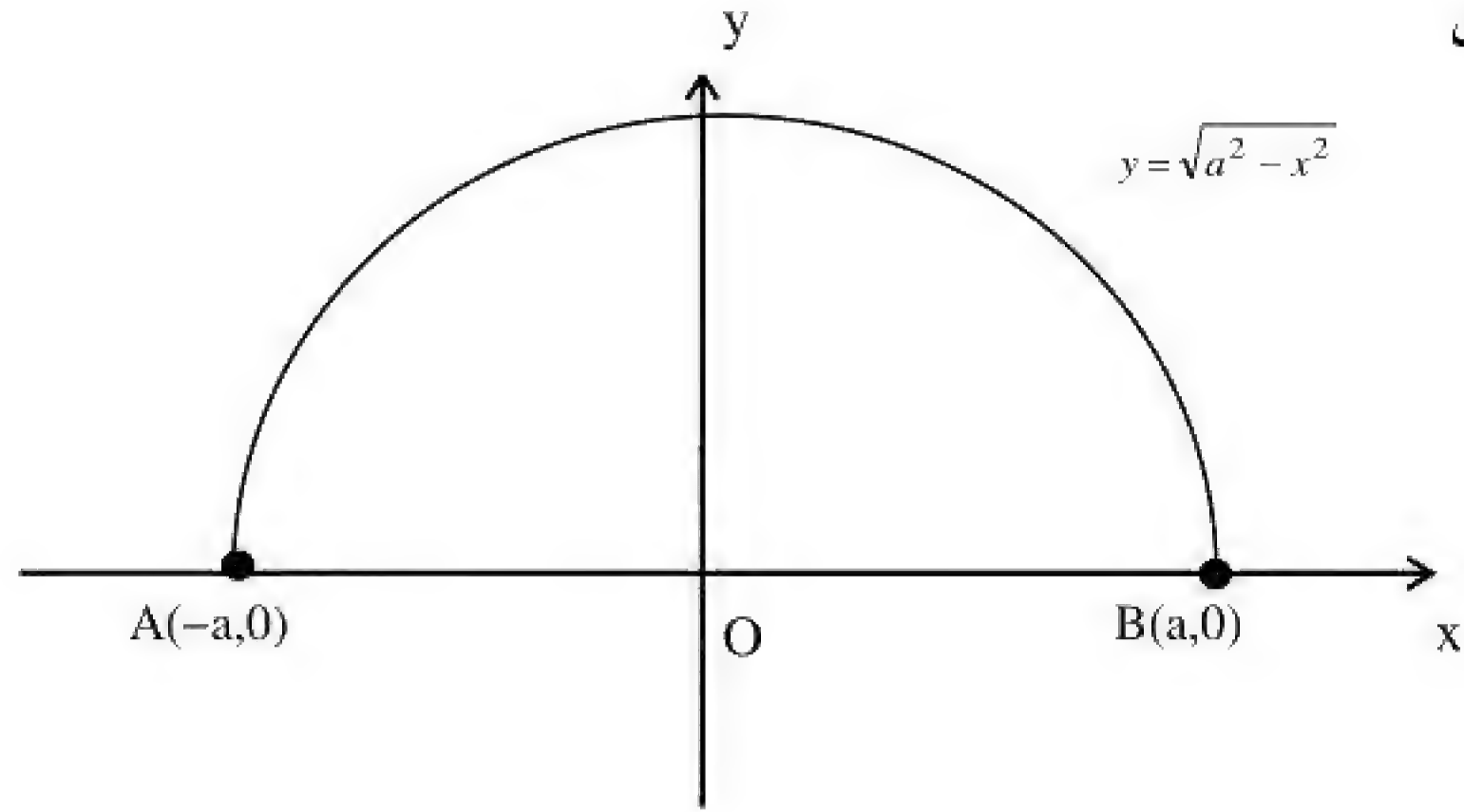
مثال (١٠, ٥٧)

أوجد الحجم الناتج من دوران نصف الدائرة:

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

عند دورانها حول المحور x.

الحل



شكل (١٨, ١٠).

لاحظ أن نقطتي تقاطع نصف الدائرة مع المحور x، هما: $B(a,0)$ و $A(-a,0)$ فالحجم يساوي:

$$V = \pi \int_{-a}^a y^2 dx = \pi \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx$$

$$= 2\pi \int_0^a (a^2 - x^2) dx$$

(لأن دالة التكامل دالة زوجية)

$$= 2\pi \left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^a = 2\pi \left(a^3 - \frac{a^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi a^3$$

ومنه:

حجم الكرة $= \frac{4}{3} \pi a^3$ ، حيث a طول نصف قطر الكرة.

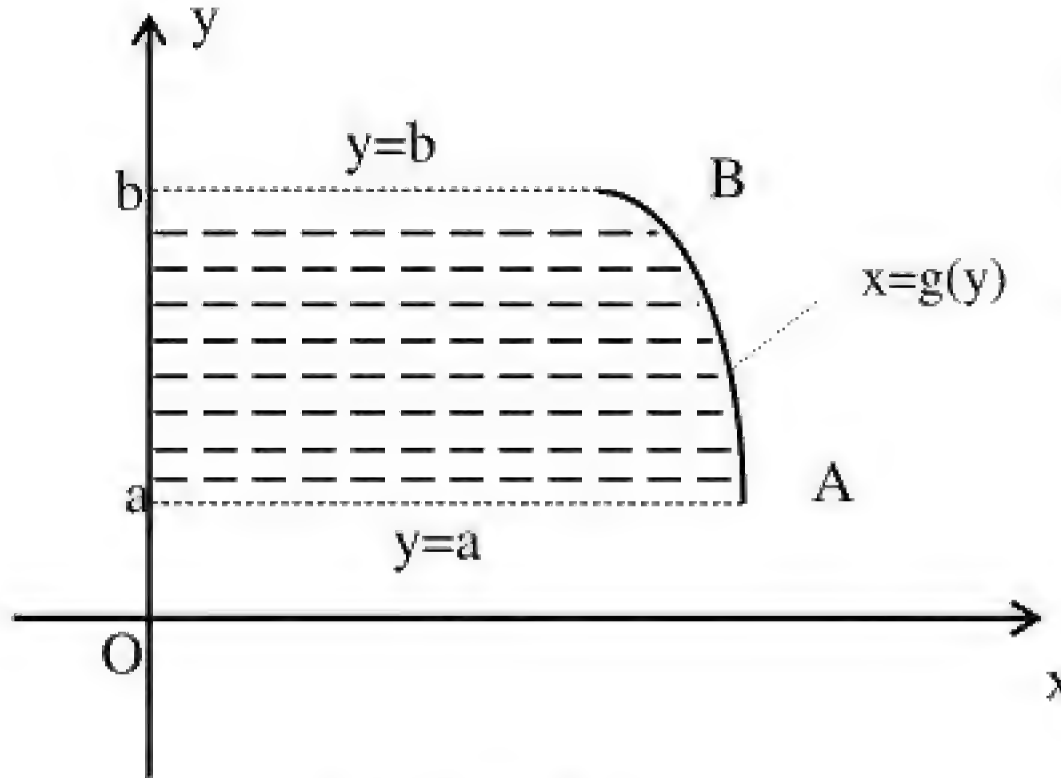
ملحوظة (١٣، ١٠)

إذا دارت المنطقة المحصورة بين القوس AB والقطة $[a, b]$ والمستقيمين $y=a$ و $y=b$ حول المحور y ، شكل (١٩، ١٠) فإن الحجم الناتج من دورانها يعطى بالصيغة:

$$V = \int_a^b \pi (g(y))^2 dy = \int_a^b \pi x^2 dy$$

(g دالة متصلة على الفترة $[a, b]$ ، $g(y) \geq 0$).

مثال (٥٨، ١٠)



شكل (١٩، ١٠).

أوجد حجم جذع المخروط الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين القطة المستقيمة $[A, B]$ والقطة $[0, H]$ والمستقيمين $y=0$ و $y=h$ عند دورانها حول المحور y ، حيث:
 $A(R, 0)$ ، $B(r, h)$. ($r < R$)

الحل

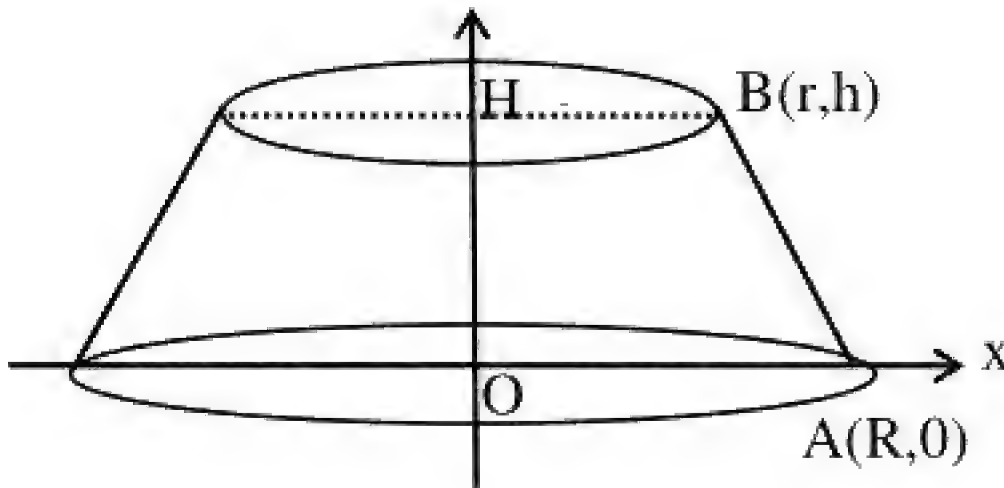
معادلة المستقيم AB :

$$\frac{y-0}{x-R} = \frac{h}{r-R}$$

ومنه:

$$\Leftrightarrow x - R = \frac{r-R}{h} y$$

$$x = R + \frac{r-R}{h} y$$



شكل (٢٠، ١٠).

الحجم يساوي:

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^h \pi x^2 dy = \pi \int_0^h \left(R + \frac{r-R}{h} y \right)^2 dy \\
 &= \frac{\pi h}{r-R} \int_0^h \left(R + \frac{r-R}{h} y \right)^2 \left(\frac{r-R}{h} dy \right) \\
 &= \frac{\pi h}{3(r-R)} \left[\left(R + \frac{r-R}{h} y \right)^3 \right]_0^h = \frac{\pi h}{3(r-R)} (r^3 - R^3)
 \end{aligned}$$

إذن، حجم جذع المخروط يساوي:

$$V = \frac{\pi h}{3} (r^2 + Rr + R^2)$$

R طول نصف قطر القاعدة الكبرى،

r طول نصف قطر القاعدة الصغرى،

h ارتفاع جذع المخروط.

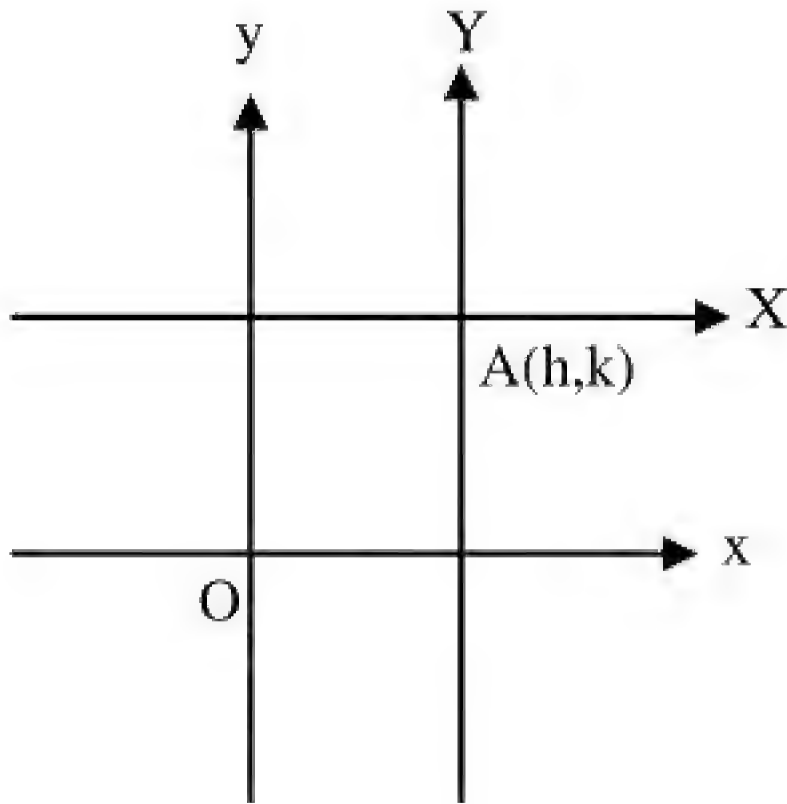
ملحوظة (١٤، ١٠)

(أ) إذا سحبنا المحورين الإحداثيين إلى النقطة

A(h,k)، فإن صيغتي الانسحاب اللتين تربطان

الإحداثيين (x,y) بالإحداثيين (X,Y) هما:

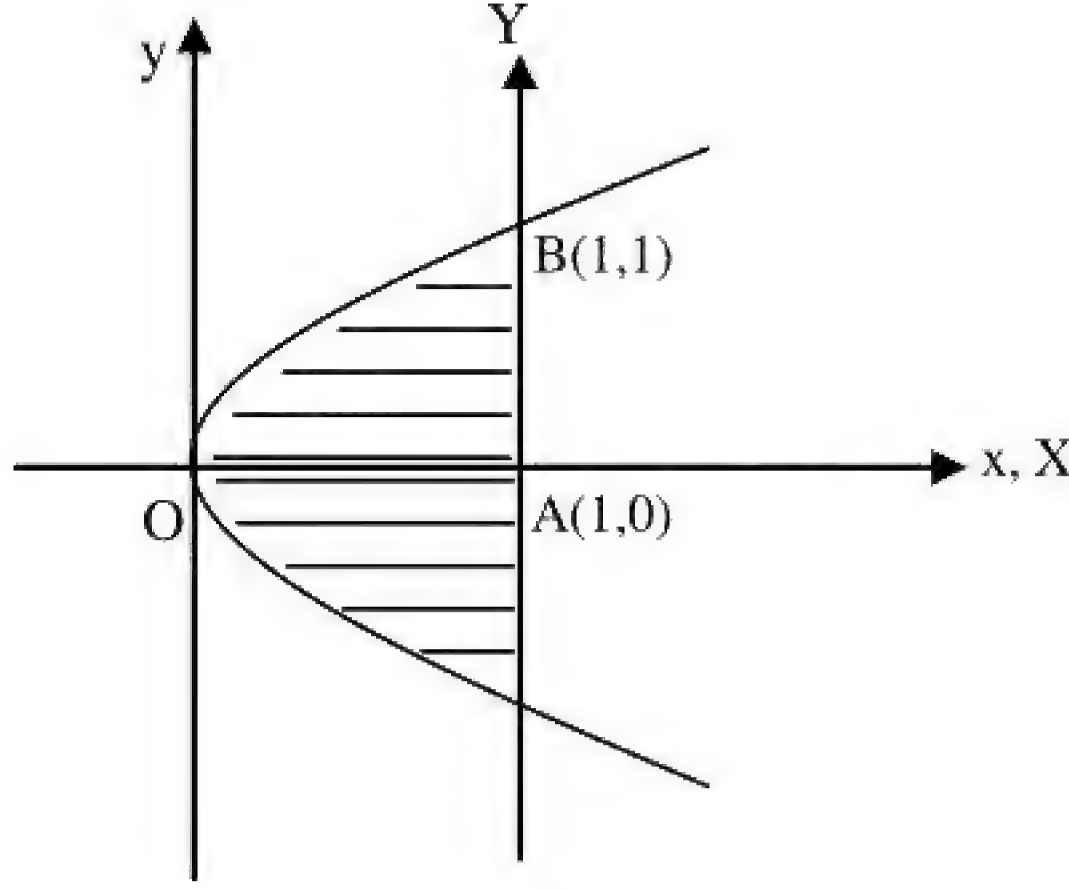
$$\begin{aligned}
 x &= h + X \\
 y &= k + Y
 \end{aligned}$$



شكل (١٠، ٢١).

مثال (١٠, ٥٩)

أوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة Q المحصورة بين المنحنيين $y^2 = x$ و $x = 1$ ، عند دورانها حول المحور:

 $x = 1$ 

شكل (١٠, ٢٢).

الحل

لنسحب المحورين الإحداثيين إلى النقطة $A(1,0)$.

صيفتا الانسحاب: $y = Y$ ، $x = 1 + X$

معادلة القطع المكافئ: $y^2 = x$ بالنسبة للمحورين X, Y هي:

$$g(Y) = X = Y^2 - 1 \Leftrightarrow Y^2 = 1 + X$$

الحجم الناتج من دوران المنطقة المظللة حول المحور Y يساوي مثلي الحجم الناتج من دوران النصف العلوي من هذه المنطقة ويساوي:

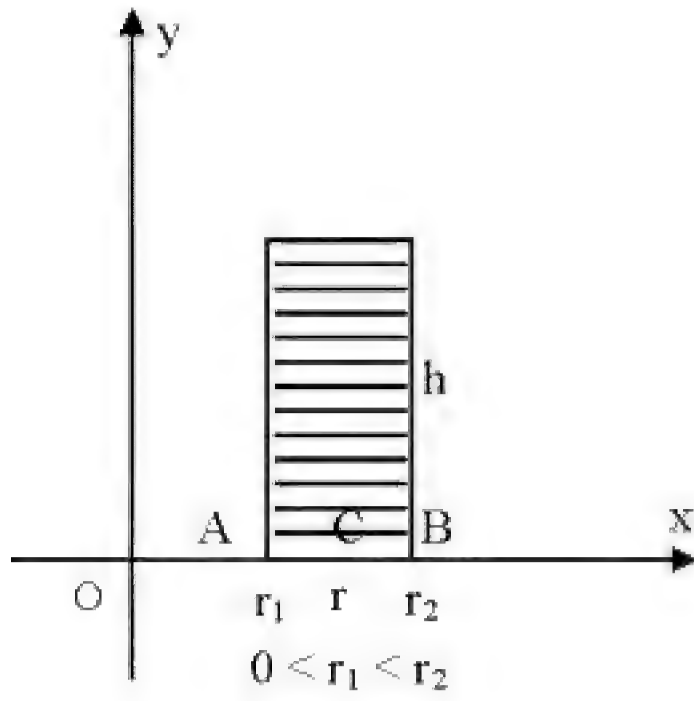
$$\begin{aligned} 2\pi \int_0^1 (g(Y))^2 dY &= 2\pi \int_0^1 (Y^2 - 1)^2 dY = 2\pi \int_0^1 (Y^4 - 2Y^2 + 1) dY \\ &= 2\pi \left(\frac{Y^5}{5} - \frac{2Y^3}{3} + Y \right) \Big|_0^1 = 2\pi \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1 \right) = \frac{8\pi}{15} \cdot 2 = \frac{16\pi}{15} \end{aligned}$$

بصورة أخرى: إذا اعتبرنا $p(x,y)$ نقطة من نقاط القطع المعطى، فإن نصف قطر الدائرة التي ترسمها هذه النقطة عند دورانها حول المستقيم: $x=1$ (الموازي للمحور y)، يساوي: $r=1-x=1-y^2$ ، بالتالي فإن الحجم المطلوب يساوي:

$$V = 2 \int_0^1 \pi r^2 dy = 2 \int_0^1 \pi (1 - y^2)^2 dy$$

(١٧, ١٠) الحجم بطريقة الشرائح الأسطوانية

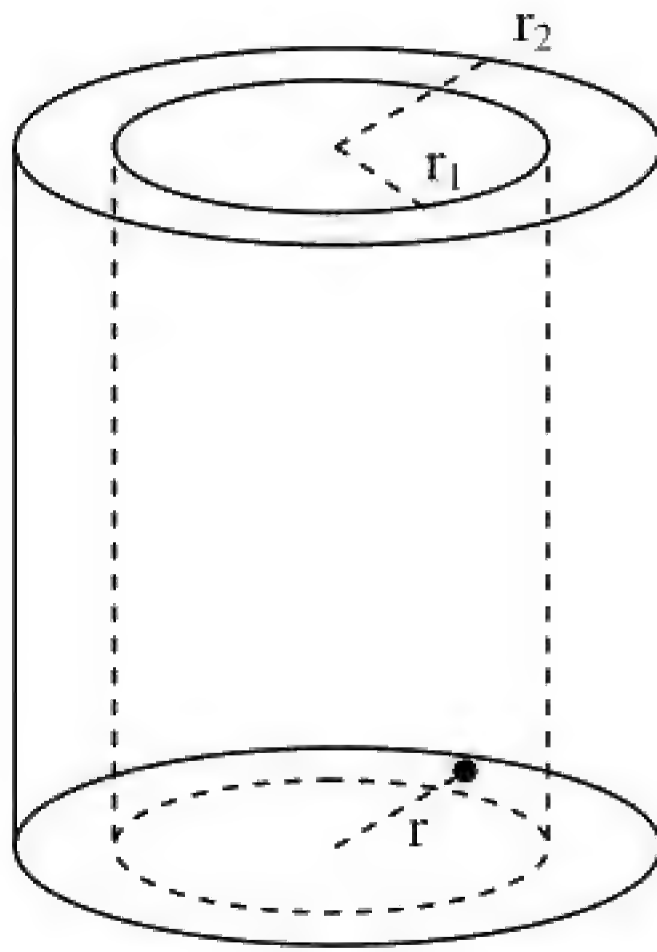
The Volumes by Cylindrical Shells



شكل (١٠, ٢٣).

إذا دار المستطيل المظلل في الشكل (١٠, ٢٣) حول المحور y ، فإن الحجم الناتج من دورانه، يساوي الفرق بين حجمي أسطوانتين: الأولى طول نصف قطرها يساوي r_2 وحجمها يساوي $\pi r_2^2 h$.

والثانية طول نصف قطرها يساوي r_1 وحجمها يساوي $\pi r_1^2 h$.



شكل (١٠, ٢٤).

(h الارتفاع المشترك للأسطوانتين)

إذن حجم هذه الشريحة الأسطوانية يساوي:

$$\pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h = \pi h(r_2 - r_1)(r_2 + r_1)$$

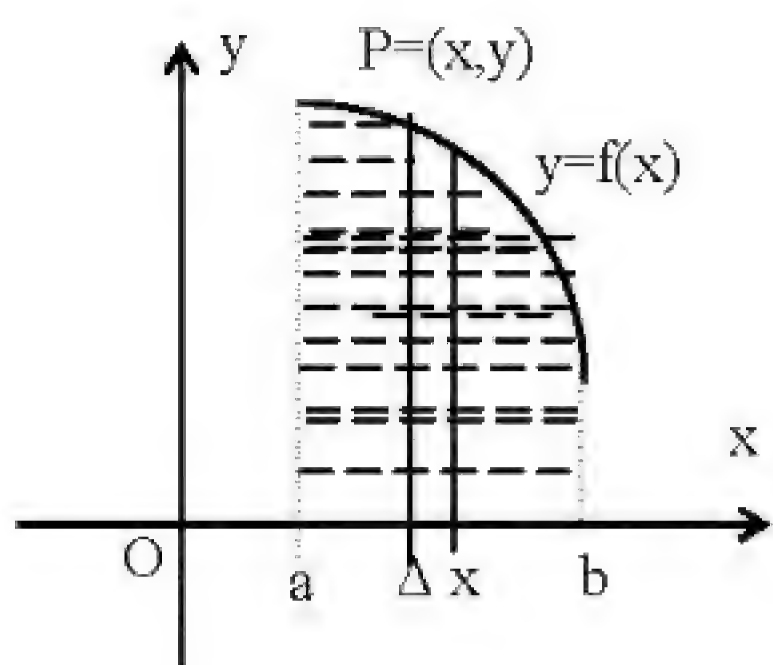
من الملاحظ أن الإحداثي السيني للنقطة

C منتصف القاعدة $[A, B]$ يساوي: $r = \frac{r_1 + r_2}{2}$. بالتالي

فإن حجم الشريحة الأسطوانية يساوي:

$$2\pi h r \Delta r$$

(Δr) سمك الشريحة الأسطوانية، r المتوسط الحسابي لنصفي قطري الأسطوانتين الداخلية والخارجية، h ارتفاع الشريحة).



شكل (١٠, ٢٥).

لتكن f دالة متصلة على الفترة $[a, b]$ ، حيث:

$$f(x) \geq 0, a \geq 0$$

الحجم الناتج من دوران المنطقة المظللة في الشكل (١٠, ٢٥)، حول المحور y ، يعطى بالصيغة:

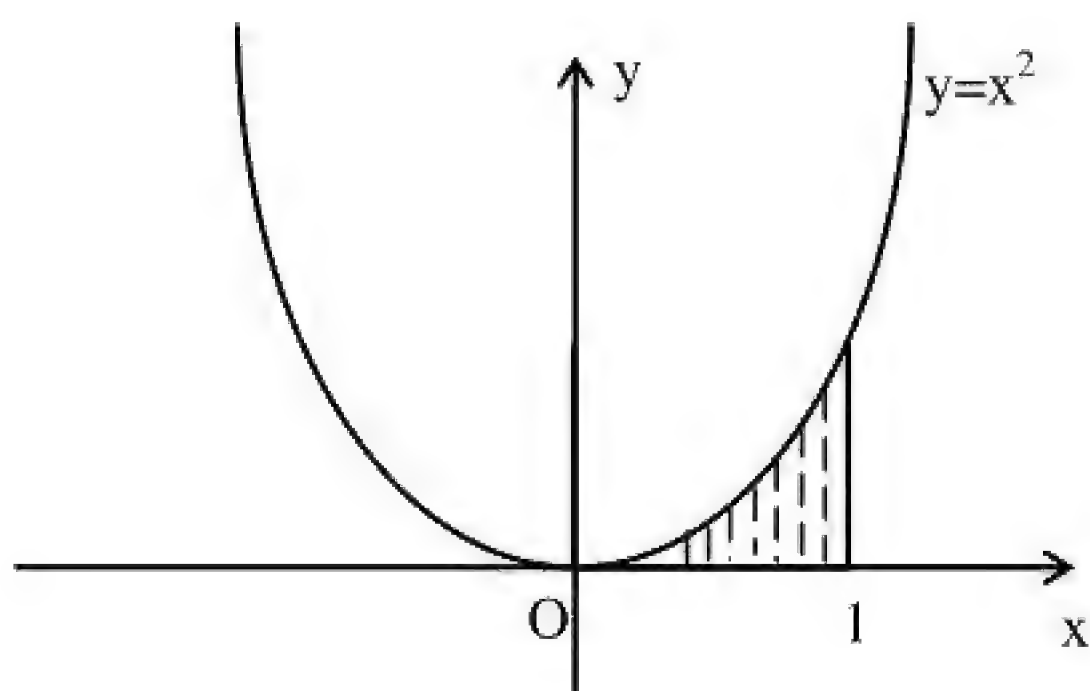
$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx = \int_a^b 2\pi x y dx$$

تسمى هذه الطريقة بطريقة الشرائح الأسطوانية لإيجاد الحجم.

($f(x)$) ارتفاع الشريحة، x بعد النقطة P عن محور الدوران.

مثال (١٠, ٦٠)

أوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة المظللة في الشكل (١٠, ٢٦)، حول المحور y بطريقة الشرائح الأسطوانية.



شكل (١٠, ٢٦).

الحل

$$V = \int_0^1 2\pi x^2 dx$$

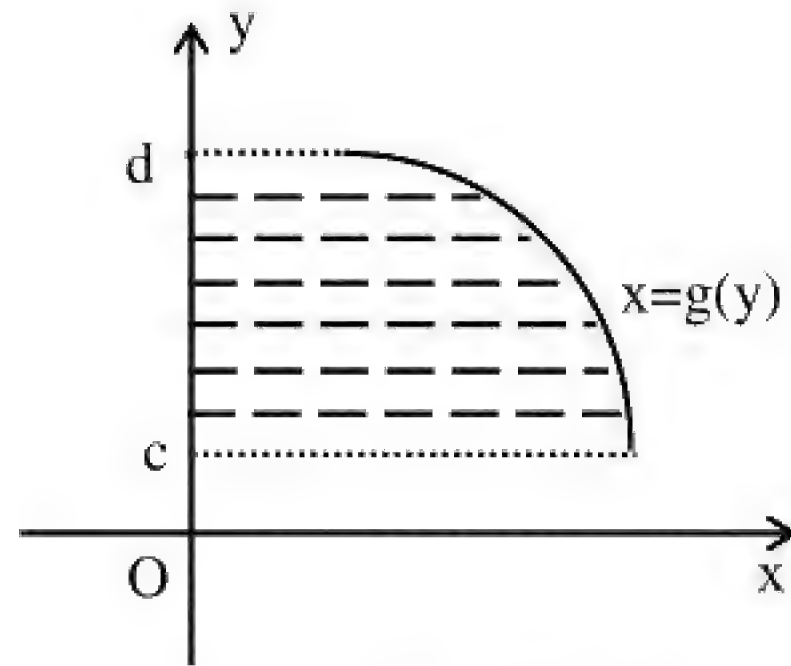
$$= \left[\frac{2\pi x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2\pi}{3}$$

ملحوظة (١٥، ١٠)

لتكن g دالة متصلة على الفترة $[c, d]$ ، حيث: $c \geq 0$ ، $g(y) \geq 0$.

الحجم الناتج من دوران المنطقة المظللة في الشكل (٢٧، ١٠) حول المحور x بطريقة الشرائح

الاسطوانية، يعطى بالصيغة: $V = \int_c^d 2\pi y g(y) dy = \int_c^d 2\pi y x dy$



شكل (٢٧، ١٠).

مثال (٦١، ١٠)

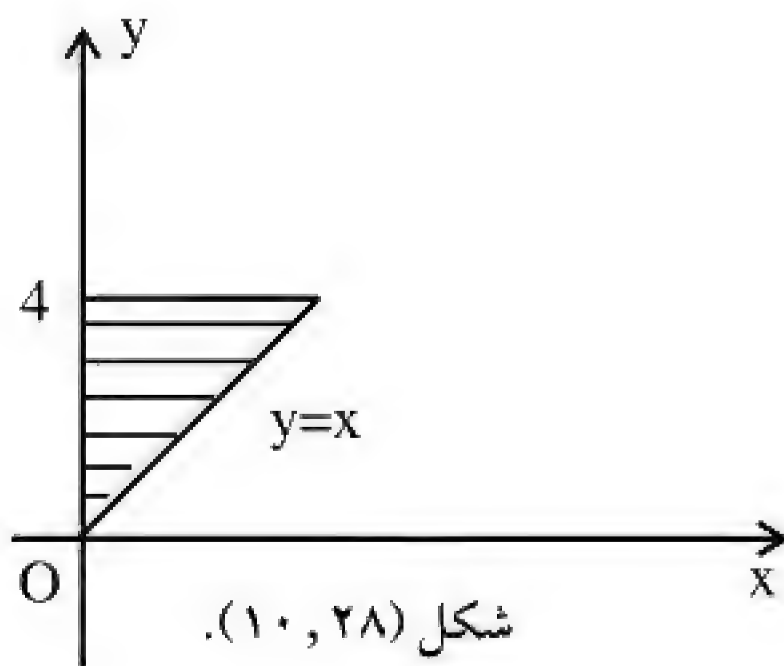
أوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة المظللة في الشكل (٢٨، ١٠)، حول المحور x بطريقة الشرائح الأسطوانية.

الحل

الحجم يساوي:

$$\int_0^4 2\pi y y dy = \left[\frac{2\pi y^3}{3} \right]_0^4 = \frac{2\pi}{3} (4)^3$$

$$= \frac{128}{3} \pi$$



شكل (٢٨، ١٠).

تمارين (٨, ١٠)

- (١) أوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالقطع المكافئ: $y = 2x - x^2$ والمحور x ، عند دورانها حول المحور x .
- (٢) أوجد حجم مجسم القطع الناقص المتولد من دوران القطع الناقص: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ، حول المحور x .
- (٣) أوجد الحجم الناتج من دوران قوس المنحني: $y = \sin^2 x$ المحدود بنقطة الأصل والنقطة: $A(\pi, 0)$ عند دورانه حول المحور x .
- (٤) أوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالمحور x والمستقيم $x=1$ والمنحني: $y^2 = x^3$ ، عند دورانها حول المحور x مرة وحول المحور y مرة أخرى.
- (٥) أوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة اللانهائية المحدودة بالمحورين الإحداثيين $(x \geq 0)$ والمنحني: $y = e^{-x}$ ، عند دورانها حول:
(أ) المحور x (ب) المحور y
- (٦) أوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالقطع المكافئ: $y^2 = 8x$ والمستقيم: $x=2$ ، عند دورانها حول:
(أ) المحور y (ب) المحور $x=2$
- (٧) أوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالمنحني: $y^2 = 2x$ والمستقيم: $x = \frac{1}{2}$ ، عند دورانها حول المستقيم: $y = -1$.
- (٨) أوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة التي يحدها الجزء المغلق من المنحني: $(x-4)y^2 = x(x-3)$ ، عند دورانها حول المحور x .

الإجابات

- (١) $\frac{16\pi}{15}$ (٢) $\frac{4}{3}\pi ab^2$ (٣) $\frac{3}{8}\pi^2$
- (٤) حول x : $\frac{\pi}{4}$ ، حول y : $\frac{4}{7}\pi$
- (٥) حول x : $\frac{\pi}{2}$ ، حول y : 2π
- (٦) حول y : $\frac{128\pi}{5}$ ، حول $x=2$: $\frac{256\pi}{15}$
- (٧) $\frac{4}{3}\pi$ (٨) $\frac{\pi}{2}(15-16\ln 2)$

(١٨, ١٠) مساحة سطح دوراني

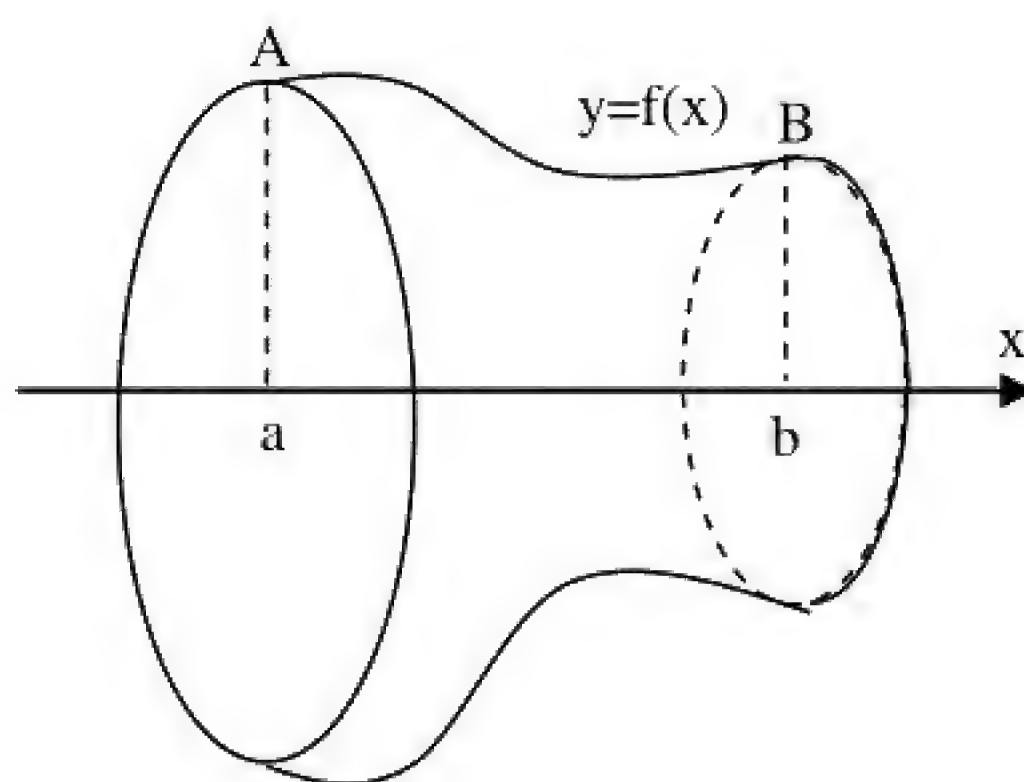
Area of a Surface of Revolution

لتكن f دالة متصلة وغير سالبة معرفة على الفترة $[a, b]$ ومشتقتها متصلة على هذه الفترة شكل (١٠, ٢٩).

مساحة السطح الناتج عن دوران قوس المنحني $y=f(x)$ المحصور بين النقطتين A, B حول المحور x

شكل (١٠, ٢٩)، يساوي:

$$S = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad \text{أو} \quad S = \int_a^b 2\pi y ds$$



شكل (١٠, ٢٩).

وذلك بملاحظة أن: $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$ (تفاضل طول القوس)

مثال (١٠, ٦٢)

أوجد مساحة السطح الناتج عن دوران القطعة المستقيمة $[O, A]$ حول المحور x ، حيث:

$$A=(a, b)$$

الحل

السطح الناتج هو مخروط دوراني، مساحته تساوي:

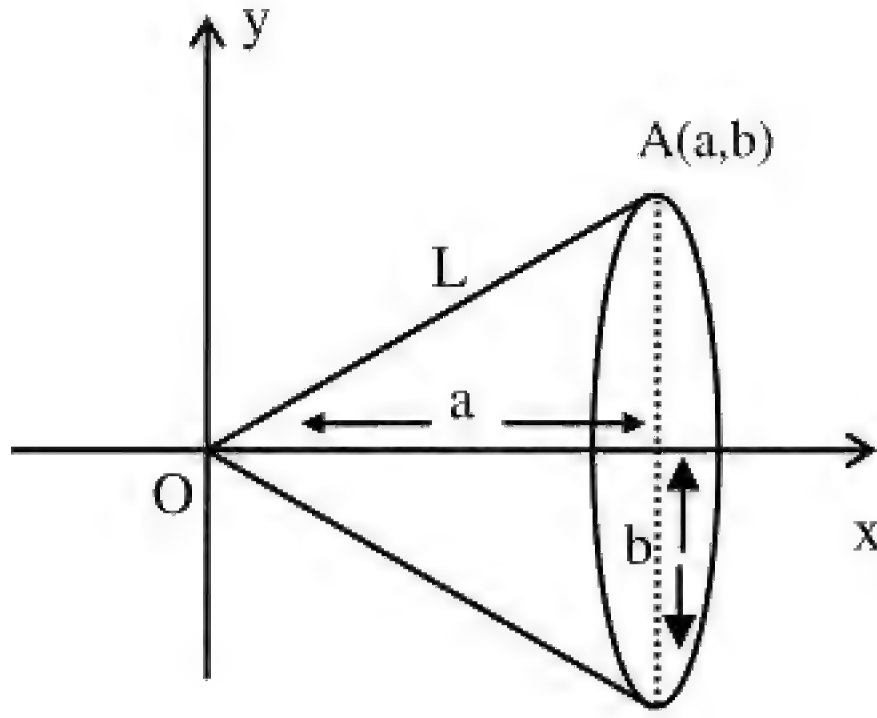
$$S = \int_0^a 2\pi y \sqrt{1 + y'^2} dx$$

معادلة المستقيم OA، هي: $y = \frac{b}{a}x$

إذن:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^a 2\pi \left(\frac{b}{a}x\right) \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} dx \\ &= \frac{2\pi b \sqrt{a^2 + b^2}}{a^2} \int_0^a x dx \\ &= \frac{2\pi b \sqrt{a^2 + b^2}}{a^2} \cdot \frac{a^2}{2} = \pi b \sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

وبملاحظة أن: $|OA| = \sqrt{a^2 + b^2}$



شكل (١٠, ٣٠).

فإن سطح المخروط الذي طول نصف قطره قاعدته b وطول حرفه الجانبي L ، هو:

$$S = \pi b L$$

ملحوظة (١٠, ١٦)

إذا دار قوس المنحني: $x=g(y)$ الذي بدايته: $A(g(c), c)$ ونهايته: $B(g(d), d)$ حول المحور y ، فإن مساحة السطح الدوراني الناتج تعطى بالصيغة:

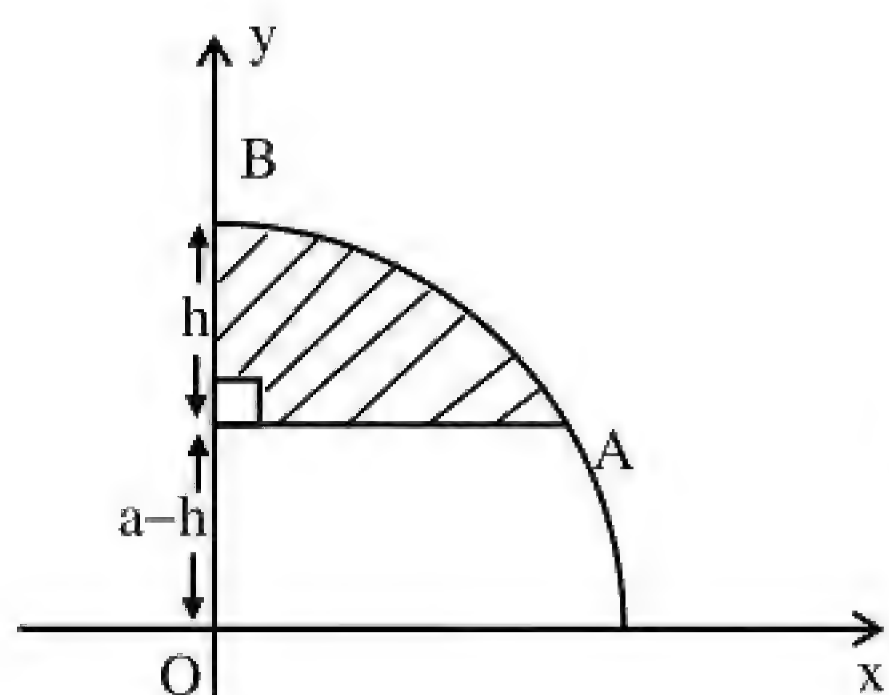
$$S = \int_c^d 2\pi g(y) \sqrt{1 + (g'(y))^2} dy$$

حيث g دالة قابلة للاشتقاق على الفترة $[c, d]$ ومشتقتها متصلة على هذه الفترة، وتحقق الشرط: $g(y) \geq 0$

مثال (١٠, ٦٣)

أوجد مساحة القبة الكروية التي ارتفاعها h والناتجة عن دوران \widehat{AB} قوس نصف الدائرة: $x = \sqrt{a^2 - y^2}$ حول المحور y (شكل (١٠, ٣١)).

الحل



شكل (١٠, ٣١).

إذا كان طول ارتفاع القبة يساوي h فإن الإحداثي الصادي للنقطة A ، هو: $a - h$.
مساحة القبة تساوي:

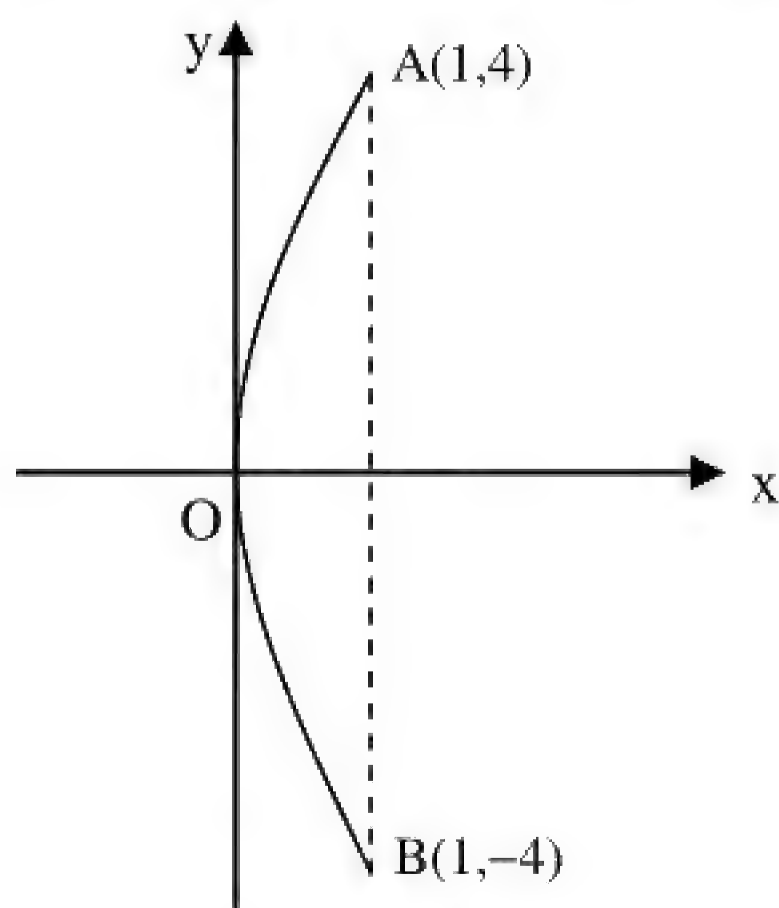
$$\begin{aligned} S &= \int_{a-h}^a 2\pi \sqrt{a^2 - y^2} \sqrt{1 + \frac{y^2}{a^2 - y^2}} dy \\ &= \int_{a-h}^a 2\pi \sqrt{a^2 - y^2} \frac{a}{\sqrt{a^2 - y^2}} dy \\ &= 2\pi a [y]_{a-h}^a = 2\pi ah \end{aligned}$$

مساحة القبة الكروية الذي طول ارتفاعها h يساوي:

$$S = 2\pi ah$$

تمارين (٩, ١٠)

(١) ما هي مساحة المرآة الناتجة عن دوران القوس المكافئ AOB ، شكل (١٠, ٣٢)، عند دورانه حول المحور x .



شكل (١٠, ٣٢).

(٢) أوجد مساحة السطح الناتج عن دوران قوس

المنحني: $y = \sin x$ المحدود بنقطة الأصل والنقطة $(\pi, 0)$ عند دورانه حول المحور x .

(٣) أوجد مساحة السطح الناتج من دوران قوس

المنحني: $y = \tan x$ المحصور بين النقطتين

الموافقتين $x=0$ ، $x = \frac{\pi}{4}$ ، عند دورانه حول المحور x .

(٤) أوجد مساحة السطح الناتج من دوران قوس المنحني: $y = e^{-x}$ المحدود بالنقطتين الموافقتين $x=0$ ، $X = \infty$ ، عند دورانه حول المحور x .

(٥) أوجد مساحة السطح الدوراني الناتج عن دوران قوس المنحني: $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$ المحصور بين النقطتين الموافقتين $y=1$ ، $y=e$ عند دورانه حول المحور x .

(٦) أوجد مساحة السطح الناتج عن دوران الدائرة: $x^2 + (y-2)^2 = 1$ عند دورانها حول المحور x .

(٧) أوجد مساحة السطح الدوراني الناتج عن دوران القطع الناقص: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ ، عند دورانه:

(أ) حول المحور x (ب) حول المحور y

الإجابات

$$\frac{16}{3}\pi(5\sqrt{5}-8) \quad (١)$$

$$2\pi[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1)] \quad (٢)$$

$$\pi(\sqrt{5}-\sqrt{2}) + \pi \ln \frac{2(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{5}+1} \quad (٣)$$

$$\frac{\pi}{3}(e-1)(e^2+e+4) \quad (٥)$$

$$8\pi^2 \quad (٦) \text{ ضع } y \text{ على الشكل: } y = 2 \pm \sqrt{1-x^2}$$

بأخذ الإشارة الموجبة نحصل على السطح الخارجي للحلقة.

وبأخذ الإشارة السالبة نحصل على السطح الداخلي للحلقة.

$$32\pi + \frac{200\pi}{3} \sin^{-1} \frac{3}{5} \quad (٧) \text{ حول } x$$

$$50\pi + \frac{80\pi}{3} \ln 4 \quad \text{حول } y$$

(١٩, ١٠) أمثلة عامة

General Examples

مثال (١٠, ٦٤)

بدون الاستعانة بالرسم، أوجد المساحة المحدودة، بالمنحنيين:

$$f(x) = (x^2 - 1)(x - 2) , g(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$$

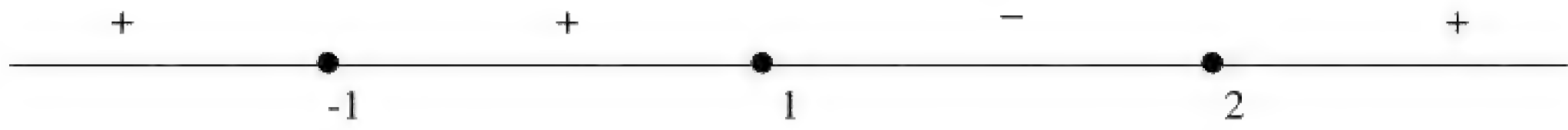
الحل

من الواضح أن: f و g دالتان متصلتان على IR . لندرس إشارة المقدار:

$$g(x) - f(x) = (x^2 - 1)(x - 2)(x + 1)$$

$$= (x - 1)(x - 2)(x + 1)^2$$

ف نجد الإشارة كما هو موضح في الشكل التالي:

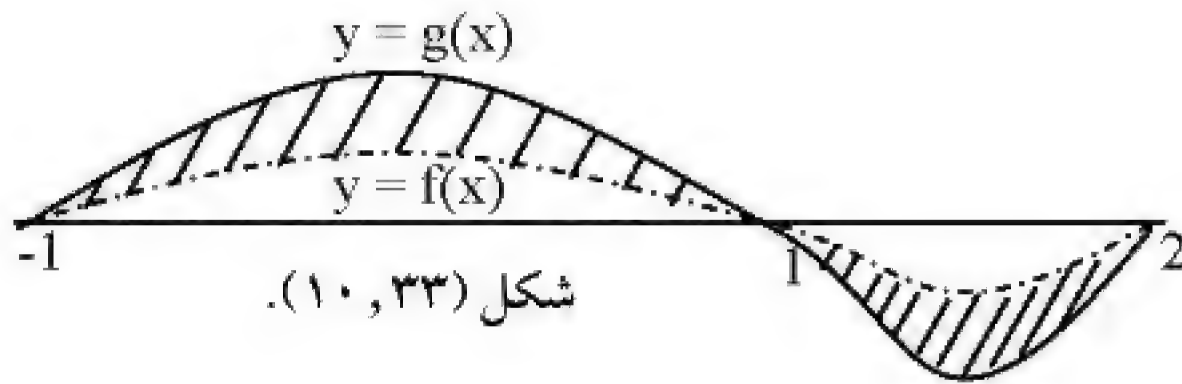


(باستثناء الجذور: 1, 1, 2، فإن الإشارة ما بين الجذرين 1, 2 سالبة وموجبة ما عدا ذلك)

فالمنطقة المحدودة بين المنحنيين بشكل تقريبي، كما هو موضح في الشكل:

$$g(x) \geq f(x) \text{ على الفترة } [1, 2]$$

$$g(x) \leq f(x) \text{ على الفترة } [1, 2]$$



فالمساحة تساوي:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 (g(x) - f(x)) dx + \int_1^2 (f(x) - g(x)) dx = \\ & \int_{-1}^1 [(x^4 - 5x^2 + 4) - (x^3 - 2x^2 - x + 2)] dx + \\ & \int_1^2 [(x^3 - 2x^2 - x + 2) - (x^4 - 5x^2 + 4)] dx = \end{aligned}$$

$$\int_{-1}^1 (x^4 - 3x^2 - x^3 + x + 2)dx + \int_1^2 (-x^4 + x^3 + 3x^2 - x - 2)dx =$$

$$\left(\frac{x^5}{5} - \frac{3x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_{-1}^1 + \left(-\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + \frac{3x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_1^2 = \frac{69}{20}$$

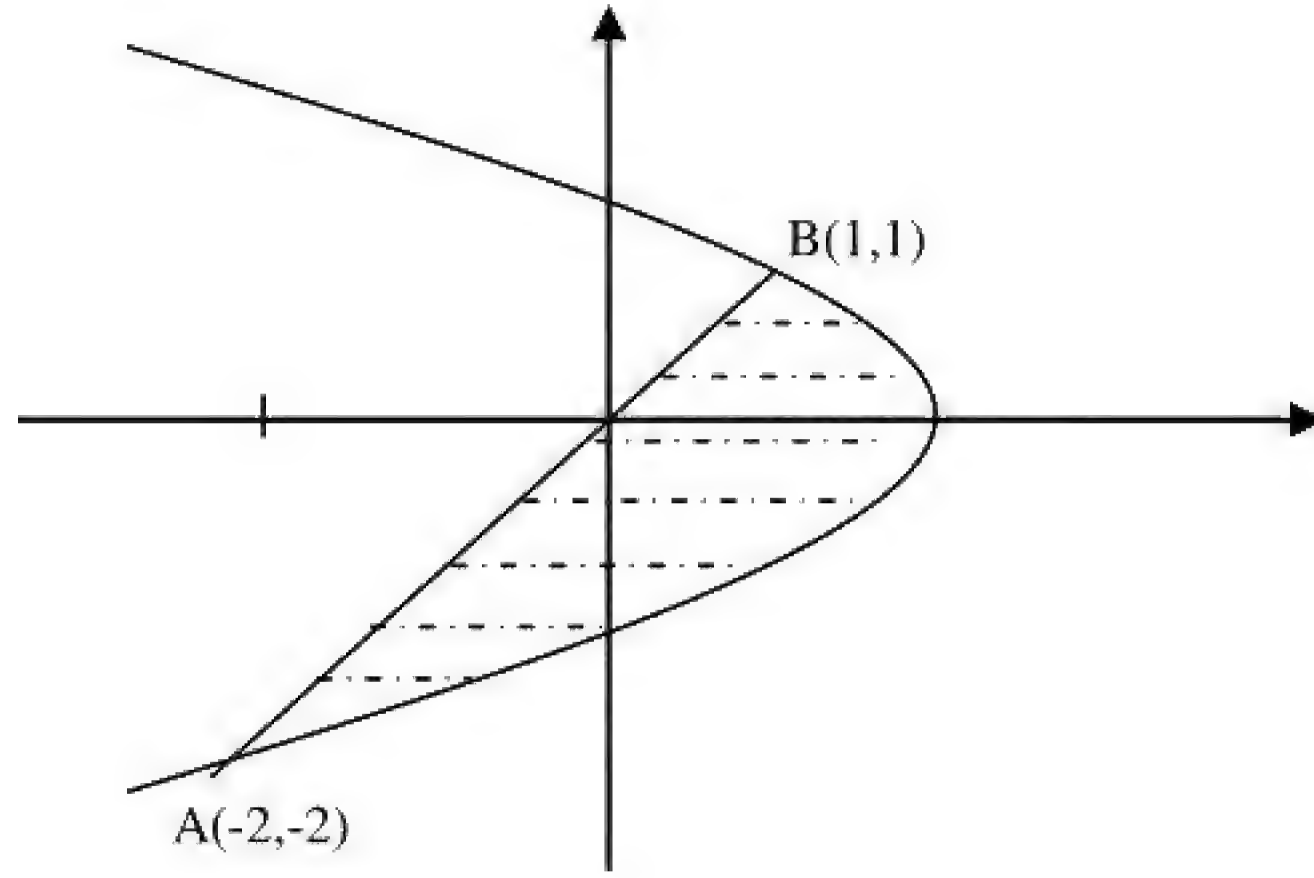
مثال (١٠, ٦٥)

أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالمنحني: $x = 2 - y^2$ والمستقيم: $y = x$.

الحل

المساحة تساوي:

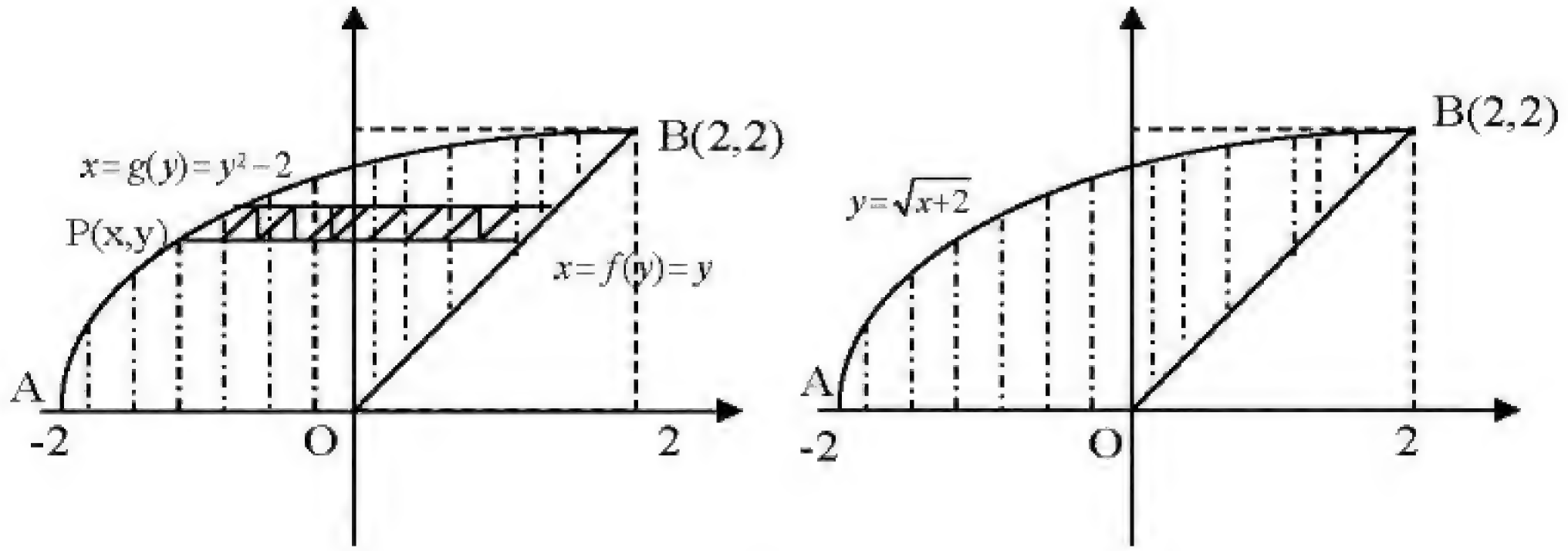
$$\int_{-2}^1 [g(y) - f(y)] dy = \int_{-2}^1 [(2 - y^2) - y] dy = \left(2y - \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{-2}^1 = \frac{9}{2}$$



شكل (١٠, ٣٤).

مثال (١٠, ٦٦)

أوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالمنحني: $y = \sqrt{x+2}$ والمستقيمين: $y = x$ و $y = 0$ عند دورانها حول المحور x .



شكل (١٠، ٣٥).

الحل

أ) الحجم يساوي: حجم المنطقة الناتجة من دوران القوس \widehat{AB} حول المحور x مطروحا منه الحجم الناتج من دوران القطعة $[O, B]$ حول نفس المحور. لإيجاد إحداثي النقطة B نقطة التقاطع بين المنحني: $y = \sqrt{x+2}$ والمستقيم: $y = x$. نساوي بين قيمتي y ، فنجد:

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1) = 0 \quad (x \geq 0)$$

$$x = 2 \Leftrightarrow (x-2)(x+1) = 0 \quad (\text{لأن: } x \geq 0)$$

١) حجم المنطقة الناتجة من دوران \widehat{AB} حول المحور x ، هو:

$$V_1 = \pi \int_{-2}^2 (f(x))^2 dx = \pi \int_{-2}^2 (x+2) dx = \pi \left(\frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_{-2}^2 = 8\pi$$

٢) الحجم الناتج من دوران القطعة $[O, B]$ حول المحور x ، هو:

$$V_2 = \pi \int_0^2 x^2 dx = \frac{\pi x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{8\pi}{3}$$

الحجم المطلوب، يساوي:

$$V = V_1 - V_2 = 8\pi - \frac{8\pi}{3} = \frac{16\pi}{3}$$

ب) طريقة أخرى باستخدام الشرائح الاسطوانية:

$$V = 2\pi \int_0^2 y (f(y) - g(y)) dy$$

$$V = 2\pi \int_0^2 y (y - (y^2 - 2)) dy$$

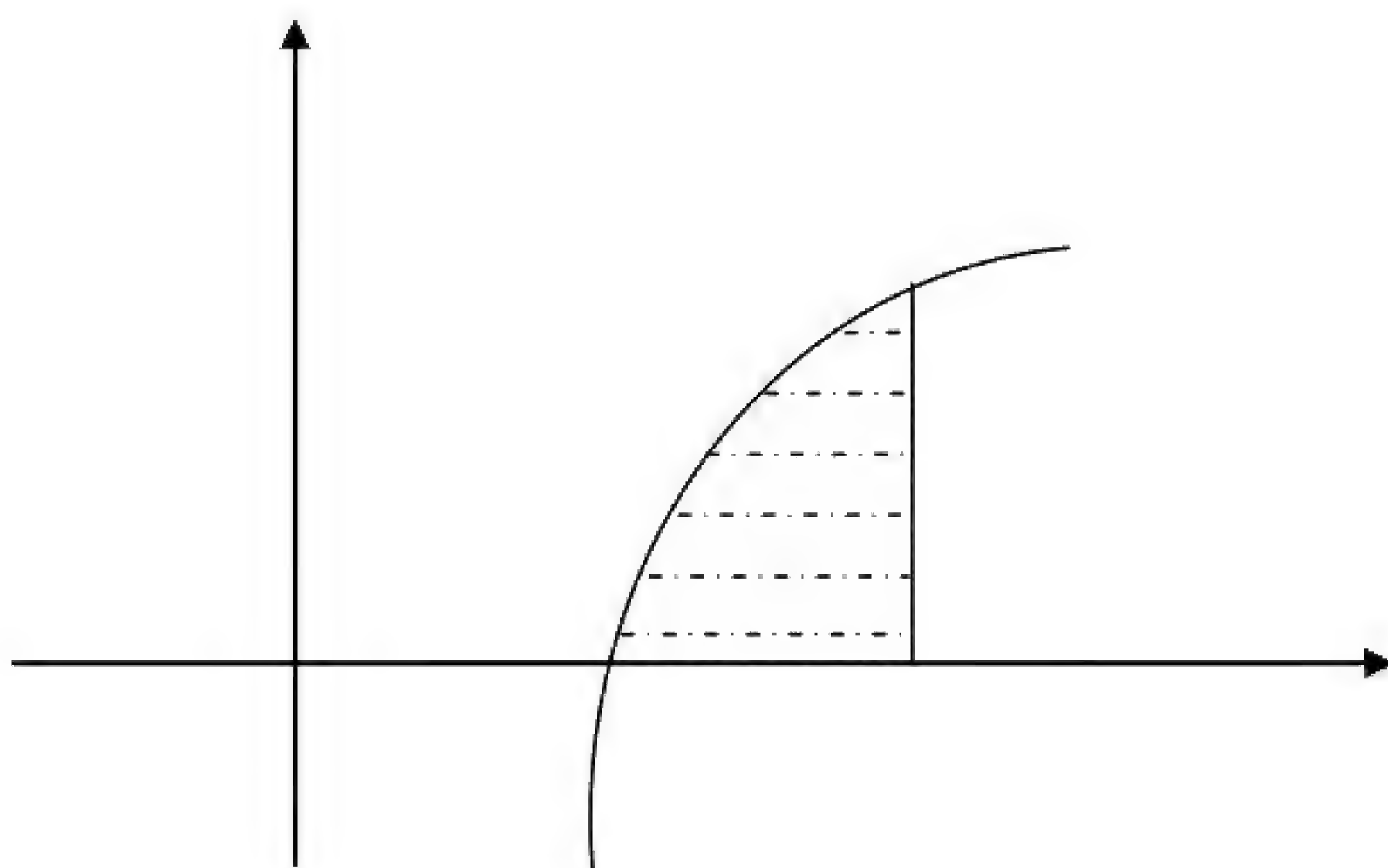
($f(y) - g(y)$) طول الشريحة، y بعد الشريحة عن محور الدوران

$$\begin{aligned} &= 2\pi \int_0^2 (y^2 - y^3 + 2y) dy = 2\pi \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + y^2 \right) \Big|_0^2 \\ &= 2\pi \left(\frac{8}{3} - 4 + 4 \right) = \frac{16}{3} \pi \end{aligned}$$

مثال (٦٧، ١٠)

أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالمنحني $y = \ln x$ والمستقيمين: $y=0$ و $x=2$ ، عند دورانها حول المحور y .

الحل



شكل (٣٦، ١٠).

بطريقة الشرائح الأسطوانية:

$$V = \pi \int_1^2 2\pi xy dx = \int_1^2 2\pi x \ln x dx = 2\pi \left(\frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \right)$$

$$dV = \frac{1}{x} dx \Leftarrow V = \ln x, \quad u = \frac{x^2}{2} \Leftarrow du = x dx \text{ (وضعنا)}$$

$$\text{وكاملنا بالتجزيء)}$$

$$= 2\pi \left(2 \ln 2 - \frac{x^2}{4} \Big|_1^2 \right) = 2\pi \left(2 \ln 2 - 1 + \frac{1}{4} \Big|_1^2 \right) = 4\pi \ln 2 - \frac{3}{2}\pi$$

مثال (٦٨, ١٠)

أوجد مساحة السطح الناتج عن دوران قوس المنحني: $y = \sqrt[3]{3x}$ المحدود بنقطة الأصل والنقطة: $A\left(\frac{8}{3}, 2\right)$ عند دورانه حول المحور y .

الحل

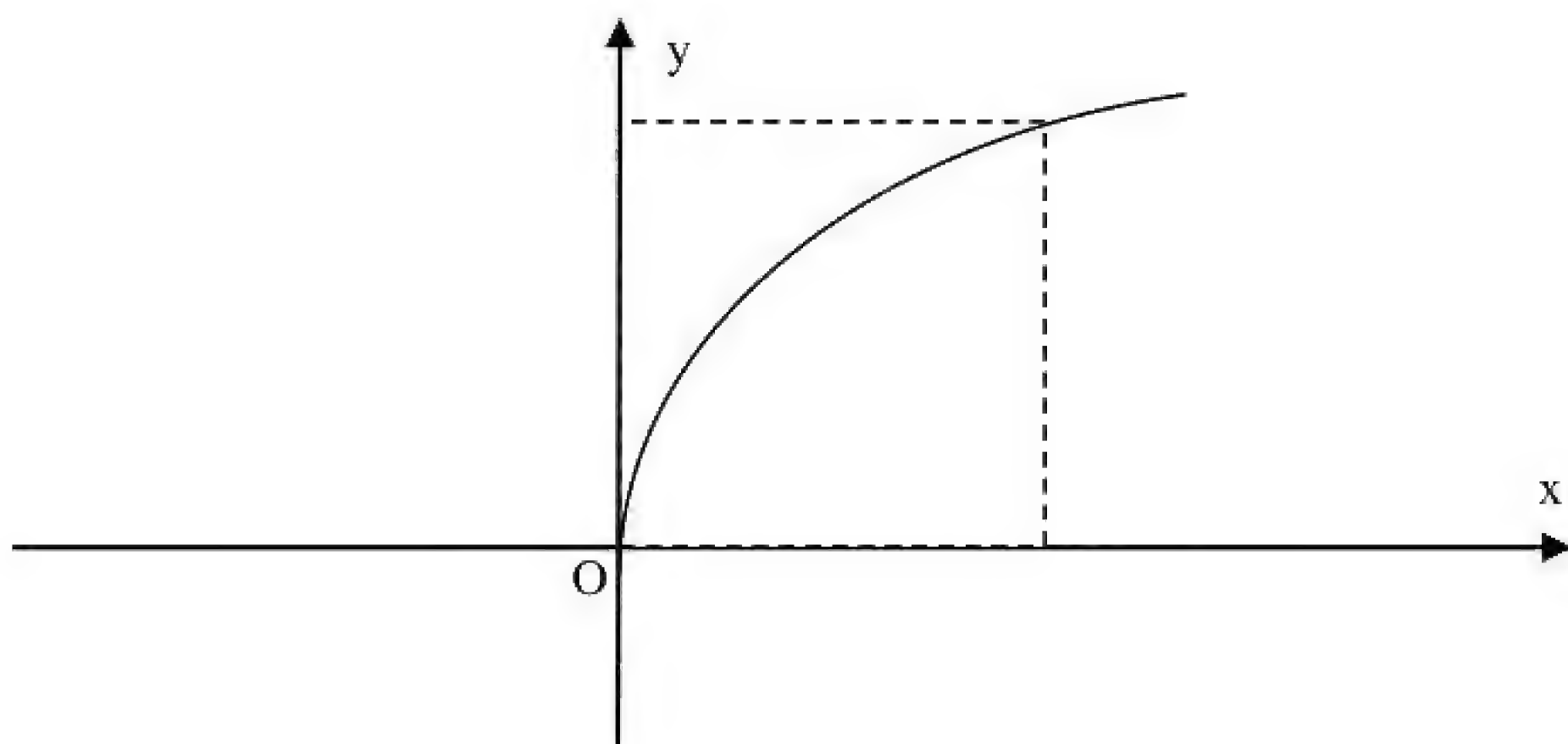
$$\frac{dx}{dy} = y^2 \Leftarrow x = \frac{y^3}{3} \Leftarrow y = \sqrt[3]{3x}$$

بالتالي، فإن مساحة السطح تساوي:

$$S = 2\pi \int_0^2 x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$

$$= \frac{2\pi}{3} \int_0^2 y^3 \sqrt{1 + y^4} dy$$

$$= \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{4} \int_0^2 \sqrt{1 + y^4} (4y^3 dy) = \frac{\pi}{6} \frac{(1 + y^4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 = \frac{\pi}{9} \left((17)^{\frac{3}{2}} - 1 \right)$$



شكل (١٠, ٣٧).

مثال (١٠, ٦٩)

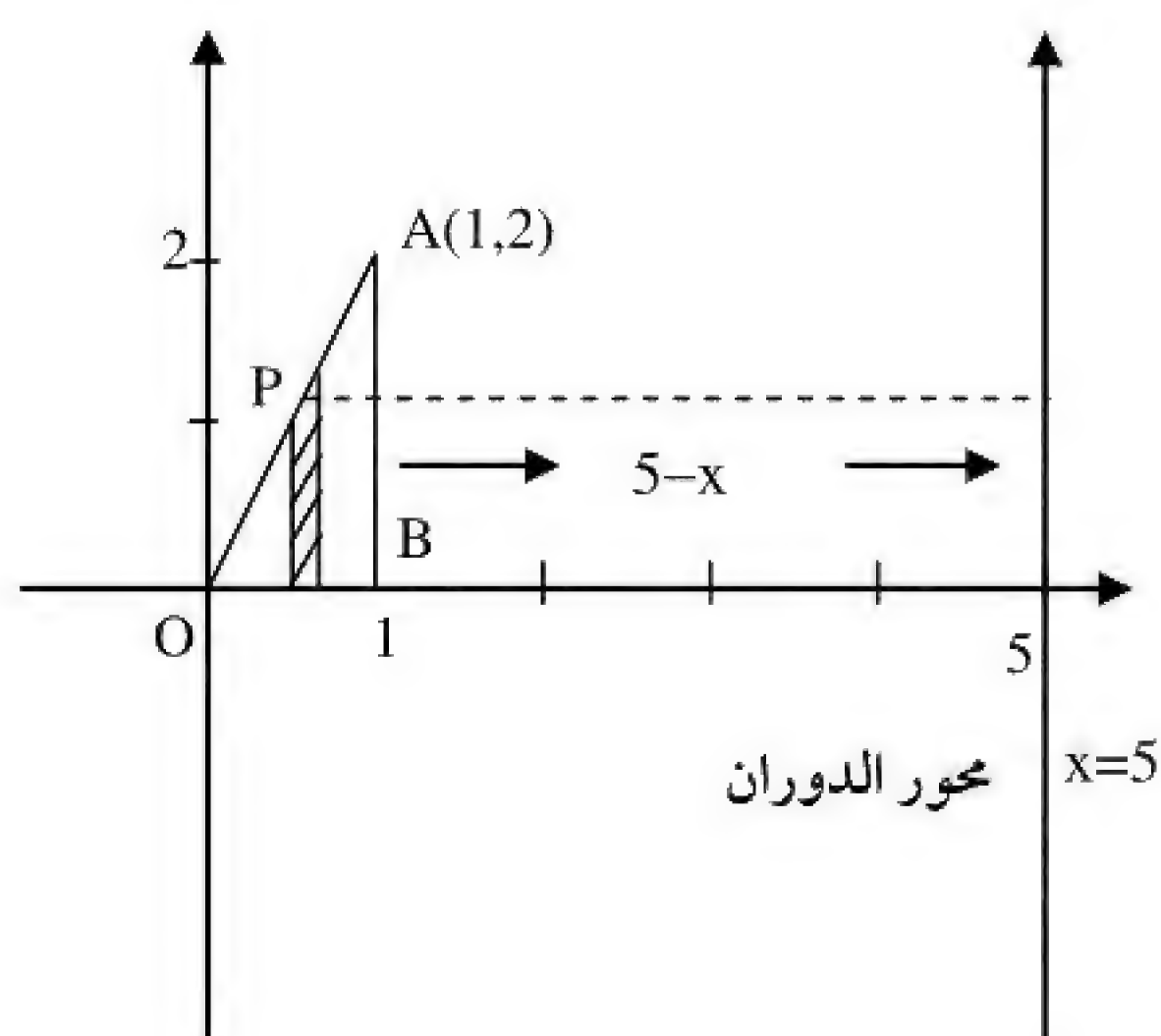
أوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالمستقيمين: $x = 1$, $y = 2x$ ومحور السينات، عند دورانها حول المستقيم: $x = 5$.

الحل

(طريقة الشرائح الأسطوانية)

الحل

محور الدوران، هو المستقيم:
 $x = 5$ الموازي للمحور y ،
 بالتالي فإن:



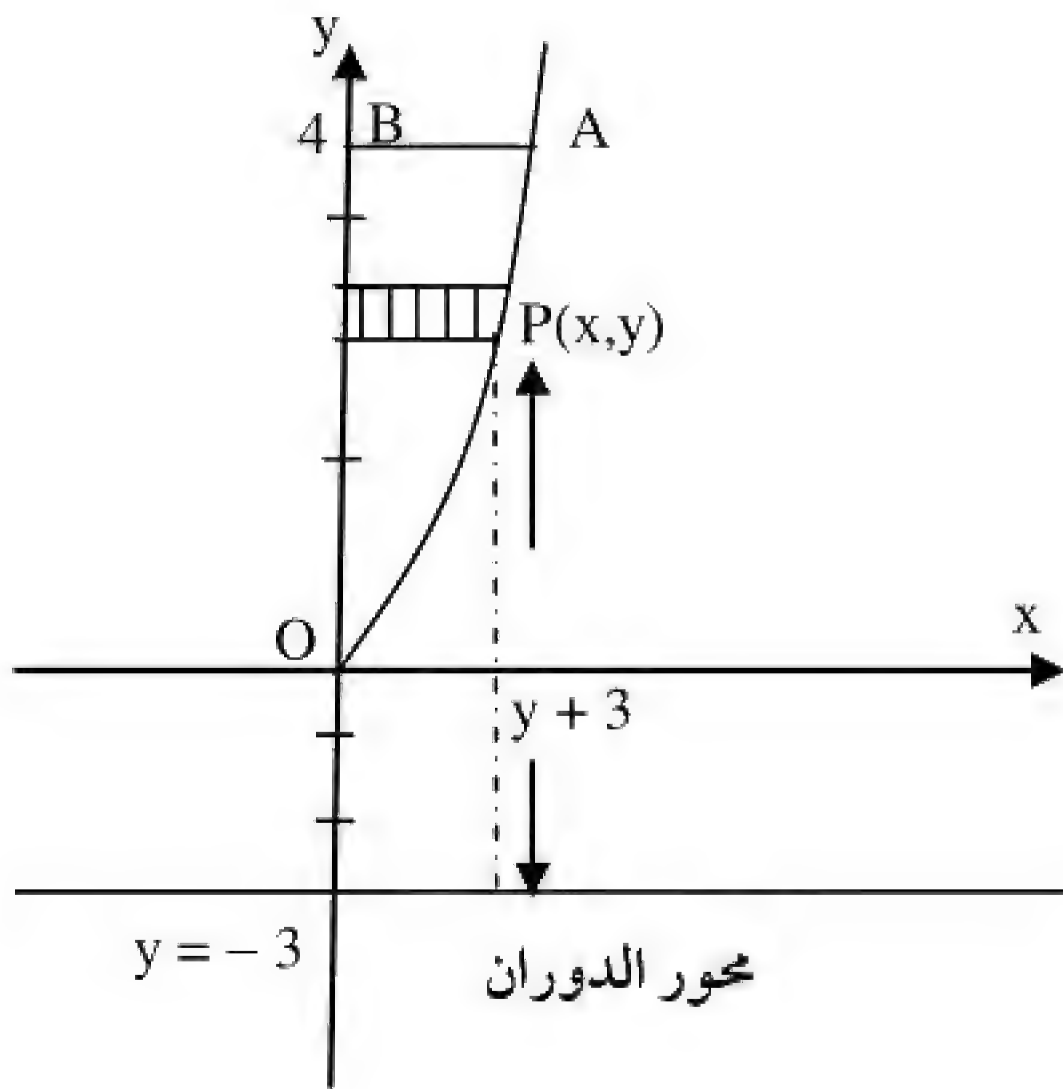
شكل (١٠, ٣٨).

- (أ) ارتفاع الشريحة يساوي: y .
 (ب) سمك الشريحة الأسطوانية يساوي: Δx .
 (ج) طول نصف القطر الوسطي للأسطوانة الشريحة يساوي بعد النقطة $p(x,y)$ عن محور الدوران، ويساوي: $5 - x$.
 (د) حجم الشريحة الأسطوانية التقريبي، هو: $2\pi y(5 - x)\Delta x$.
 (هـ) الحجم المطلوب يساوي:

$$V = 2\pi \int_0^1 y(5 - x)dx = 2\pi \int_0^1 2x(5 - x)dx = 4\pi \left(\frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{26\pi}{3}$$

مثال (١٠, ٧٠)

أوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالمنحني: $y = 4x^2$ والمستقيم $y = 4$ ومحور الصادات، عند دورانها حول المستقيم: $y = -3$.



شكل (١٠, ٣٩).

الحل

(طريقة الشرائح الأسطوانية)

محور الدوران، هو المستقيم:

$y = -3$ الموازي للمحور x ، بالتالي فإن:

(أ) ارتفاع الشريحة يساوي: x

(ب) سمكها يساوي: Δy .

(ج) طول نصف القطر الوسطي لأسطوانتي

الشريحة يساوي بعد النقطة $P(x,y)$ عن محور الدوران، ويساوي $y+3$.

(د) حجم الشريحة الأسطوانية التقريبي، هو: $2\pi x(y+3)\Delta y$

(هـ) الحجم المطلوب، يساوي:

$$\begin{aligned} \int_0^4 2\pi x(y+3)dy &= \int_0^4 2\pi \left(\frac{1}{2} y^{\frac{1}{2}} \right) (y+3)dy = \int_0^4 \pi \left(y^{\frac{3}{2}} + 3y^{\frac{1}{2}} \right) dy \\ &= \pi \left(\frac{2}{5} y^{\frac{5}{2}} + 2y^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^4 = \pi \left[\frac{2}{5} (2)^5 + 2(2)^3 \right] = \frac{\pi(2)^4}{5} (4+5) = \frac{144\pi}{5} \end{aligned}$$

القطع المخروطية
CONIC SECTIONS

(١, ١) القطع المكافئ
The Parabola

تعريف (١, ١)
القطع المكافئ: هو مجموعة النقاط M في المستوى، والتي بعد كل منها عن نقطة ثابتة F في هذا المستوى يساوي بعدها عن مستقيم ثابت، شكل (١, ١).

نسمي النقطة الثابتة F بالبؤرة (The Focus) والمستقيم الثابت بالدليل. ليكن G مسقط F على الدليل (Directrix)، وليكن $2a$ طول القطعة $[FG]$.
لنختار المحاور الإحداثية بحيث ينطبق المحور السيني على GF وينطبق المحور الصادي على العمود المنصف للقطعة $[FG]$ شكل (١, ١).

لنحدد إحداثيات النقطتين: F, M كما يلي:

$$F = (a, 0), M = (x, y)$$

(١١, ٣)

$$y^2 = 4ax, a > 0$$

وهذه معادلة القطع المكافئ بشكله القياسي.

بيان القطع المكافئ (المنحني البياني)

التماثل: من المعادلة (١١, ٣) يتضح أن القطع المكافئ متماثل بالنسبة للمحور السيني.
المجال والمدى: نجد من (١١, ٣):

(١١, ٤)

$$y = \pm 2\sqrt{a}\sqrt{x}$$

فمجال القطع هو الفترة: $[0, \infty)$

ويظهر من المعادلة (١١, ٤)، أن مداه هو: \mathbb{R}

دراسة تغيرات المنحني

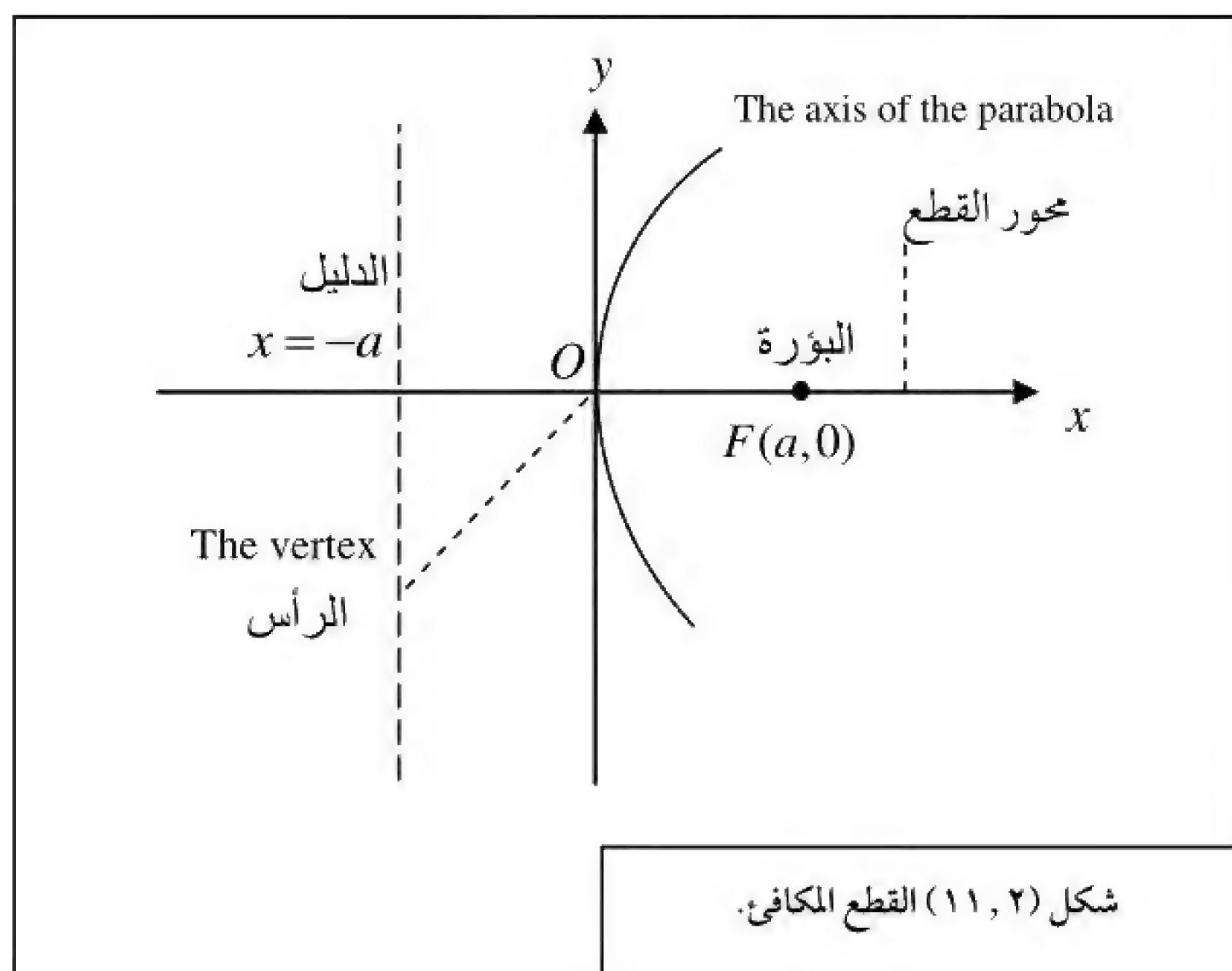
من المعادلة (١١, ٤)، نجد أن القسم الواقع في الربع الأول تمثله المعادلة:

(١١, ٥)

$$y = 2\sqrt{a}\sqrt{x}$$

وهذه دالة متصلة على الفترة: $[0, \infty)$. يقطع هذا الجزء المحور السيني عند نقطة الأصل والتي نسميها رأس القطع. يمكن الاستدلال من المشتقة الأولى والمشتقة الثانية للدالة الممثلة في المعادلة (١١, ٥) أن الدالة متزايدة على مجالها ومحدبة على الفترة $(0, \infty)$.

برسم هذا الجزء، ثم بإجراء التماثل حول المحور السيني نحصل على بيان القطع، شكل (١١, ٢). لاحظ أن المحور الصادي يمس القطع عند رأسه.



الأشكال الأخرى للقطع المكافئ

لو أعدنا الحسابات نفسها، لكن باختيار F على الجهة السالبة للمحور السيني تارة وتارة أخرى على جهتي المحور الصادي لوجدنا معادلات مشابهة لما وجدناه في المعادلة (١١, ٣). بشكل عام، المعادلة:

$$y^2 = 4ax, a > 0$$

تمثل قطعاً مكافئاً رأسه نقطة الأصل، متماثلاً بالنسبة للمحور السيني فتحتته إلى الجهة اليمنى شكل (١١, ٣) (أ).

لاحظ أن: $F = (a, 0)$ وأن معادلة الدليل هي: $x = -a$. والمعادلة:

$$y^2 = -4ax, a > 0$$

تمثل قطعاً مكافئاً رأسه نقطة الأصل، متماثلاً بالنسبة للمحور السيني فتحتته إلى الجهة اليسرى شكل (١١, ٣) (ب). لاحظ أن: $F = (-a, 0)$ وأن معادلة الدليل هي: $x = a$. والمعادلة:

$$x^2 = 4ay, a > 0$$

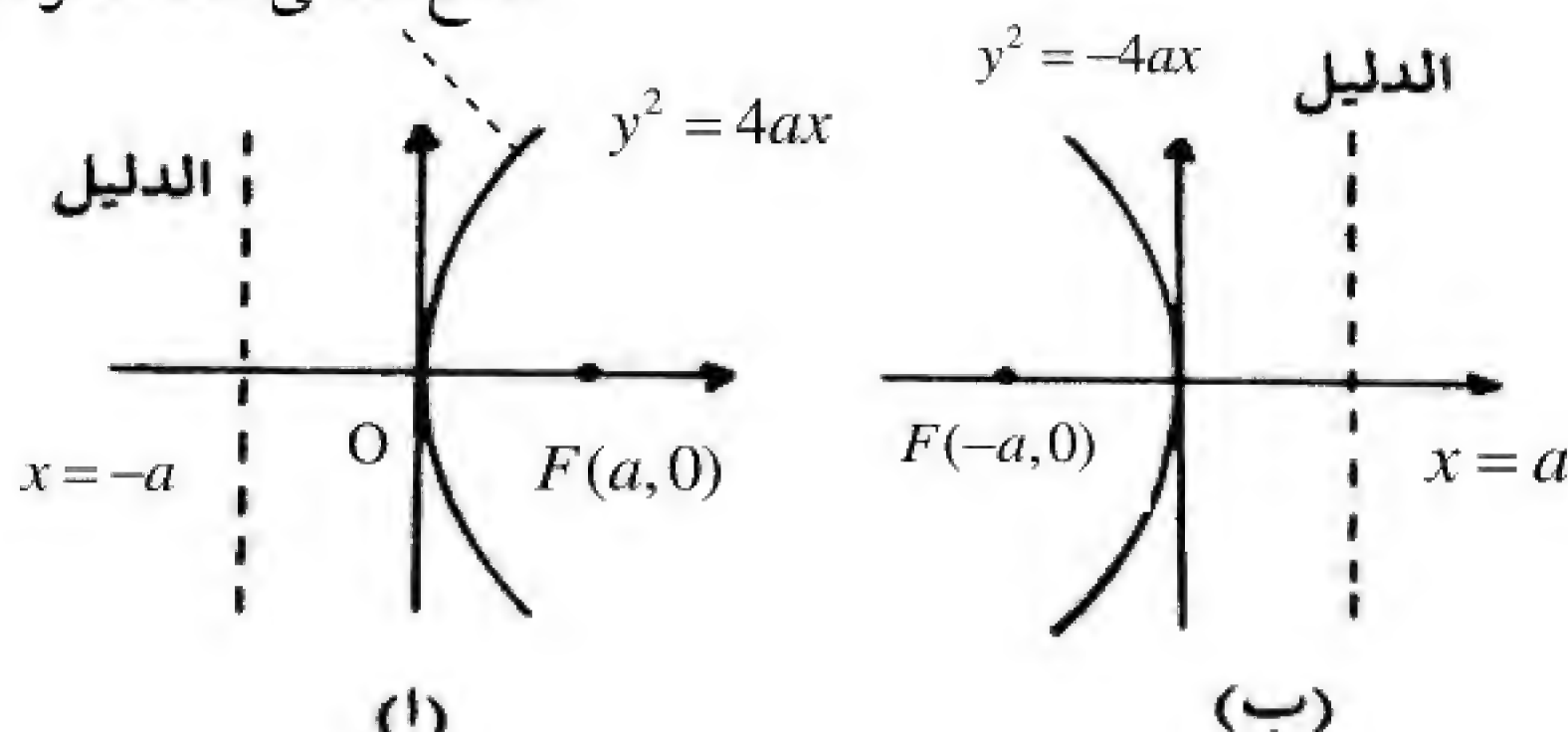
تمثل قطعاً مكافئاً رأسه نقطة الأصل، متماثلاً بالنسبة للمحور الصادي فتحتة إلى الجهة العليا شكل (١١، ٣) (ج). لاحظ أن: $F=(0, a)$ وأن معادلة الدليل هي: $y = -a$. والمعادلة:

$$x^2 = -4ay, a > 0$$

تمثل قطعاً مكافئاً رأسه نقطة الأصل، متماثلاً بالنسبة للمحور الصادي فتحتة إلى الجهة السفلى شكل (١١، ٣) (د). لاحظ أن: $F=(0, -a)$ وأن معادلة الدليل هي: $y = a$.

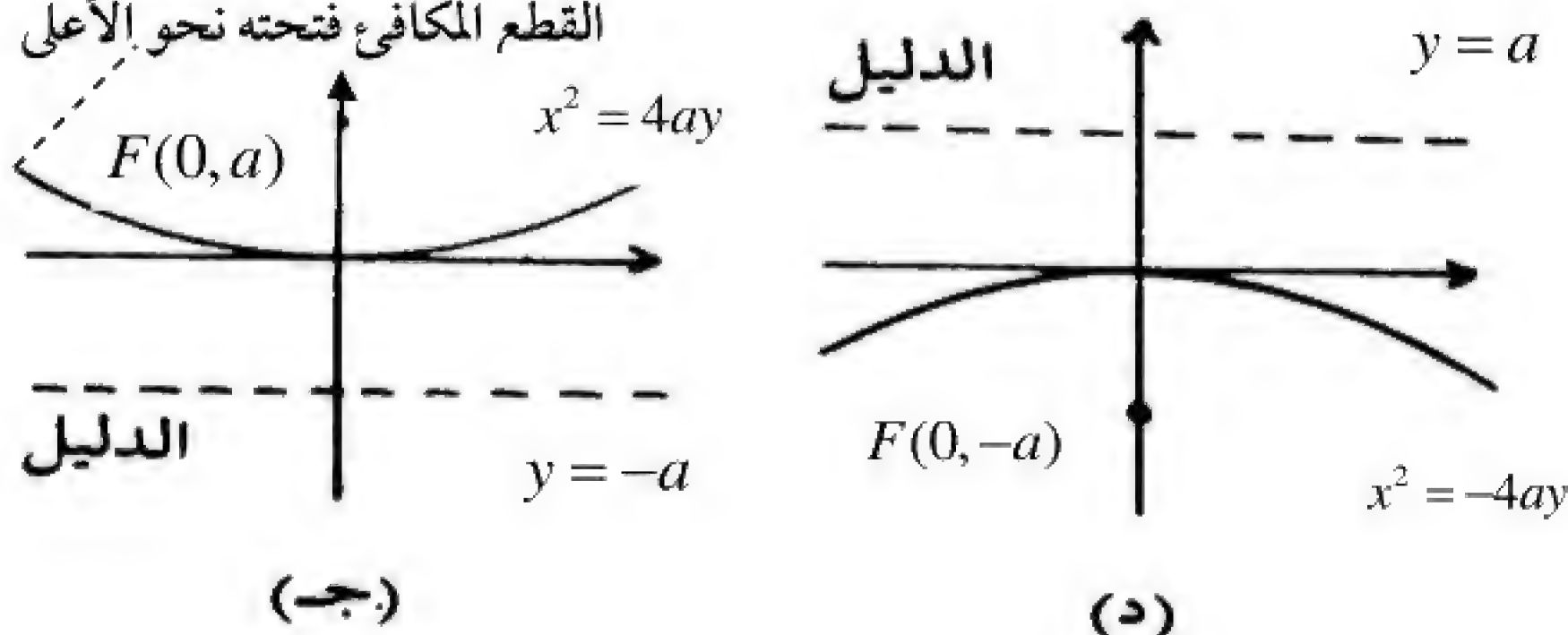
The parabola opens to the right

القطع المكافئ فتحتة نحو اليمين



The parabola opens upward

القطع المكافئ فتحتة نحو الأعلى



شكل (١١، ٣).

مثال (١١, ١)

حدد عناصر كل من القطوع التالية:

$$\begin{aligned} y^2 &= 3x \quad (٣) & y^2 &= -6x \quad (١) \\ x^2 &= -2y \quad (٤) & x^2 &= 4y \quad (٢) \end{aligned}$$

الحل

(١) القطع متماثل بالنسبة للمحور السيني، فتحتة الى الجهة اليسرى ورأسه نقطة الأصل. بؤرتة

$$\text{ودليله: } a = \frac{3}{2} \Leftarrow 4a = 6$$

$$\text{إذن: } F = (-a, 0) = \left(-\frac{3}{2}, 0\right), \text{ ومعادلة دليله: } x = a = \frac{3}{2}$$

يشبه شكل (١١, ٣) (ب).

(٢) القطع متماثل بالنسبة للمحور الصادي، فتحتة نحو الأعلى ورأسه نقطة الأصل. بؤرتة

$$\text{ودليله: } a = 1 \Leftarrow 4a = 4$$

$$\text{إذن: } F = (0, a) = (0, 1) \text{ ومعادلة دليله: } y = -a = -1$$

يشبه شكل (١١, ٣) (ج).

(٣) القطع متماثل بالنسبة للمحور السيني، فتحتة الى الجهة اليمنى ورأسه نقطة الأصل. بؤرتة

$$\text{ودليله: } a = \frac{3}{4} \Leftarrow 4a = 3$$

$$\text{إذن: } F = (a, 0) = \left(\frac{3}{4}, 0\right), \text{ ومعادلة دليله: } x = -a = -\frac{3}{4}$$

يشبه شكل (١١, ٣) (أ).

(٤) القطع متماثل بالنسبة للمحور الصادي، وفتحتة نحو الجهة السفلى ورأسه نقطة الأصل.

$$\text{بؤرتة ودليله: } a = \frac{1}{2} \Leftarrow 4a = 2$$

$$\text{إذن: } F = (0, -a) = \left(0, -\frac{1}{2}\right), \text{ ومعادلة دليله: } y = a = \frac{1}{2}$$

يشبه شكل (١١, ٣) (د).

ملحوظة (١١, ١)

إن النقطة M في المستوى يعبر عنها بالصورة:

$$M(x, y) \text{ أو } M = (x, y) \text{ يعني أن: } M = (x, y) \Leftrightarrow M(x, y) \text{ وهذا ما نستخدمه فيما يلي.}$$

(١١, ٢) القطع الناقص

The Ellipse

تعريف (١١, ٢)

القطع الناقص: هو مجموعة النقاط M في المستوي، والتي مجموع بعدي كل منها عن نقطتين ثابتتين F', F في هذا المستوي يساوي بعداً ثابتاً مقداره $2a$ ، شكل (١١, ٤).

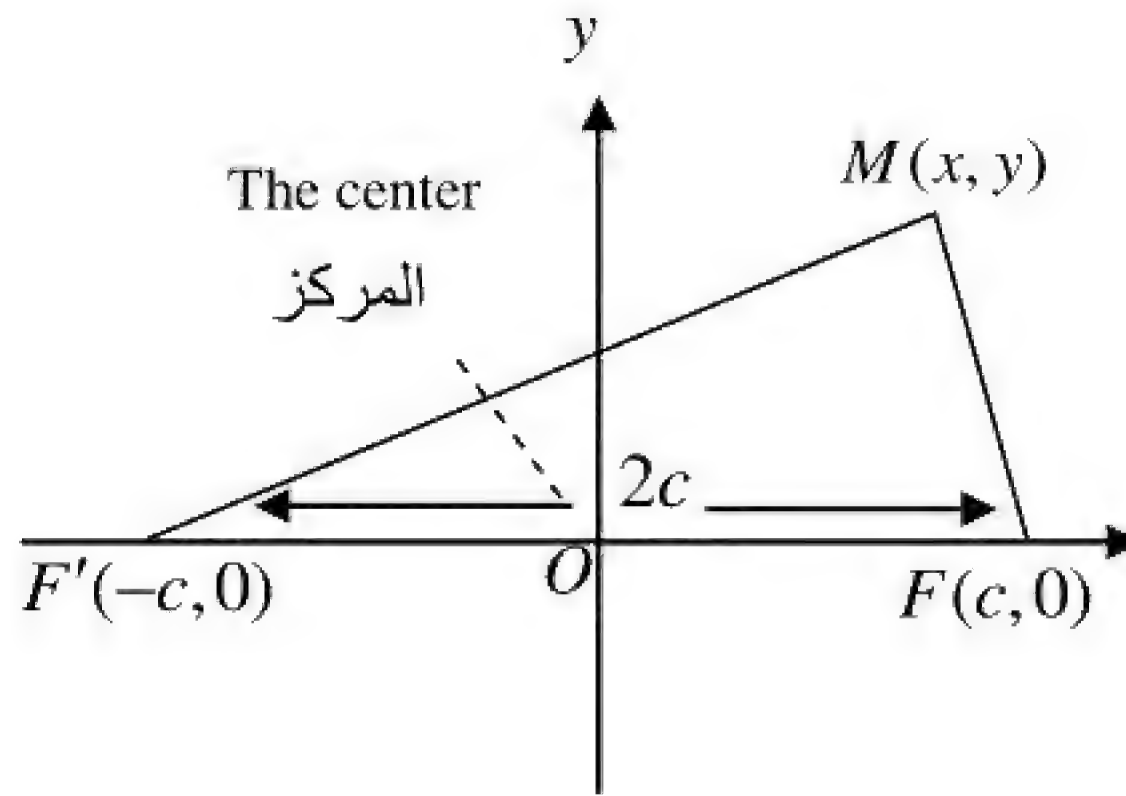
من التعريف نجد أن:

(١١, ٦)

$$|F'M| + |FM| = 2a, a > 0$$

تسمى النقطتان F', F بالبؤرتين، والمستقيم $F'F$ بالخط البؤري، وطول القطعة $[F'F]$ بالبعد

البؤري، لنرمز لهذا البعد الثابت

بالرمز $2c$ ، فنجد: $|F'F| = 2c, c > 0$ 

شكل (١١, ٤).

لنختار المحاور الإحداثية بحيث ينطبق المحور السيني على الخط البؤري، وينطبق المحور الصادي

على العمود المنصف للقطعة $[F'F]$.

لنحدد إحداثيات النقاط F', F, M كما يلي:

$$F'(-c, 0), F(c, 0), M(x, y)$$

من الملاحظ في المثلث $F'MF$ أن:

$$(11, 7) \quad |F'M| + |FM| = 2a > 2c \Leftrightarrow a > c$$

(مجموع طولي أي ضلعين في مثلث أكبر من طول الضلع الثالث).

معادلة القطع الناقص (The equation of an ellipse)

من الملاحظ في الشكل (١١, ٤) أن:

$$(11, 8) \quad \begin{cases} |F'M|^2 = (x+c)^2 + y^2 \\ |FM|^2 = (c-x)^2 + y^2 \end{cases}$$

بالطرح نجد:

$$(11, 9) \quad |F'M|^2 - |FM|^2 = 4xc$$

ومنه:

$$(11, 10) \quad (|F'M| + |FM|) (|F'M| - |FM|) = 4xc$$

وبالتعويض من (١١, ٦) في المساواة السابقة نحصل على المساواة:

$$(11, 11) \quad 2a (|F'M| - |FM|) = 4xc$$

أو:

$$(11, 12) \quad |F'M| - |FM| = \frac{2xc}{a}$$

لكن من المعادلة (١١, ٦): $|F'M| + |FM| = 2a$

بجمع المعادلتين السابقتين وطرحهما والتقسيم على 2 نحصل على المعادلتين:

$$(11, 13) \quad \begin{cases} |F'M| = a + \frac{cx}{a} \\ |FM| = a - \frac{c}{a}x \end{cases}$$

من المعادلة (١١, ٨) و (١١, ١٣)، نجد أن:

$$(11, 14) \quad \left(a + \frac{cx}{a}\right)^2 = (x+c)^2 + y^2$$

وبالفك والاختصار نحصل على المساواة:

$$(11, 15) \quad x^2(a^2 - c^2) + a^2 y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

وبالتقسيم على $a^2(a^2 - c^2)$ نحصل على المساواة:

$$(11, 16) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

وحسب (11, 7)، فإن: $a^2 - c^2 > 0$

وهذا يسمح لنا أن نضع:

$$(11, 17) \quad a^2 - c^2 = b^2 \Leftrightarrow a^2 - b^2 = c^2, \quad a > b > 0$$

ومنه نستطيع إيجاد c إذا علمنا a, b . أو إيجاد b إذا علمنا a, c .

بالتعويض من (11, 17) في المعادلة (11, 16)، نحصل على المساواة:

$$(11, 18) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

لاحظ في الشكل القياسي السابق للقطع أن $a > b$ ، وأن البؤرتين تقعان على المحور السيني.

بيان القطع الناقص (المنحني البياني)

التمثيل

يتضح من المعادلة (11, 18) أن القطع متمثل بالنسبة للمحور السيني والصادي. بالتالي هو متمثل بالنسبة لنقطة الأصل. إذن، يكفي رسم الجزء الواقع في الربع الأول ثم بإجراء التماثلات المطلوبة نحصل على القطع بأكمله.

المجال والمدى: من المعادلة (11, 18) نستنتج أن:

$$(11, 19) \quad y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

فمجال القطع هو الفترة: $[-a, a]$

وبحساب x بدلالة y نجد أن مداه هو: $[-b, b]$

التناقص والتحدب

من المعادلة (11, 19)، نجد أن القسم الواقع في الربع الأول يمثل بالمعادلة:

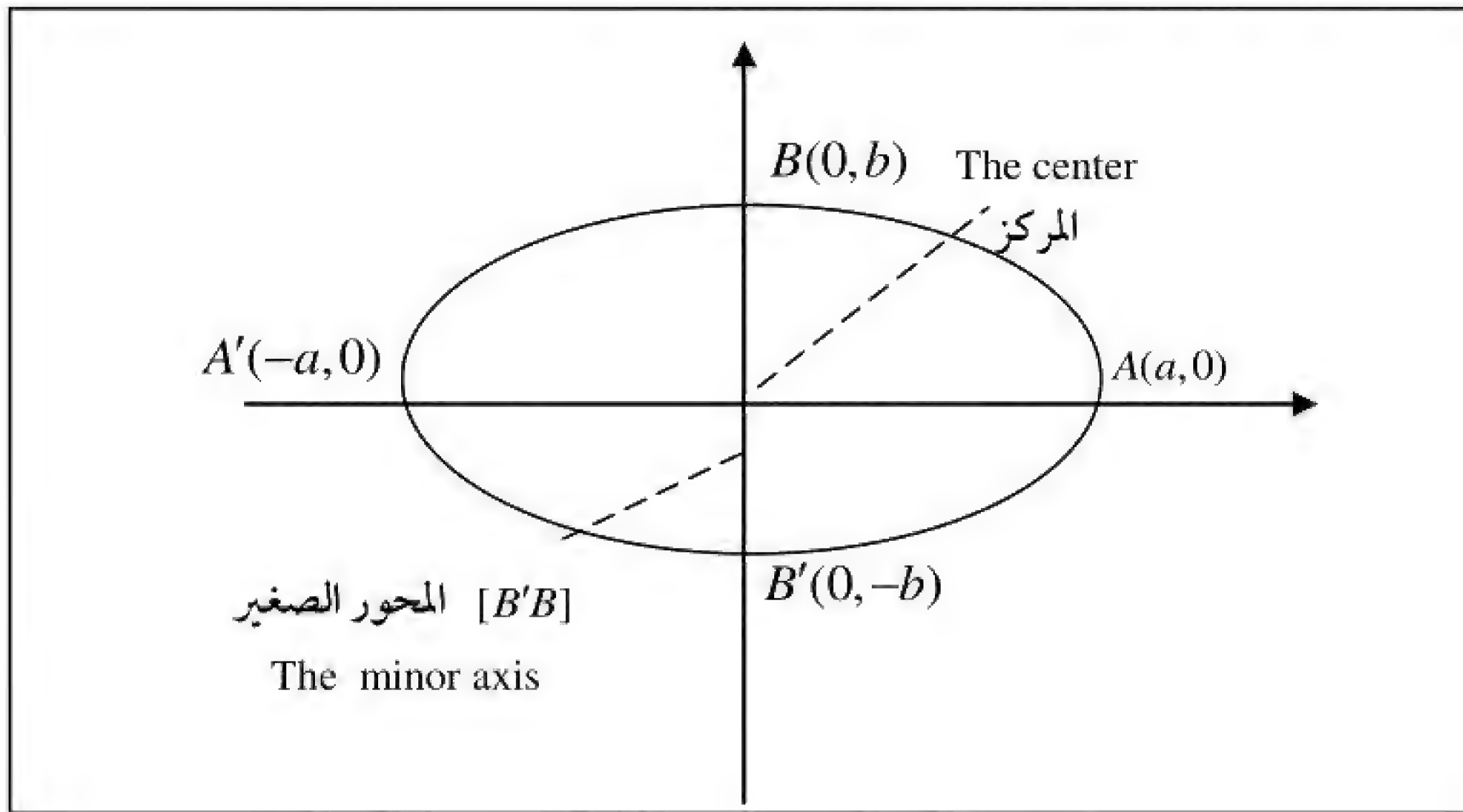
$$(11, 20) \quad y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad a \geq x \geq 0$$

وهذه دالة متصلة على الفترة: $[0, a]$

يقطع هذا الجزء المحورين الإحداثيين عند النقطتين:

$$A = (a, 0), B = (0, b)$$

يمكن الاستدلال من المشتقة الأولى للدالة الممثلة في (١١, ٢٠) أنها متناقصة على مجالها. كما يمكن الاستدلال من المشتقة الثانية أن الدالة محدبة على الفترة $(0, a)$. برسم هذا الجزء ثم بإجراء التماثلات الممكنة نحصل على بيان القطع شكل (١١, ٥).



شكل (١١, ٥). القطع الناقص.

لاحظ أن القطع يمس المستقيمات الأربعة:

$$x=a, x=-a, y=b, y=-b, \text{ وأن } x=a \text{ مستقيم مماس عمودي (Vertical tangent line)}$$

للقطع، بالمثل $x = -a$.

نسمي النقطتين A, A' برؤسي القطع (Vertices)، كما نسمي القطعة $[A'A]$ بالمحور الكبير (The major axis) للقطع. لاحظ أن البؤرتين تقعان دوماً على المحور الكبير للقطع الناقص. الأشكال الأخرى للقطع الناقص

لو أعدنا الحسابات نفسها لكن باختيار F', F على المحور الصادي لوجدنا المعادلة:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, b > a$$

بشكل عام، المعادلة: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

تمثل قطعاً ناقصاً بؤرتاه على المحور السيني إذا كان $a > b$ ، وتتعين c بالمعادلة: $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ [شكل (١١, ٦) مثال (١١, ٢)].

تمثل قطعاً ناقصاً بؤرتاه على المحور الصادي إذا كان $a < b$ ، وتتعين c بالمعادلة: $c = \sqrt{b^2 - a^2}$ [شكل (١١, ٧) مثال (١١, ٣)].

مثال (١١, ٢)

ارسم القطع الناقص: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ محددًا جميع عناصره.

الحل

من الملاحظ أن: $a^2 = 25 \Leftrightarrow a = 5$

$$b^2 = 16 \Leftrightarrow b = 4$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 9 \Leftrightarrow c = 3$$

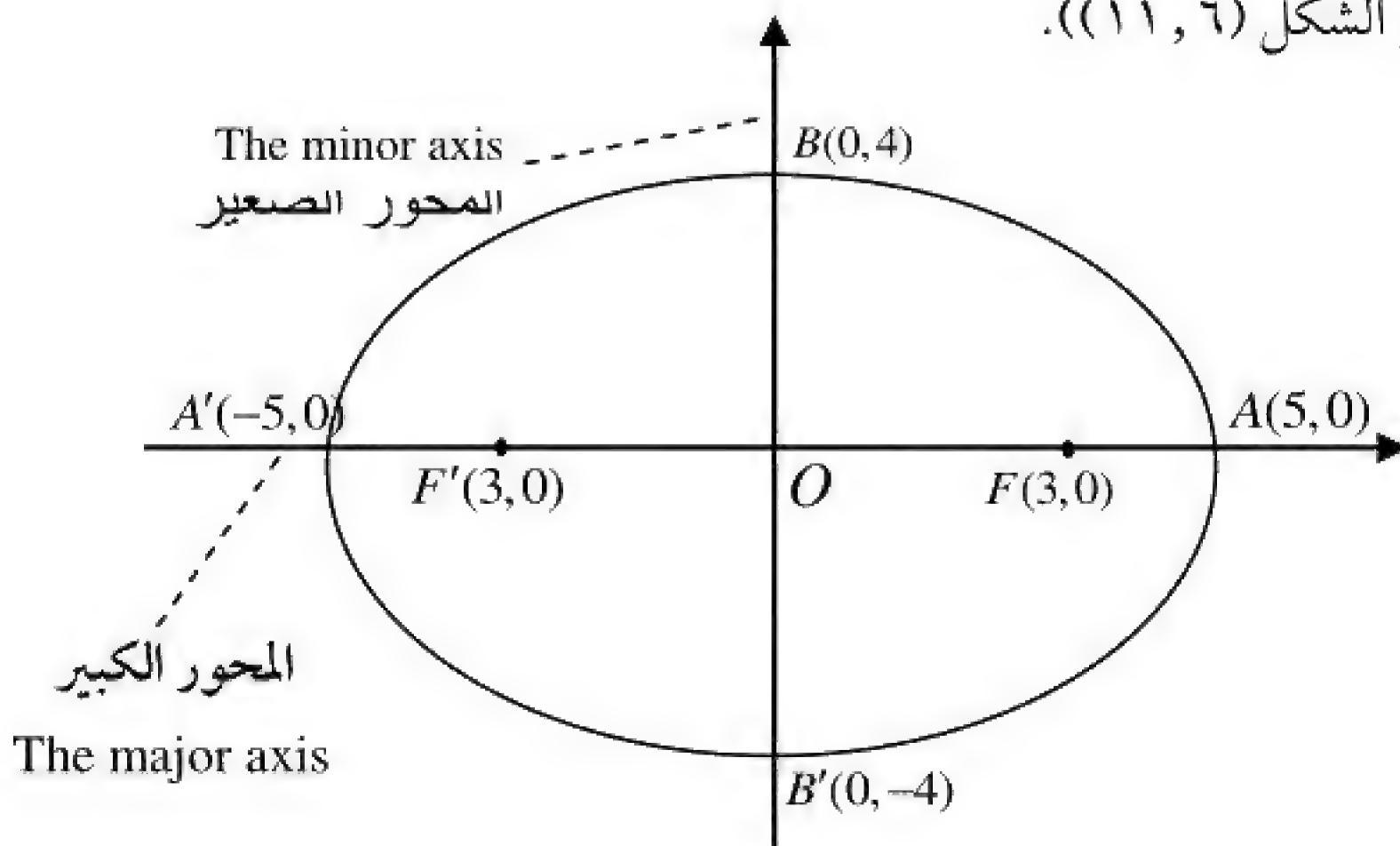
لاحظ أن البؤرتين تقعان على المحور السيني: $a > b$.

بؤرتا القطع: $F' = (-3, 0)$, $F = (3, 0)$

رأسا القطع: $A' = (-5, 0)$, $A = (5, 0)$

نقطتا التقاطع مع المحور الصادي: $B' = (0, -4)$, $B = (0, 4)$

(انظر الشكل (١١, ٦)).



شكل (١١, ٦).

مثال (٣, ٣)

ارسم القطع الناقص: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ محددًا جميع عناصره.
من الملاحظ أن: $a^2 = 9 \Leftrightarrow a = 3$

$$b^2 = 25 \Leftrightarrow b = 5$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 16 \Leftrightarrow c = 4$$

لاحظ أن $a < b$ ، وأن البؤرتين تقعان على المحور الصادي.

بؤرتا القطع (the foci): $F' = (0, -4)$, $F = (0, 4)$

طرفا المحور الكبير (رأسا القطع):

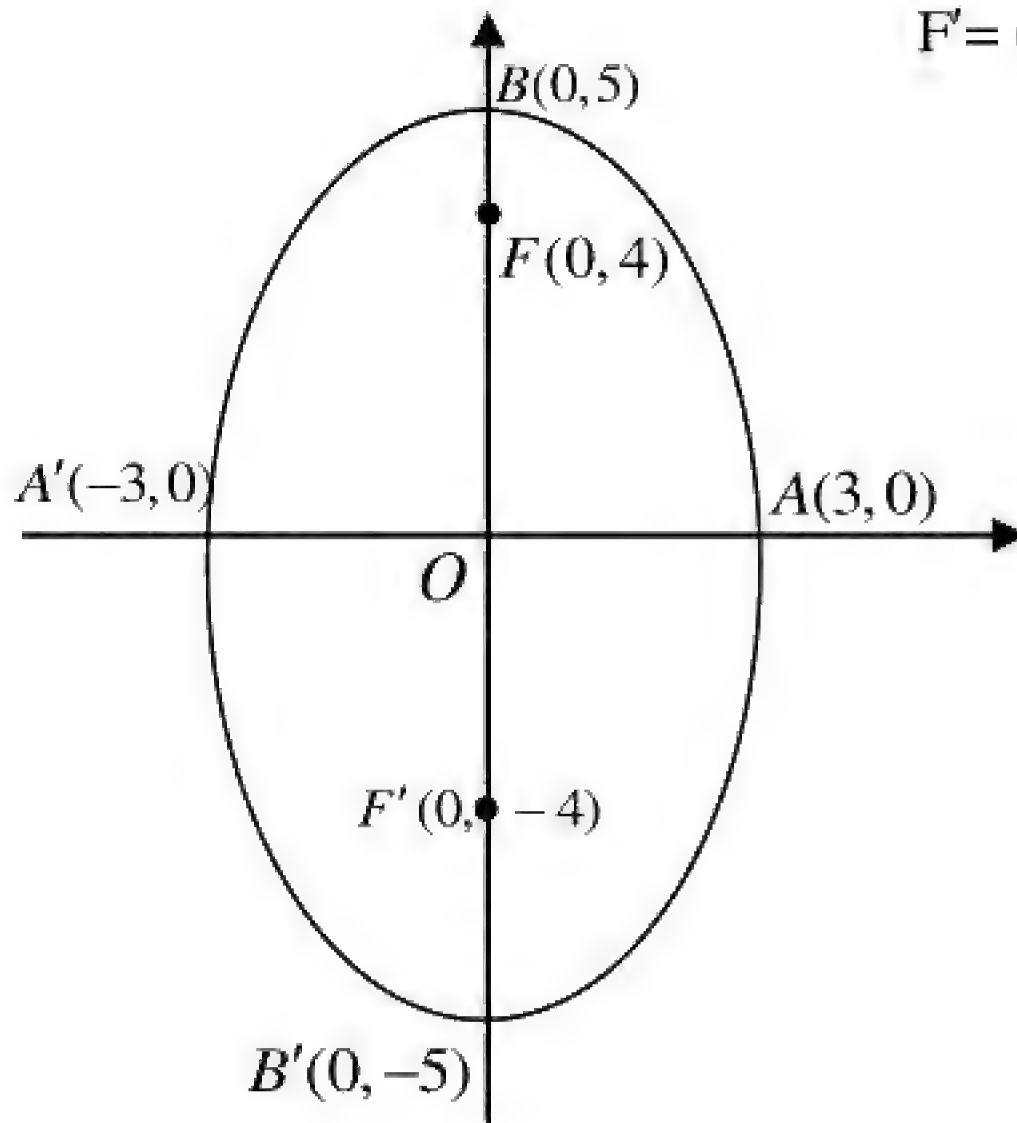
$$B' = (0, -5), B = (0, 5)$$

طرفا المحور الصغير

: (the endpoints of the minor axis)

$$A' = (-3, 0), A = (3, 0)$$

(انظر الشكل (١١, ٧)).



شكل (١١, ٧).

(١١, ٣) القطع الزائد

The Hyperbola

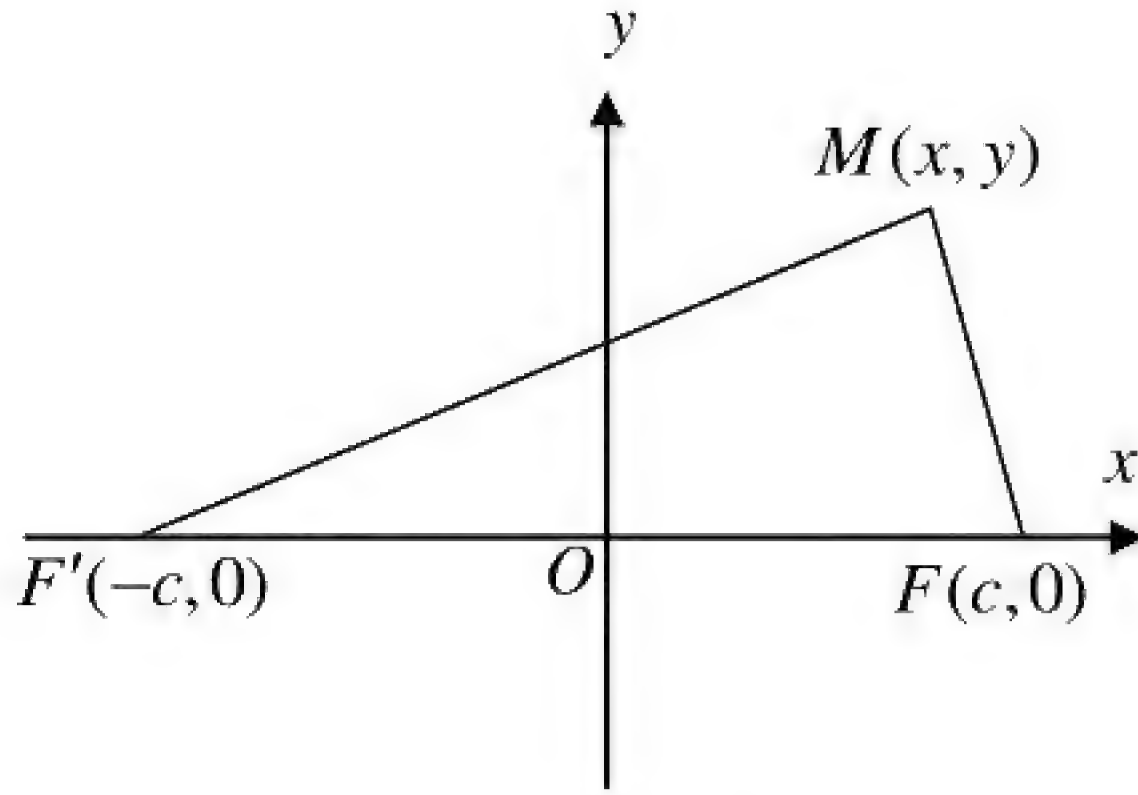
تعريف (١١, ٣)

القطع الزائد: هو مجموعة النقاط M في المستوي، والتي الفرق بين بعدي كل منها عن نقطتين ثابتتين F', F في هذا المستوي يساوي بعدًا ثابتًا مقداره $2a$ ، انظر الشكل (١١, ٨).

من التعريف نجد أن:

(١١, ٢١)

$$\|F'M\| - \|FM\| = 2a \Leftrightarrow |F'M| - |FM| = \pm 2a, a > 0$$



شكل (١١, ٨).

هذا الفرق موجب من أجل نقاط
القطع المحققة للشرط $x > 0$ ،
سالب من أجل النقاط المحققة
للشرط $x < 0$
انظر الشكل (١١, ٨).

لاحظ في المثلث $F'MF$ أن:

$$(١١, ٢٢) \quad |F'M| - |FM| = 2a < 2c \Leftrightarrow a < c$$

(القيمة المطلقة للفرق بين طولي أي ضلعين في مثلث أصغر من طول الضلع الثالث).

معادلة القطع الزائد (the equation of the hyperbola)

بالأسلوب نفسه المتبع في القطع الناقص نحصل على المعادلة:

$$(١١, ٢٣) \quad (|F'M| + |FM|) (|F'M| - |FM|) = 4xc$$

وبالتعويض من (١١, ٢١) نجد:

$$(١١, ٢٤) \quad \pm 2a(|F'M| + |FM|) = 4xc$$

أو:

$$(١١, ٢٥) \quad |F'M| + |FM| = \pm \frac{2xc}{a}$$

لكن من المعادلة (١١, ٢١): $|F'M| - |FM| = \pm 2a$

بجمع المعادلتين (١١, ٢١)، (١١, ٢٥) والتقسيم على 2 نحصل على المساواة:

$$(١١, ٢٦) \quad |F'M| = \pm \left(a + \frac{cx}{a}\right)$$

وبالتعويض عن قيمة $|F'M|$ من المعادلة (١١, ٨) نجد:

$$(a + \frac{cx}{a})^2 = (x+c)^2 + y^2$$

ومنها نجد حسبها سبق ذكره في القطع الناقص:

$$(11, 27) \quad \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1}$$

ومن المعادلة (١١, ٢٢)، فإن: $a^2 - c^2 < 0$

وهذا يسمح لنا أن نضع:

$$(11, 28) \quad \boxed{a^2 - c^2 = -b^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2}$$

ومنه نستطيع إيجاد c إذا علمنا a, b ، أو b إذا علمنا a, c .

بالاستفادة من (١١, ٢٨) فإن المعادلة (١١, ٢٧) تصبح على الشكل:

$$(11, 29) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

لاحظ أن البؤرتين (the foci) تقعان على المحور السيني.

بيان القطع الزائد (المنحني البياني)

التمثيل

يتضح من المعادلة (١١, ٢٩) أن القطع متمائل بالنسبة للمحور السيني والصادي أيضا، وبالتالي فهو متمائل بالنسبة لنقطة الأصل. إذن، يكفي رسم الجزء الواقع في الربع الأول ثم بإجراء التماثلات المطلوبة نحصل على القطع بأكمله.

المجال والمدى: من المعادلة (١١, ٢٩) نستنتج أن:

$$(11, 30) \quad y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

فمجال القطع هو الفترة: $\mathbb{R} - (-a, a)$

وبحساب x بدلالة y نجد أن مداه هو: \mathbb{R}

التزايد والتحدب

من المعادلة (١١, ٣٠)، نجد أن معادلة جزء القطع الواقع في الربع الأول هي:

$$(11, 31) \quad y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}, x \geq a$$

وهذه دالة متصلة على الفترة: $[a, \infty)$.

يقطع هذا الجزء المحور السيني في النقطة $A=(a,0)$ يمكن الاستدلال من المشتقة الأولى والثانية على أن الدالة الممثلة في $(١١, ٣١)$ متزايدة على مجالها. ومحدبة على الفترة (a, ∞) .

المستقيبات المقاربة للقطع

يقبل القطع الممثل في المعادلة $(١١, ٢٩)$ المستقيمين المقاربين:

$$(the asymptotes) \quad y = \pm \frac{b}{a} x$$

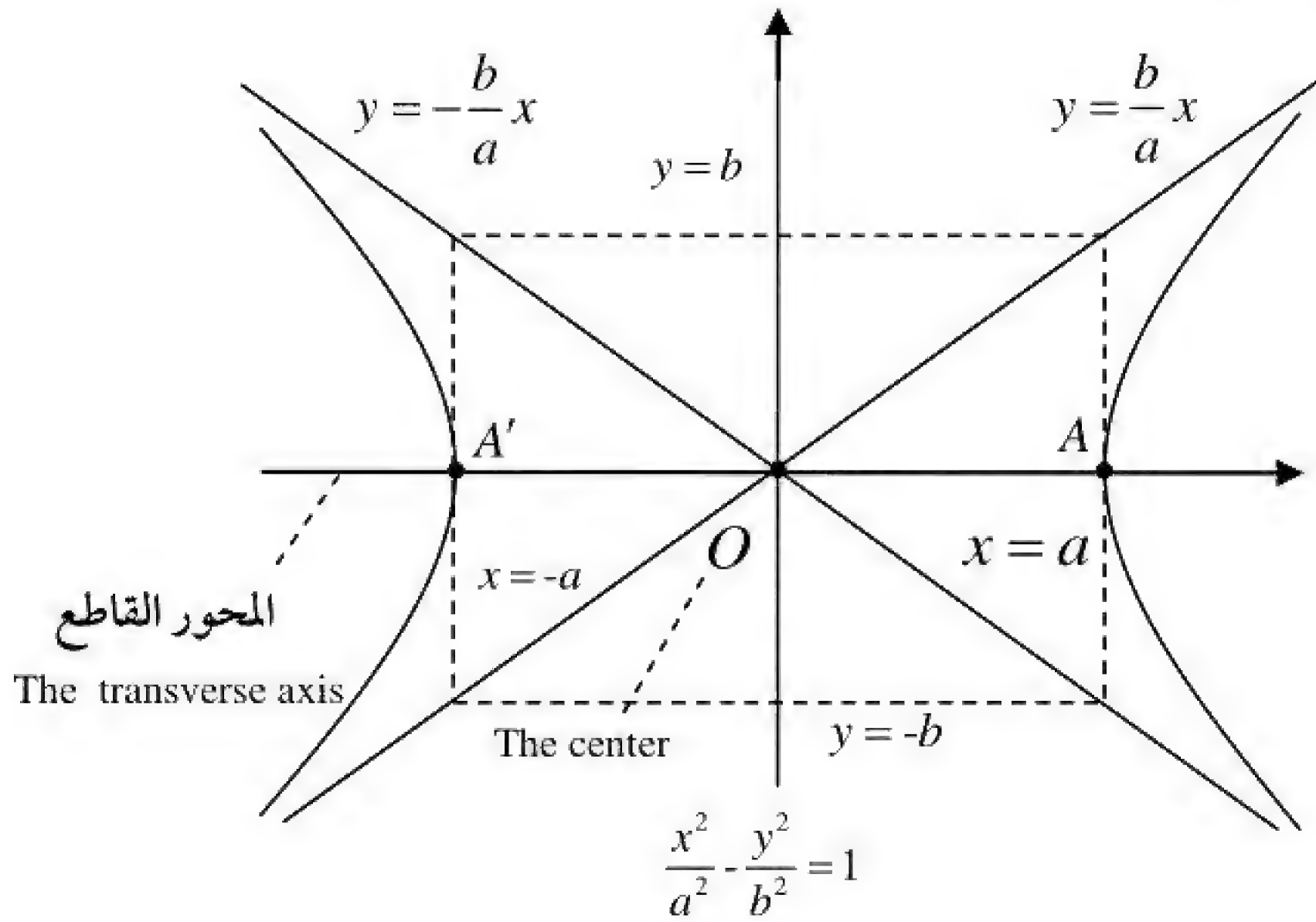
رسم القطع

نرسم المستقيمين المقاربين، وذلك برسم المستطيل المحدد بالمستقيبات:

$$y = -b, y = b, x = -a, x = a$$

ثم نرسم قطري المستطيل مع ملاحظة أن استقامتي المستقيمين المقاربين هي استقامتا قطري المستطيل نفسيهما.

نرسم بعد ذلك جزء القطع الواقع في الربع الأول، ثم نجري التماثلات المطلوبة فنحصل على القطع، شكل $(١١, ٩)$.



شكل $(١١, ٩)$. القطع الزائد.

لاحظ أن القطع يمس المستقيمين $x = a$, $x = -a$ عند النقطتين A', A . نسمي هاتين النقطتين برأسي القطع. لاحظ أيضا أن القطع لا يقطع المحور الصادي مطلقا.

الأشكال الأخرى للقطع الزائد

لو أعدنا الحسابات نفسها ولكن باختيار F', F على المحور الصادي لوجدنا المعادلة:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

ولحصلنا على المستقيمين المقاربين: $y = \pm \frac{b}{a}x$

بشكل عام، المعادلة:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$$

تمثل قطعاً زائداً بؤرتاه على المحور السيني إذا أخذنا الإشارة الموجبة للطرف الأيمن، شكل (٩، ١١).

تمثل قطعاً زائداً بؤرتاه على المحور الصادي إذا أخذنا الإشارة السالبة للطرف الأيمن، شكل (١٠، ١١) مثال (٤، ١١).

وتتعين c في كلتا الحالتين بالمعادلة: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

مثال (٤، ١١)

ارسم القطع الزائد: $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$ محددا جميع عناصره.

الحل

من الملاحظ أن معادلة القطع تكتب على الشكل:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1$$

وهذا يدل على أن بؤرتي القطع تقعان على المحور الصادي.

من جهة أخرى:

$$a^2 = 9 \Leftrightarrow a = 3$$

$$b^2 = 16 \Leftrightarrow b = 4$$

$$c^2 = 16 + 9 \Leftrightarrow c = 5$$

لاحظ أن نقطتي تقاطع القطع مع المحور الصادي (رأسا القطع) هما:

$$B' = (0, -4), B = (0, 4)$$

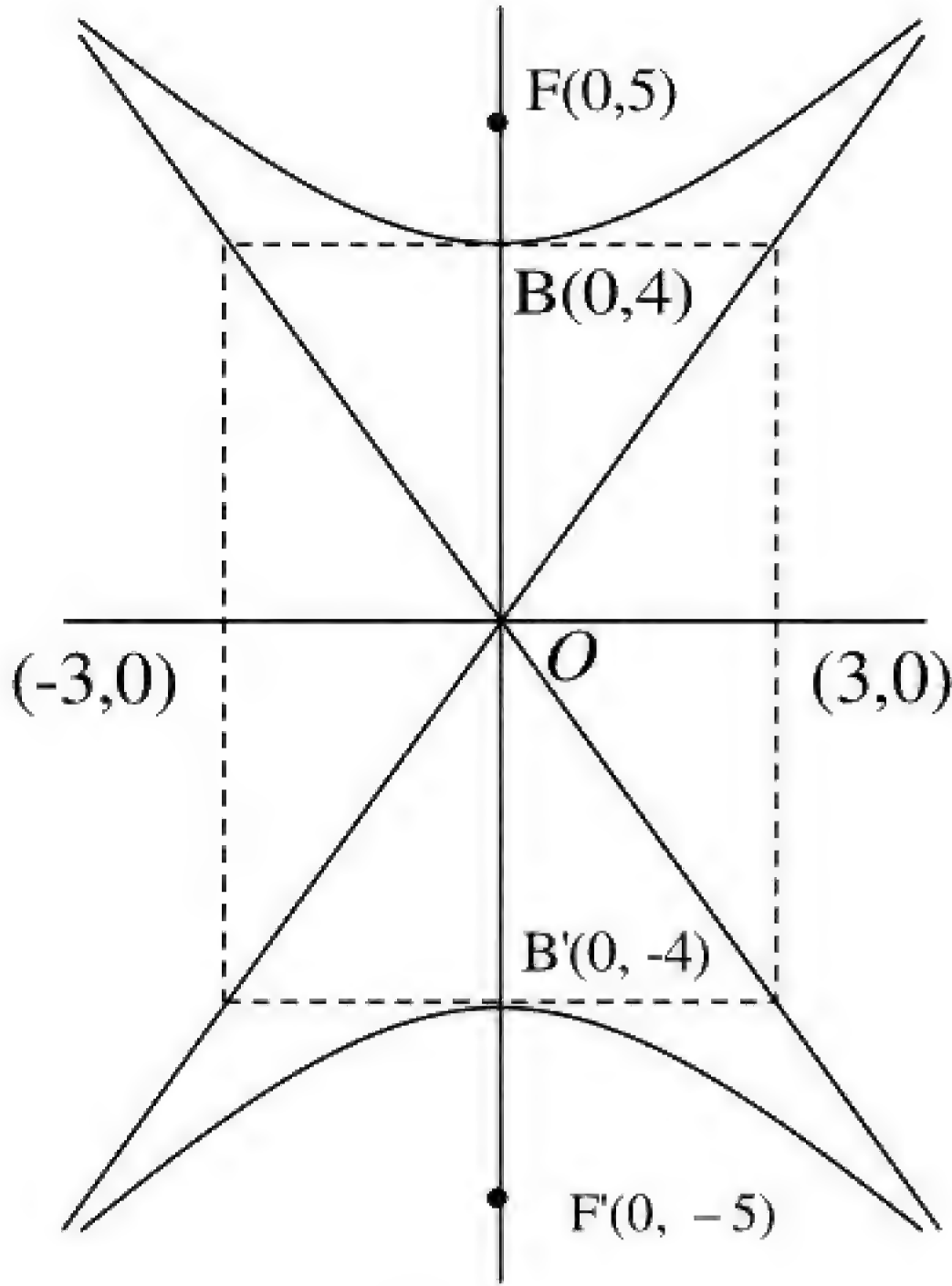
وأن القطع لا يقطع المحور السيني، وهذا يدل أيضا على أن البؤرتين تقعان على المحور الصادي وتكون بؤرتا القطع:

$$F' = (0, -5), F = (0, 5)$$

المستقيمان المقاربان: لنستبدل في معادلة

القطع وفي طرفها الثاني الواحد بالصفر

$$\text{ف نجد: } \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 0$$



شكل (١٠, ١١).

ومنه نجد:

معادلتا المستقيمين المقاربين.

$$y = \pm \frac{4}{3}x$$

بالتالي يظهر في الشكل (١٠, ١١) بيان هذا القطع.

مثال (١١, ٥)

ارسم القطع الزائد: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ محددًا جميع عناصره.

الحل

من الملاحظ أن:

$$a = 4 \Leftrightarrow a^2 = 16$$

$$b = 3 \Leftrightarrow b^2 = 9$$

$$c = 5 \Leftrightarrow c^2 = 16 + 9$$

لاحظ أن نقطتي تقاطع القطع مع المحور السيني (رأسا القطع)

(the vertices) هما: $A' = (-4, 0)$, $A = (4, 0)$

وأن القطع لا يقطع المحور الصادي، وهذا يدل على أن البؤرتين تقعان على المحور السيني.

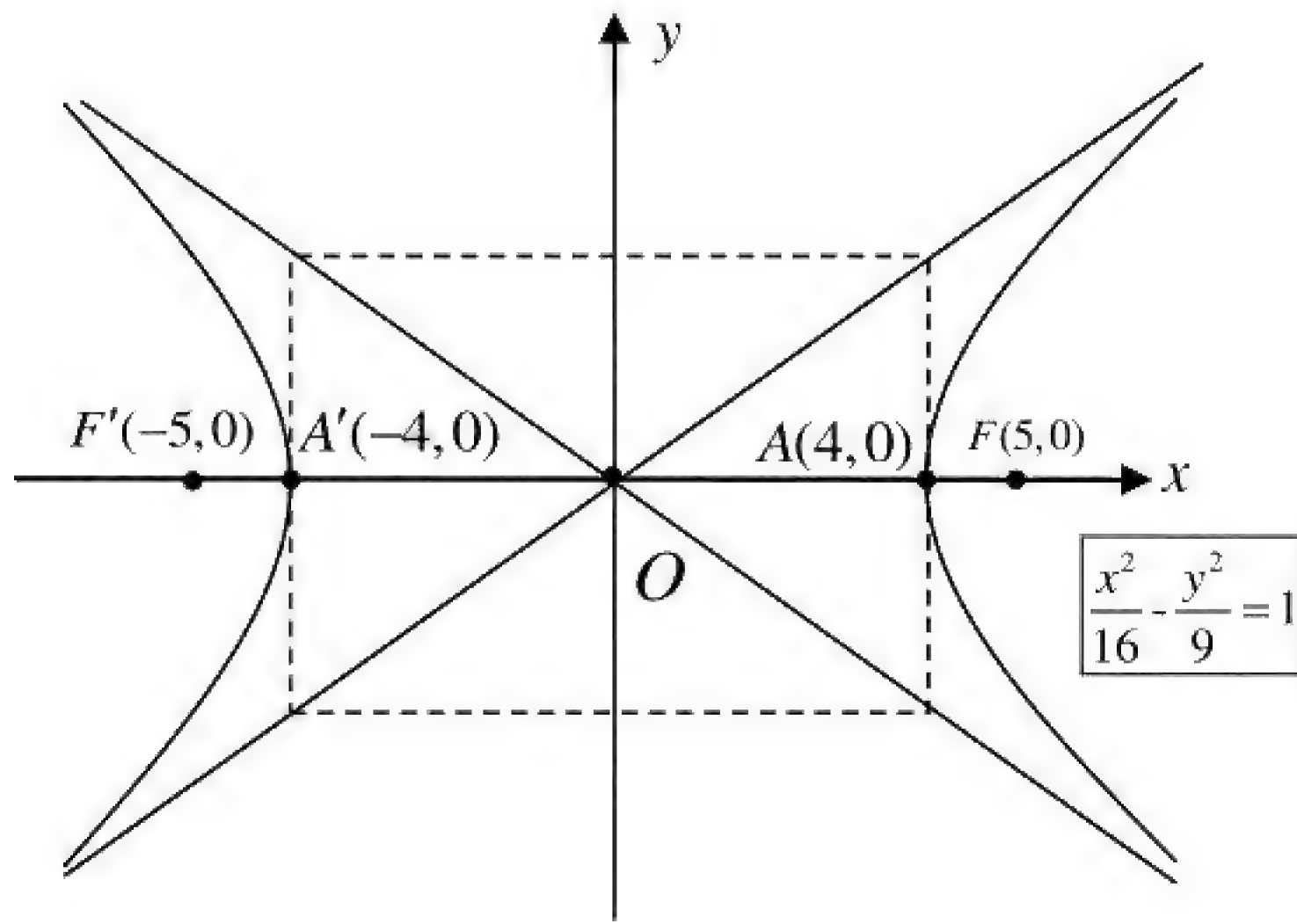
بؤرتا القطع (the foci): $F' = (-5, 0)$, $F = (5, 0)$

$$\text{المستقيمان المقاربان: } y = \pm \frac{3}{4}x \Leftrightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 0$$

لاحظ أنه يمكن إيجاد معادلتَي المستقيمين المقاربين باستبدال في معادلة القطع وفي طرفها

الثاني الواحد بالصفر. وبالتالي يظهر في الشكل

(١١، ١١) بيان هذا القطع.



شكل (١١، ١١).

تمارين (١, ١١)

في التمارين التالية، أوجد عناصر القطوع (البؤر، الرؤوس، الأدلة، الخطوط المقاربة) ثم ارسم منحنياتها البيانية:

$$x^2 = 4y \quad (١) \quad 9x^2 + 25y^2 = 225 \quad (٥)$$

$$y^2 = 6x \quad (٢) \quad 16x^2 + 9y^2 = 144 \quad (٦)$$

$$x^2 = -8y \quad (٣) \quad \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1 \quad (٧)$$

$$y^2 = -6x \quad (٤) \quad \frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{64} = 1 \quad (٨)$$

في التمارين التالية، أوجد معادلات القطوع المخروطية، والتي رؤوسها نقطة الأصل إن كانت مكافئة، ومراكزها نقطة الأصل إن كانت ناقصة أو زائدة، وذلك ضمن الشروط المبينة:

$$(٩) \quad \text{قطع مكافئ بؤرتاه } F(0,4)$$

$$(١٠) \quad \text{قطع مكافئ بؤرتاه } F(-5,0)$$

$$(١١) \quad \text{قطع مكافئ بؤرتاه } F(0,-3)$$

$$(١٢) \quad \text{قطع مكافئ بؤرتاه } F(6,0)$$

$$(١٣) \quad \text{قطع مكافئ معادلة دليله } x = 5$$

$$(١٤) \quad \text{قطع مكافئ معادلة دليله } y = -2$$

$$(١٥) \quad \text{قطع ناقص بؤرتاه } F_1(4,0), F_2(-4,0) \text{ ورأساه } V_1(5,0), V_2(-5,0)$$

$$(١٦) \quad \text{قطع ناقص محوره منطبقان على المحورين الإحداثيين، ويمر بالنقطتين (1,3)، (2,4).}$$

$$(١٧) \quad \text{قطع ناقص بؤرتاه } F_1(4,0), F_2(-4,0) \text{ ويمر بالنقطة } (3, \frac{12}{5})$$

$$(١٨) \quad \text{قطع ناقص محوره الأساسي المحور } x \text{ (المحور الذي تقع عليه البؤرتان) وطوله 10 وطول محوره الآخر 6.}$$

$$(١٩) \quad \text{قطع زائد بؤرتاه } F_1(-4,0), F_2(4,0) \text{ ويمر بالنقطة (14,24).}$$

$$(٢٠) \quad \text{قطع زائد بؤرتاه } F_1(4,0), F_2(0,-4) \text{ وأحد مستقيميهِ المقاربتين } x=3y.$$

$$(٢١) \quad \text{قطع زائد محوره القاطع المحور } x \text{ ويمر بالنقطتين (2,1)، (4,3).}$$

(١١, ٤) الأشكال المختلفة

للقطوع المخروطية في حالتها الإنسحابية

أولاً: القطع المكافئ

لنسحب محوري الإحداثيات x و y بحيث يبقيان موازيين لنفسيهما إلى النقطة $O'(h, K)$.

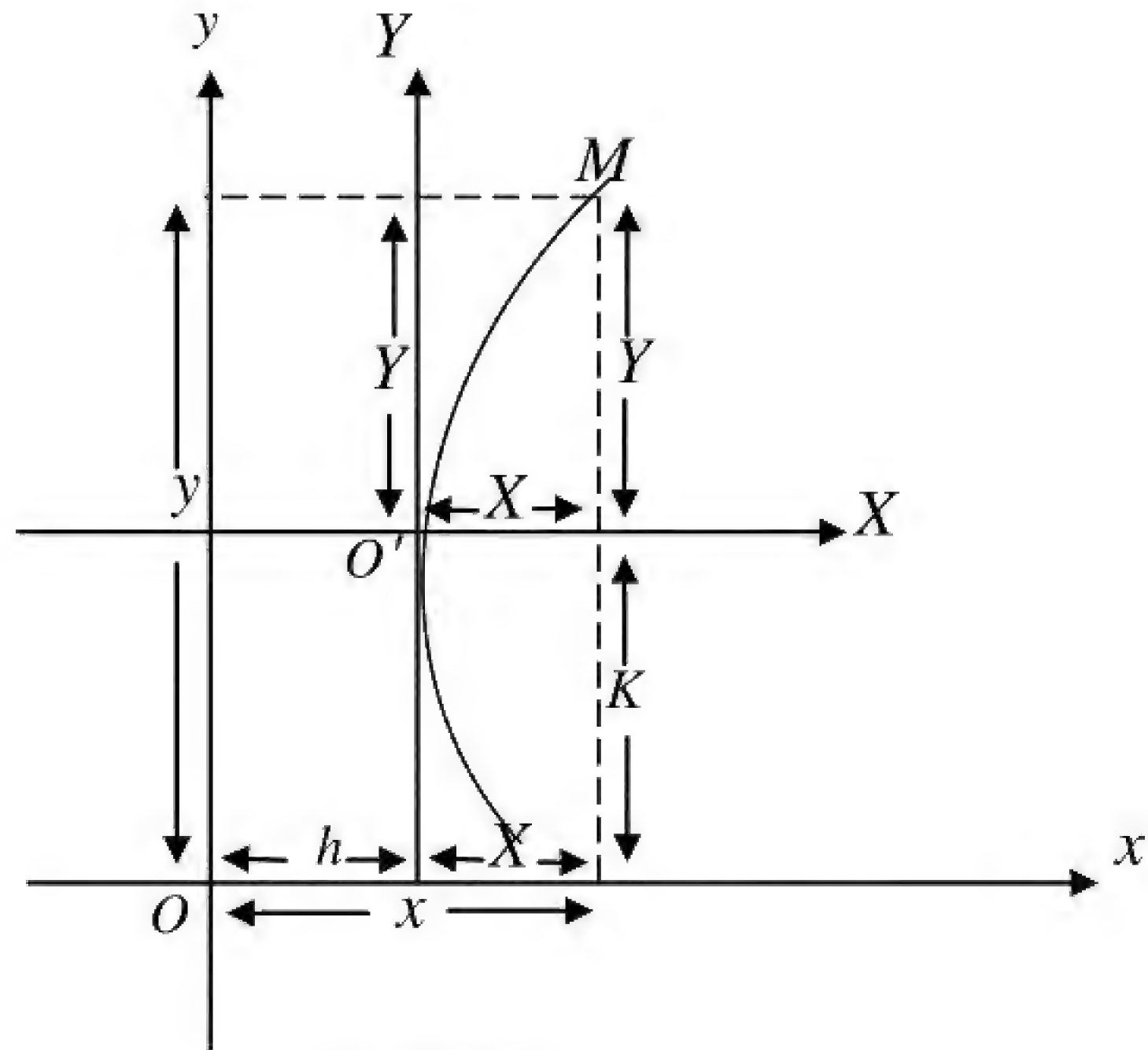
من الشكل (١١, ١٢) نجد أن العلاقة بين إحداثيي نقطة M بالنسبة للمجموعة الإحداثية الجديدة وبين (x, y) إحداثيي النقطة نفسها بالنسبة للمجموعة الإحداثية الأصلية هي:

$$\begin{cases} x = h + X \\ y = K + Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = x - h \\ Y = y - K \end{cases}$$

القطع المكافئ: $Y^2 = 4aX, a > 0$ (١١, ٣٢)

الذي رأسه O' والمتماثل بالنسبة للمحور X تصبح معادلته بعد التعويض عن X, Y بما يساويهما في (١١, ٣٢)، على الشكل:

$$(y-K)^2 = 4a(x-h), a > 0$$



شكل (١١, ١٢).

نعلم أن إحداثيي البؤرة ومعادلة الدليل للقطع بالنسبة للمحورين X و Y ، هي على الصورة:

$$X = -a, F(a, 0)$$

وتصبح بالنسبة للمحورين X و Y ، على الشكل:

$$x = -a + h, F(a + h, K)$$

مثال (١١, ٦)

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $(2, 4)$ ودليله المستقيم $x = -1$

الحل

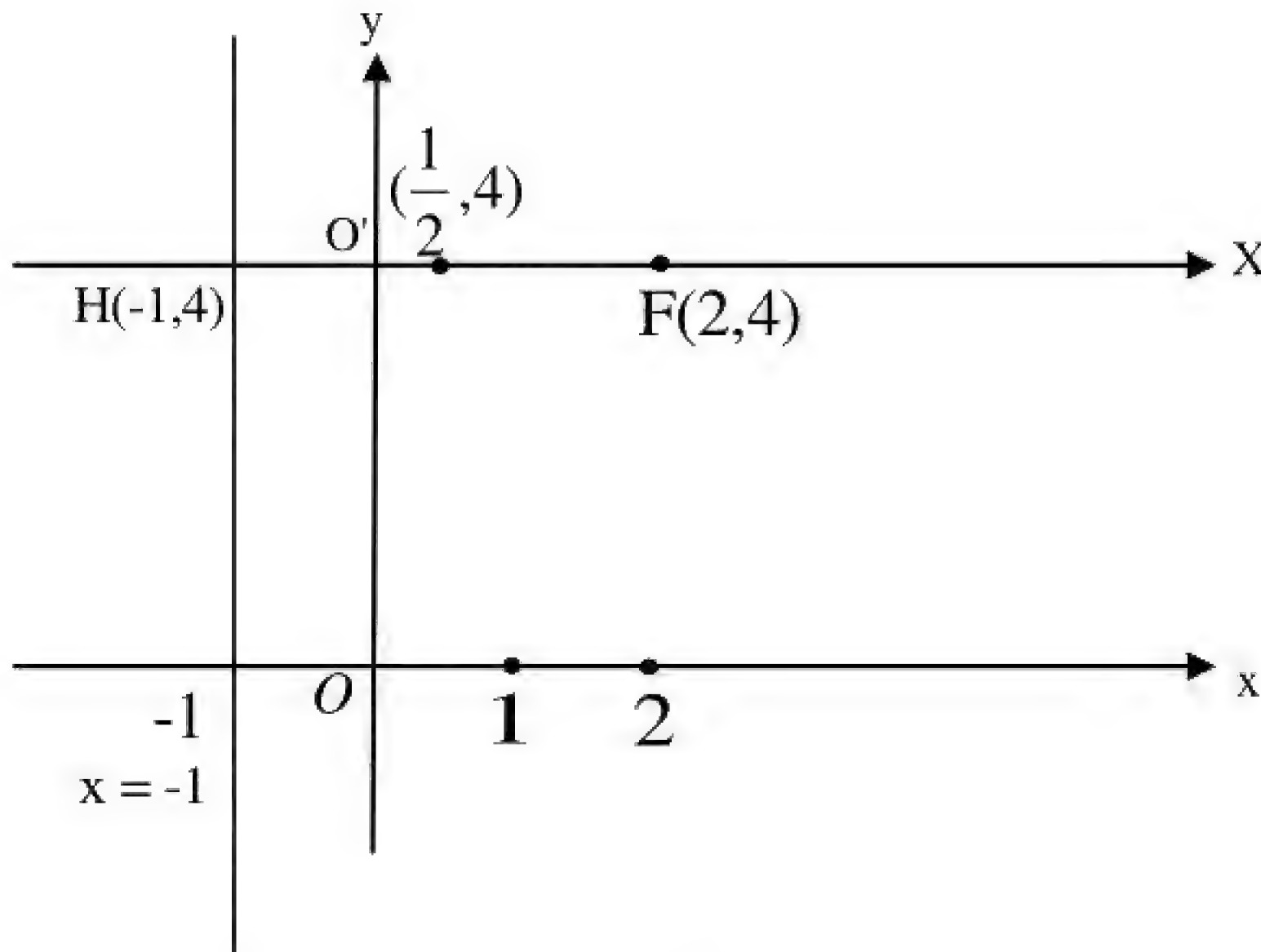
من الملاحظ أن النقطة $H(-1, 4)$ تحدد مسقط F على الدليل، وحيث إن O' منتصف القطعة $[HF]$ هو رأس القطع فإن:

$$(h, K) = \frac{(-1, 4) + (2, 4)}{2} = \left(\frac{1}{2}, 4\right)$$

لكن القطع متماثل بالنسبة للمحور X وفتحته كما يظهر في الشكل (١١, ١٣) إلى الجهة اليمنى فهو من الشكل:

$$(y-K)^2 = 4a(x-h), a > 0$$

(١١, ٣٣)



شكل (١١, ١٣).

نعلم أن البعد $|HF|$ بين البؤرة والدليل يساوي $2a$ ويساوي 3 كما هو واضح من الشكل

$$(11, 13), \text{ إذن: } a = \frac{3}{2} \Leftarrow 2a = 3$$

بالتعويض عن h, K, a بما يساويها في (11, 33) نجد:

$$(y-4)^2 = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

مثال (11, 7)

أوجد معادلة المماس (the tangent line) والعمود على المماس (the normal line) عند النقطة

$$(1, -6) \text{ الواقعة على القطع: } y^2 + 6y = 4x - 4$$

الحل

باشتقاق طرفي المعادلة السابقة بالنسبة للمتغير x ، نجد:

$$2yy' + 6y' = 4$$

لكن m ميل المماس لمنحن عند نقطة منه يساوي قيمة المشتقة y' عند هذه النقطة. بالتعويض عن

إحداثيي هذه النقطة في المعادلة السابقة نجد:

$$-12y' + 6y' = 4 \Leftrightarrow y' = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

$$\text{ومنه: } m = -\frac{2}{3}$$

معادلة المماس لمنحن عند نقطة (x_1, y_1) منه هي:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m \Leftrightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$$

وبالتالي فإن معادلة المماس:

$$y + 6 = -\frac{2}{3}(x - 1) \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x - \frac{16}{3}$$

ميل العمود على المماس وليكن m' يعطى بالعلاقة:

$$m' = -\frac{1}{m} = \frac{3}{2}$$

فمعادلة العمود على المماس:

$$y + 6 = \frac{3}{2}(x - 1) \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{15}{2}$$

بشكل عام، فإن معادلات القطوع المكافئة في حالتها الانسحابية وعناصرها تتحدد كما يلي:

جدول (١).

معادلة القطع	البؤرة	معادلة الدليل
$(y-K)^2 = 4a(x-h)$	$F(a+h,K)$	$x = -a+h$
$(y-K)^2 = -4a(x-h)$	$F(-a+h,K)$	$x = a+h$
$(x-h)^2 = 4a(y-K)$	$F(h,a+K)$	$y = -a+K$
$(x-h)^2 = -4a(y-K)$	$F(h, -a+K)$	$y = a+K$

(حيث $a > 0$)

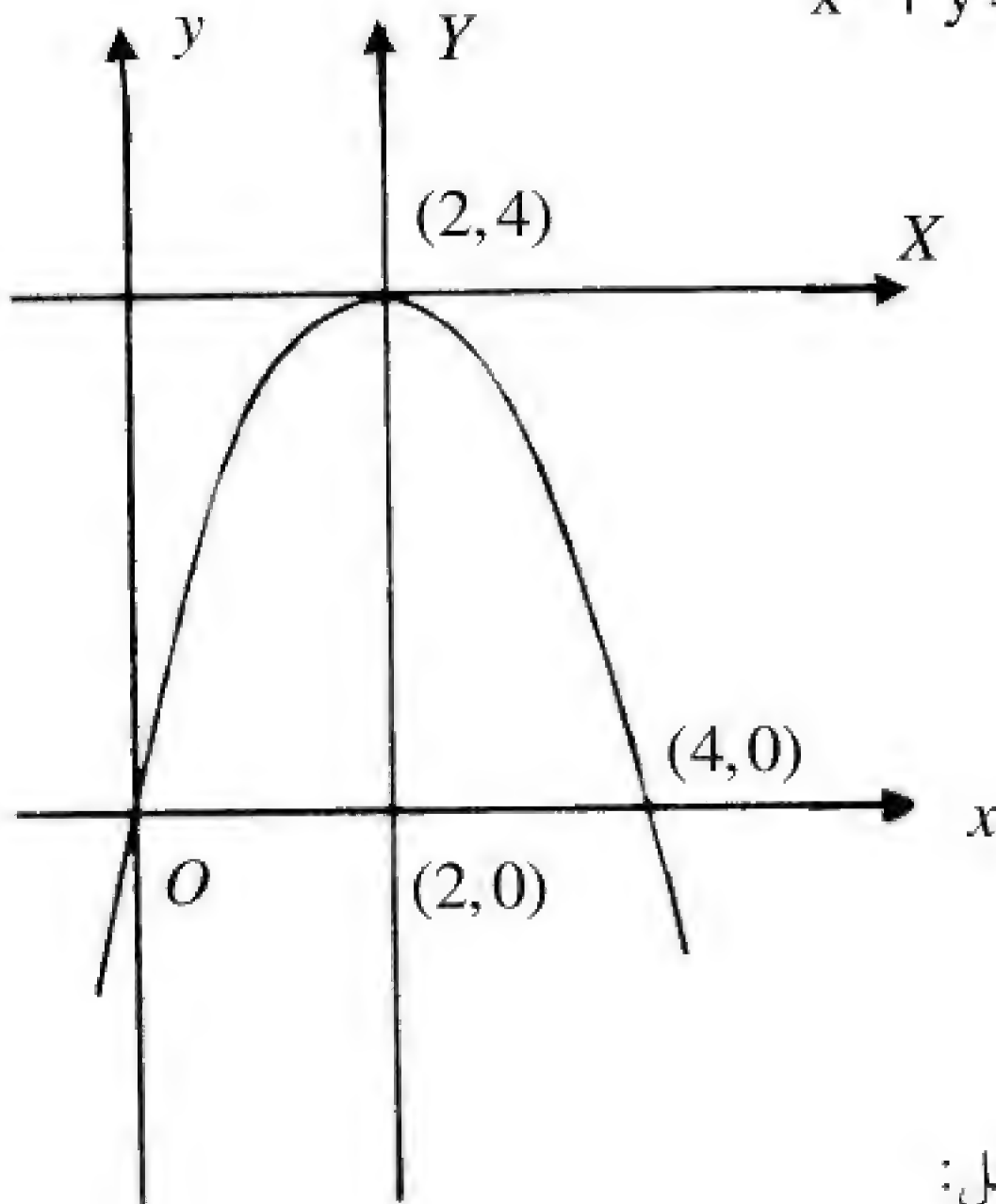
لاحظ لو بدلنا في الحالات الواردة في شكل (١١, ٣) في أ، ب، ج، د، عن كل من y, x بالقيمتين $y - K, x - h$ لحصلنا على المعادلات العامة في وضعها الانسحابي، وكذلك على إحداثيات البؤر ومعادلات الأدلة.

مثال (١١, ٨)

حدد عناصر القطع التالي وارسمه، شكل (١١, ١٤):

$$x^2 + y = 4x$$

الحل



تكتب المعادلة السابقة على الشكل:

$$x^2 - 4x = -y$$

نضيف إلى طرفي المساواة مربع نصف

معامل x فنجد:

$$x^2 - 4x + (2)^2 = -y + 4$$

لاحظ أن الطرف الأيسر أصبح مربعا

تماما، بالتالي فإن المعادلة تكتب على الشكل:

$$(x - 2)^2 = -(y - 4)$$

شكل (١١, ١٤).

بالمقارنة مع الحالة الأخيرة من الجدول السابق، نجد:

$$a = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4a = 1$$

بالتالي فإن رأس القطع: $(h, K) = (2, 4)$

$$\text{بؤرته: } F(h, -a + K) = (2, \frac{15}{4})$$

$$\text{دليله: } y = a + K = \frac{17}{4}$$

مثال (١١, ٩)

أوجد رأس وبؤرة القطع الممثل بالمعادلة:

$$y^2 + 2y - 2x + 4 = 0$$

وكذلك أوجد معادلة دليله وارسمه، شكل (١١, ١٥).

الحل

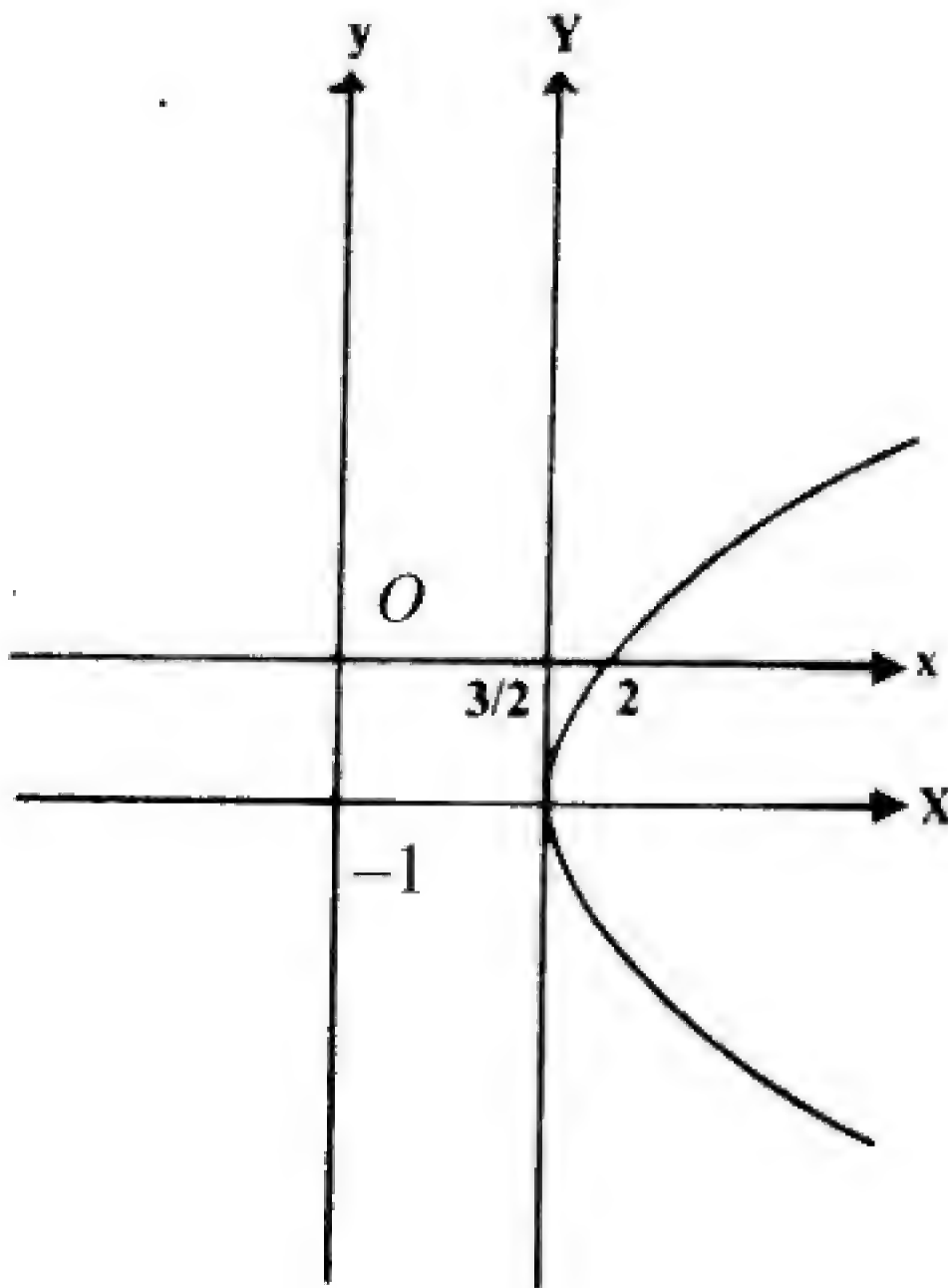
تكتب المعادلة السابقة على الشكل:

$$y^2 + 2y = +2x - 4$$

نضيف إلى طرفي المساواة مربع نصف معامل y فنجد:

$$y^2 + 2y + (1)^2 = 2x - 4 + 1 = 2x - 3$$

لاحظ أن الطرف الأيسر أصبح مربعا تاما،



شكل (١١, ١٥).

وبالتالي تكتب المعادلة على الشكل: $(y + 1)^2 = 2(x - \frac{3}{2})$

بالمقارنة مع الحالة الأولى جدول (١) نجد على التوالي:

$$a = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4a = 2$$

$$(h, K) = (\frac{3}{2}, -1)$$

رأس القطع:

بؤرتة: $F(a + h, K) = (2, -1)$

دليله: $x = -a + h = 1$

ثانيا: القطع الناقص

بأسلوب مشابه لما وجدناه في القطع المكافئ، فإن المعادلة:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

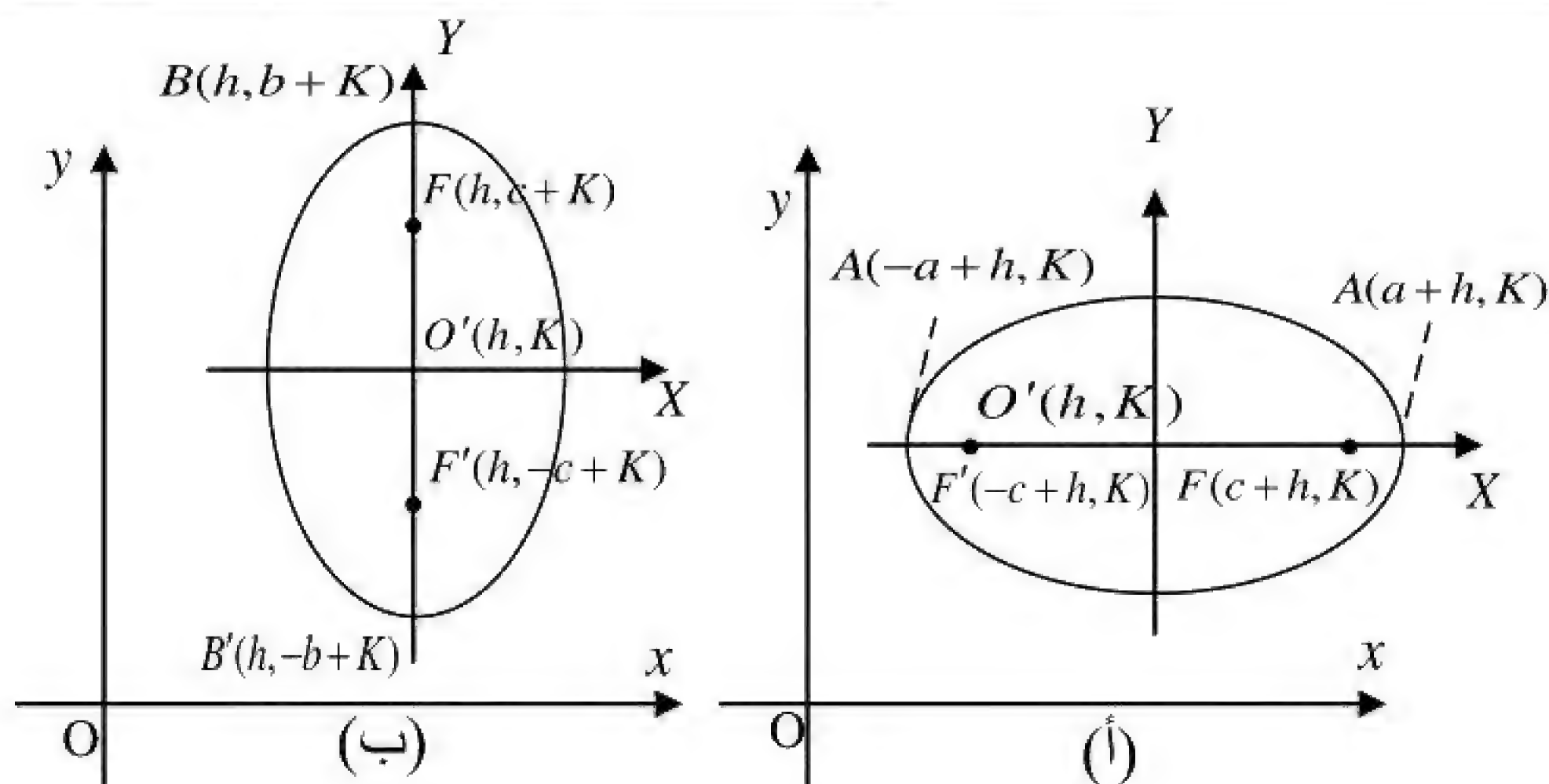
منسوبة إلى المحورين الإحداثيين X, Y تمثل قطعاً ناقصاً مركزه $O'(h, K)$ ، ومعادلته منسوبة إلى المحورين X, Y تكتب على الشكل:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-K)^2}{b^2} = 1$$

بؤرتاه ورأساه، شكل (١٦، ١١) تتحدد بالجدول التالي:

جدول (٢).

الحالة	البؤرتان F', F	الرأسان	الشرط	c
أ	$(\pm c + h, K)$	$(\pm a + h, K)$	$a > b$	$\sqrt{a^2 - b^2}$
ب	$(h, \pm c + K)$	$(h, \pm b + K)$	$a < b$	$\sqrt{b^2 - a^2}$



شكل (١٦، ١١).

مثال (١٠, ١١)

حدد عناصر القطع التالي وارسمه، شكل (١٧, ١١):

$$9x^2 + 25y^2 + 18x - 100y - 116 = 0$$

الحل

تكتب المعادلة السابقة على الشكل:

$$9(x^2 + 2x) + 25(y^2 - 4y) = 116$$

لنتمم إلى مربع تام كلا من المقدارين بين المعترضتين فنجد:

$$9(x^2 + 2x + 1) + 25(y^2 - 4y + 2) = 116 + 9 + 100$$

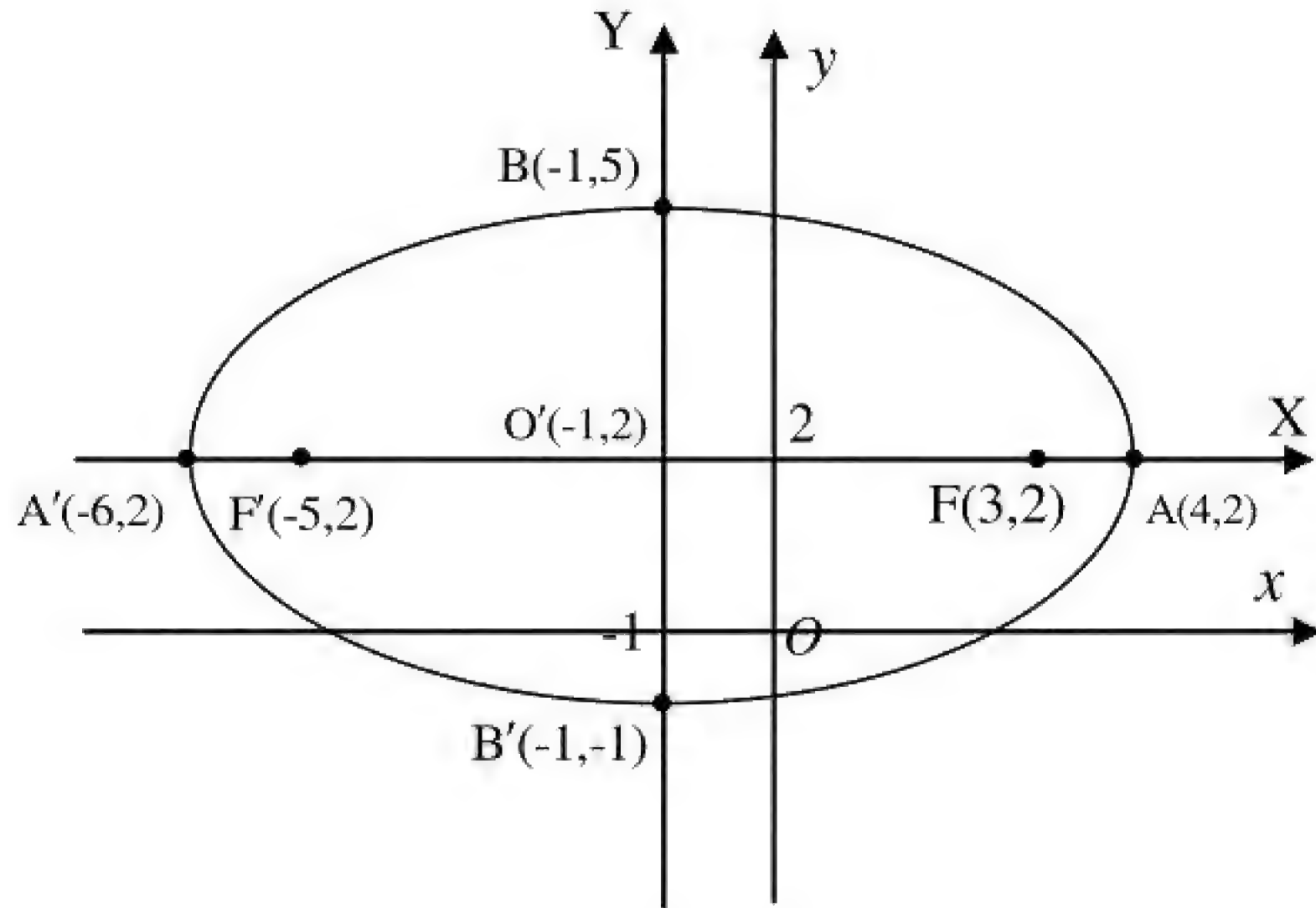
$$9(x + 1)^2 + 25(y - 2)^2 = 225$$

ومنه:

$$\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

أو:

وهذا قطع ناقص بؤرتاه على المحور O'X .

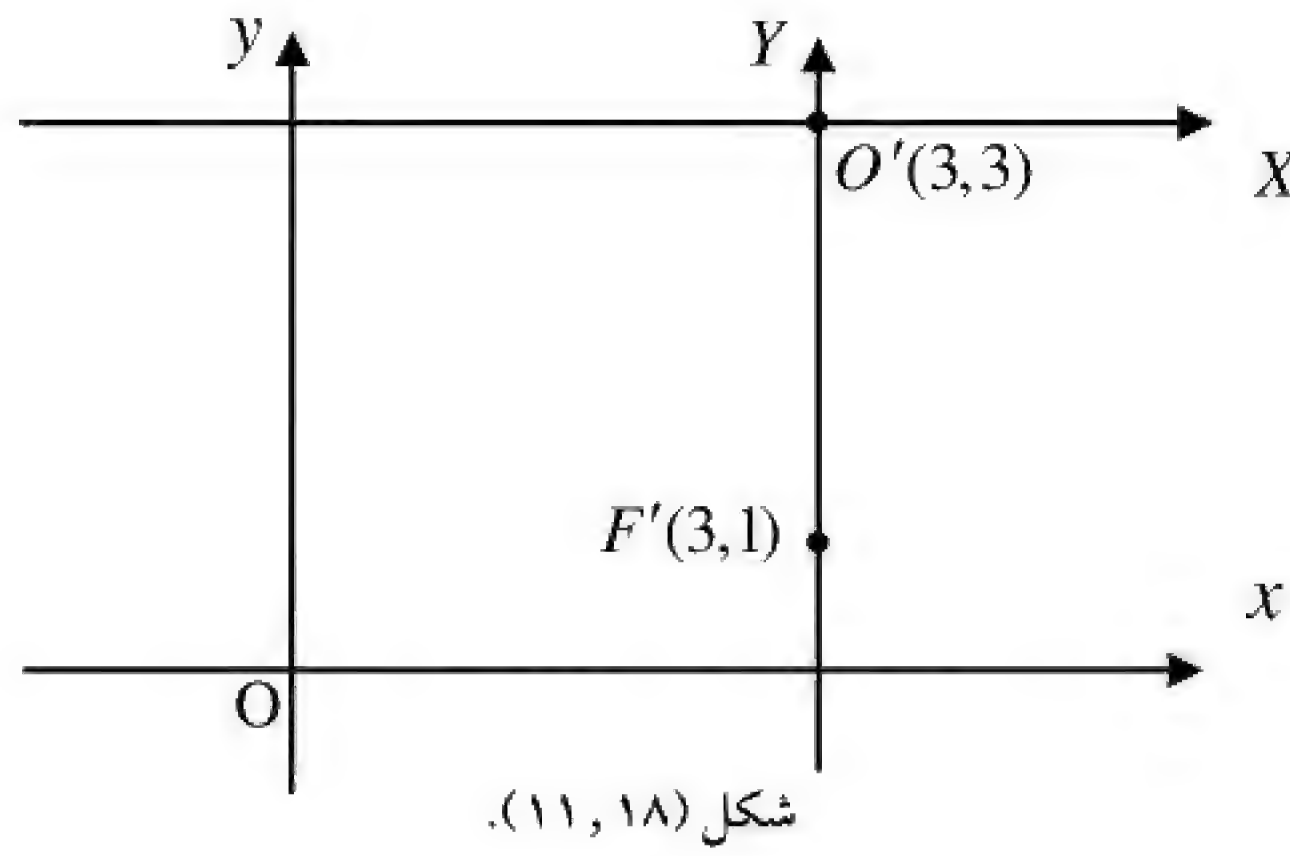
لاحظ أن: $a = 5, b = 3, c = \sqrt{25-9} = 4$ وأن: $a > b$ المركز: $(h, K) = (-1, 2)$ البؤرتان: $(\pm c + h, K) = (\pm 4 - 1, 2)$ 

شكل (١٧, ١١).

إذن: $F' = (-5, 2), F = (3, 2)$
 رأسا القطع: $(\pm a + h, K) = (\pm 5 - 1, 2)$
 إذن: $A' = (-6, 2), A = (4, 2)$

مثال (١١, ١١)

أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه $O'(3, 3)$ وإحدى بؤرتيه النقطة $F(3, 1)$ وطول محوره الأكبر يساوي 6، ثم أوجد معادلة المماس لهذا القطع عند النقطة $(3, 0)$.



الحل

القطع بؤرتاه على المحور Y فهو من الشكل:

$$\frac{(x-3)^2}{a^2} + \frac{(y-3)^2}{b^2} = 1$$

لاحظ أن: $2b = 6 \Leftrightarrow b = 3$ وأن: $|O'F'| = c = 2$

إذن: $c^2 = b^2 - a^2$ ومنه: $a = \sqrt{b^2 - c^2} = \sqrt{5}$

$$\text{معادلة القطع: } \frac{(x-3)^2}{5} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$$

من معادلة القطع نجد بالاشتقاق: $\frac{2(x-3)}{5} + \frac{2(y-3)}{9} y' = 0$

ومنه نجد ميل المماس عند النقطة $(3, 0)$ هو: $m = 0$ ، بالتالي فإن معادلة المماس عند هذه النقطة هي:

$$y = 0$$

ثالثا: القطع الزائد

بالأسلوب نفسه المتبع في القطع المكافئ والناقص، فإن المعادلة:

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = \pm 1 \quad (١١, ٣٤)$$

منسوبة إلى المحورين الإحداثيين X ، Y :

تمثل قطعاً زائداً مركزه $O'(h,K)$ ، ومحوره القاطع X إذا أخذنا الإشارة الموجبة في الطرف الأيمن (شكل (١١, ١٩) أ)).

تمثل قطعاً زائداً مركزه $O'(h,K)$ ، ومحوره القاطع Y إذا أخذنا الإشارة السالبة في الطرف الأيمن (شكل (١١, ١٩) ب)).

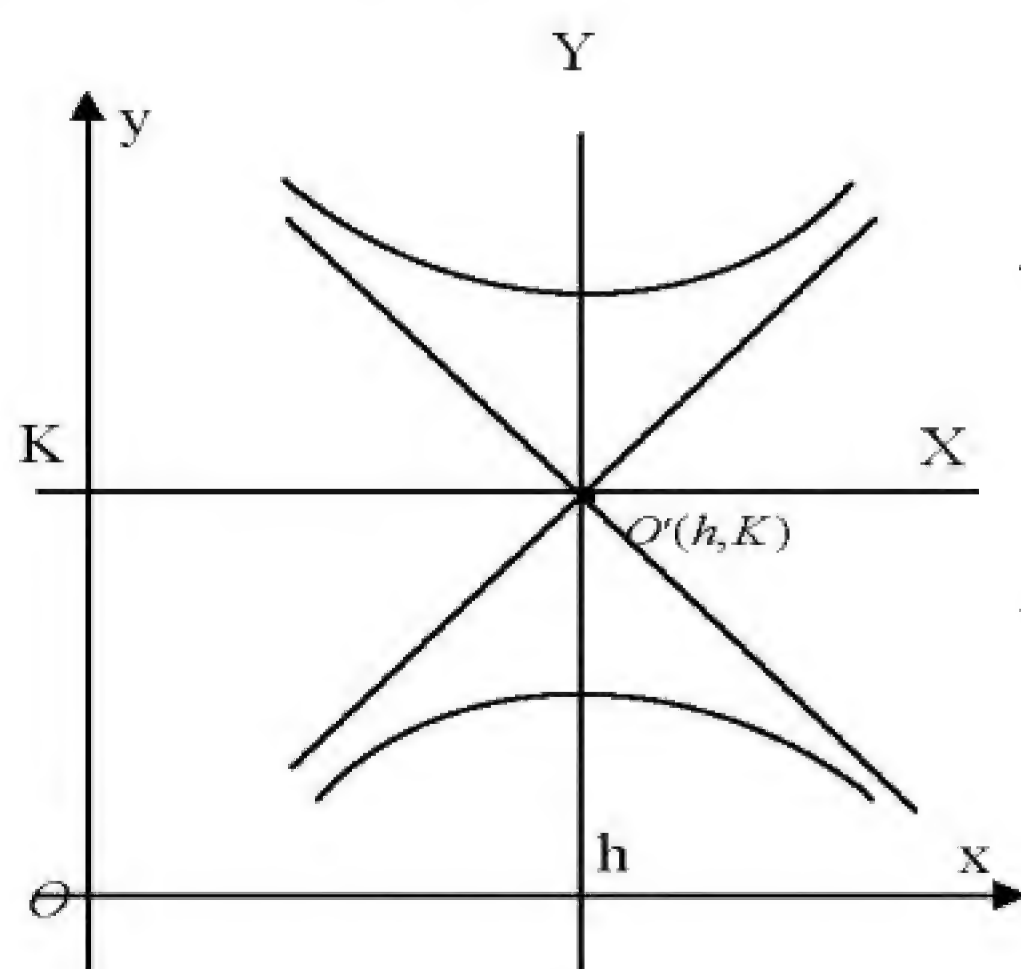
وفي كلتا الحالتين، فإن المعادلة (١١, ٣٤) تكتب منسوبة إلى المحورين X ، Y على الشكل:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-K)^2}{b^2} = \pm 1 \quad (١١, ٣٥)$$

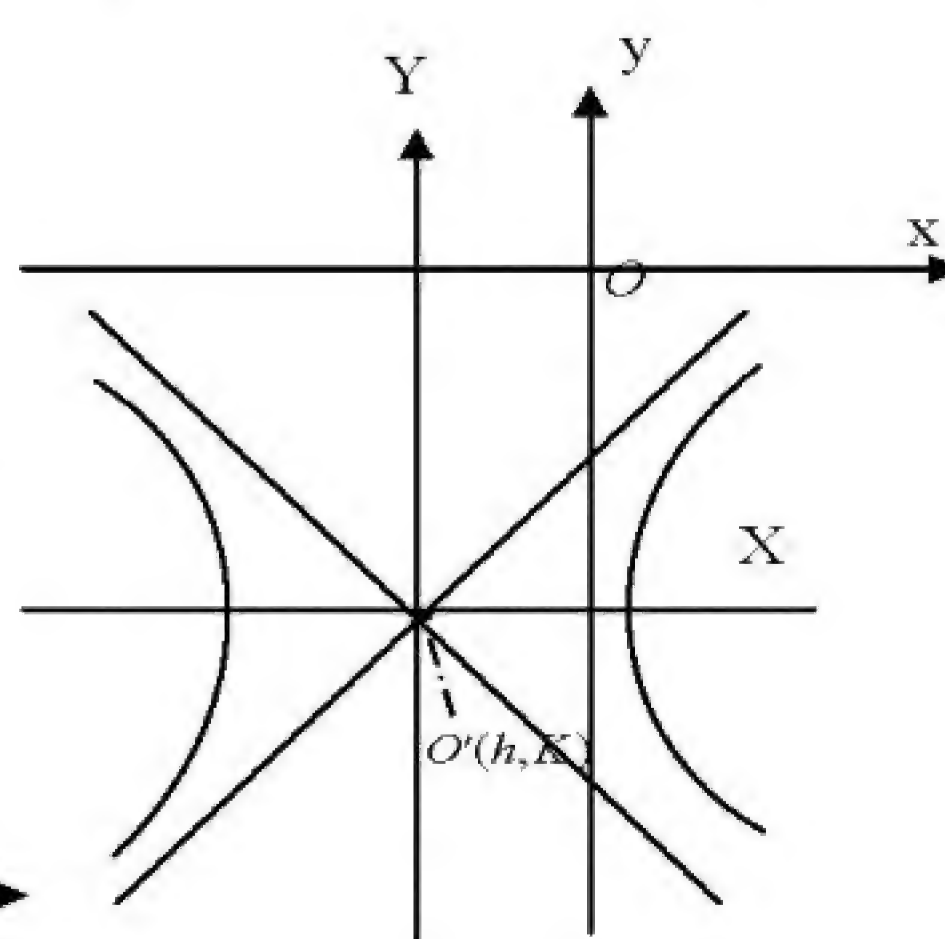
تحدد البؤرتان والرأسان في كل حالة كما في الجدول الآتي:

جدول (٣)

المعادلة	البؤرتان F', F	الرأسان
$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-K)^2}{b^2} = 1$	$(\pm c+h, K)$	$(\pm a+h, K)$
$\frac{(y-K)^2}{b^2} - \frac{(x-h)^2}{a^2} = 1$	$(h, \pm c+K)$	$(h, \pm b+K)$



شكل (١١, ١٩) ب .



شكل (١١, ١٩) أ .

وتتعين c في الحالتين معا كما يلي:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

وكذلك فإن معادلة الخطين المقاربين في كلتا الحالتين هي:

$$(y - K) = \pm \frac{b}{a}(x - h)$$

مثال (١١، ١٢)

حدد عناصر القطع التالي وارسمه:

$$9y^2 - 16x^2 - 18y - 64x - 199 = 0$$

الحل

تكتب المعادلة السابقة على الشكل:

$$9(y^2 - 2y) - 16(x^2 + 4x) = 199$$

لنتمم إلى مربع كامل كلا من المقدارين بين المعترضتين:

$$9(y^2 - 2y + (1)^2) - 16(x^2 + 4x + (2)^2) = 199 + 9 - 64$$

$$9(y-1)^2 - 16(x+2)^2 = 144 \quad \text{ومنه:}$$

$$\frac{(y-1)^2}{16} - \frac{(x+2)^2}{9} = 1 \quad \text{أو:}$$

وهذا قطع زائد بؤرتاه على المحور OY

$$a = 3, b = 4, c = \sqrt{16+9} = 5 \quad \text{لاحظ أن:}$$

$$(h, K) = (-2, 1) \quad \text{المركز:}$$

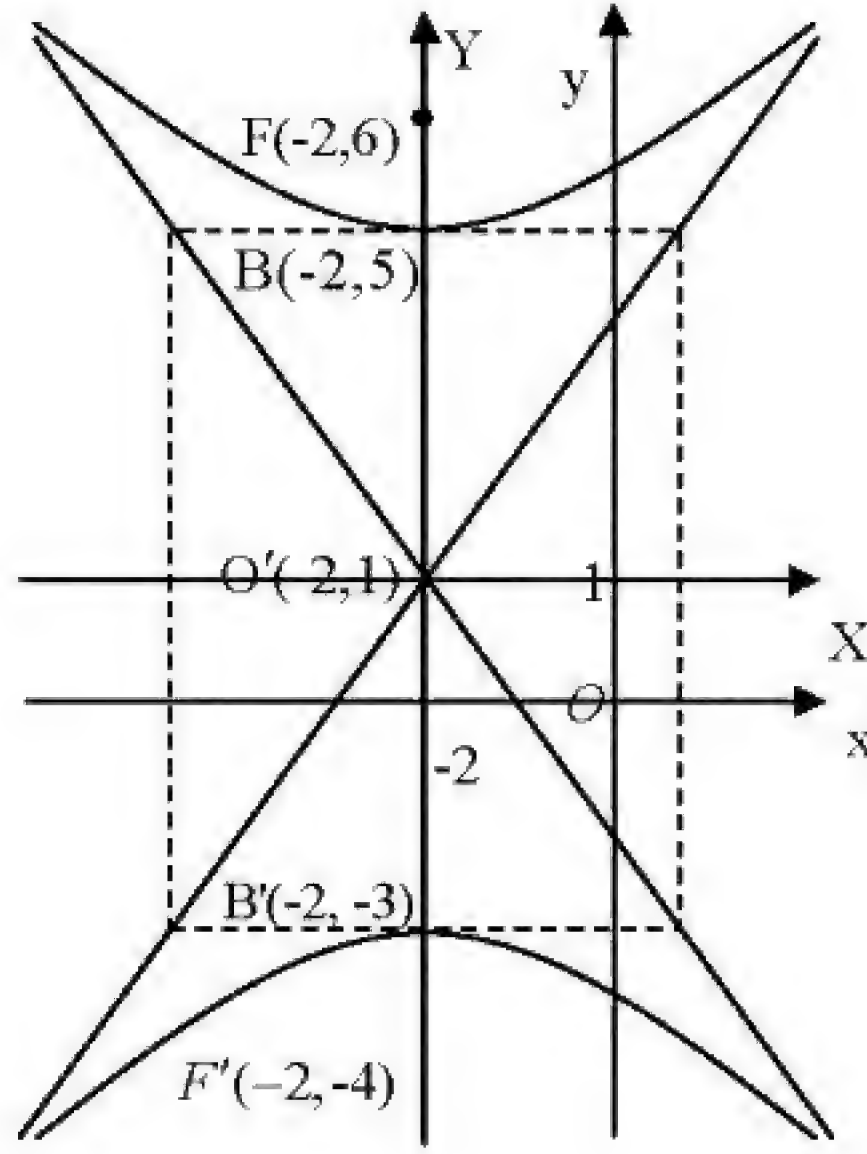
$$(h, \pm c + K) = (-2, \pm 5 + 1) \quad \text{البؤرتان:}$$

$$F' = (-2, -4), F = (-2, 6) \quad \text{إذن:}$$

$$(h, \pm b + K) = (-2, \pm 4 + 1) \quad \text{رأسا القطع:}$$

$$B' = (-2, -3), B = (-2, 5) \quad \text{إذن:}$$

$$y - 1 = \pm \frac{4}{3}(x + 2) \quad \text{المقاربان:}$$



شكل (٢٠، ١١).

مثال (١٣، ١١)

عين معادلة القطع الزائد الذي مركزه $(-1, 4)$ ، وإحدى بؤرتيه $(-1 + \sqrt{13}, 4)$ ومستقيماه المقاربان: $y - 4 = \pm \frac{3}{2}(x + 1)$

الحل

يقع المركز والبؤرتان على المستقيم $y = 4$ الموازي للمحور Ox

فمعادلة القطع هي من الشكل: $\frac{(x+1)^2}{a^2} - \frac{(y-4)^2}{b^2} = 1$

مستقيماه المقاربان هما: $y - 4 = \pm \frac{b}{a}(x + 1)$

(١١، ٣٦)

$$\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$$

إذن:

لكن البعد بين البؤرة والمركز يساوي c ، إذن:

(١١, ٣٧)

$$c = \sqrt{13} = \sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 13$$

من المعادلتين (١١, ٣٦)، (١١, ٣٧) نجد أن: $a = 2, b = 3$

$$\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-4)^2}{9} = 1 \text{ : فمعادلة القطع هي}$$

تمارين (١١, ٢)

في التمارين التالية، أوجد عناصر القطوع (المراكز، البؤر، الرؤوس، الأدلة، الخطوط المقاربة) ثم ارسم منحنياتها البيانية (إن وجدت).

$$2x^2 - 3y^2 + 8x + 6y + 17 = 0 \text{ (٨)}$$

$$x^2 - y^2 + 4x + 4y - 48 = 0 \text{ (١)}$$

$$8x - y^2 + 8y = 0 \text{ (٩)}$$

$$x^2 + 5y^2 + 6x - 40y - 84 = 0 \text{ (٢)}$$

$$4x^2 - 9y^2 - 16x + 18y - 7 = 0 \text{ (١٠)}$$

$$x^2 + 2y^2 + 8y - 8x - 48 = 0 \text{ (٣)}$$

$$x^2 + 2y^2 - 4y = 0 \text{ (١١)}$$

$$x^2 + 6x + 8y + 1 = 0 \text{ (٤)}$$

$$4x^2 - 9y^2 - 16x + 18y - 29 = 0 \text{ (١٢)}$$

$$y^2 + 8x + 6y + 1 = 0 \text{ (٥)}$$

$$4x + y^2 + 4y - 4 = 0 \text{ (١٣)}$$

$$3x^2 + 2y^2 + 6x - 8y + 5 = 0 \text{ (٦)}$$

$$x^2 - y^2 + 6x + 4y + 5 = 0 \text{ (١٤)}$$

$$y^2 - 6x - 4y + 16 = 0 \text{ (٧)}$$

في التمارين التالية، أوجد معادلات القطوع المخروطية وذلك ضمن الشروط المبينة:

(١٥) قطع مكافئ رأسه $(-1, 2)$ ودليله $x = -3$.

(١٦) قطع ناقص رأساه $(-5, 2)$ ، $(3, 2)$ وبؤرتاه $(-4, 2)$ ، $(2, 2)$.

(١٧) قطع زائد رأساه $(-1, 5)$ ، $(-1, -3)$ ويمر بالنقطة $(-3, -5)$.

(١٨) قطع زائد مستقيماه المقاربان:

$$-3x + 2y + 1 = 0 \text{ ، } 3x + 2y + 7 = 0$$

ويمر بالنقطة $(-5, 1)$.

(١٩) قطع مكافئ رأسه $(3, -2)$ وبؤرته $(3, 4)$.

(٢٠) قطع مكافئ بؤرته $F(-1, 2)$ ودليله $x = 8$.

(٢١) قطع ناقص بؤرتاه $(-3, 6)$ ، $(-3, 2)$ وطول محوره الكبير 14.

(٢٢) قطع زائد بؤرتاه $(3, -6)$ ، $(3, 2)$ وطول محوره القاطع 4.

(٢٣) قطع زائد بؤرتاه $(4, -3)$ ، $(-6, -3)$ وأحد رأسيه $(3, -3)$.

- (٢٤) قطع نقاطه تبعد عن النقطة $(-1, 2)$ بعدها عن مستقيم $x = 4$.
- (٢٥) قطع نقاطه تبعد عن النقطة $(-2, 1)$ بعده عن المستقيم $4x + 3y - 5 = 0$.
- (٢٦) قطع القيمة المطلقة للفرق بين بعدي أية نقطة منه عن النقطتين $(1, 0)$ ، $(7, 0)$ يساوي 2.
- (٢٧) قطع مجموع بعدي أية نقطة منه عن النقطتين $(1, 2)$ ، $(1, 3)$ يساوي 6.
- (٢٨) قطع ناقص طرفا محوره الأكبر: $(0, 3)$ ، $(0, -3)$ والبعد بين بورتيه يساوي 4.
- (٢٩) قطع ناقص نهايات محوريه النقاط:
 $(3, 6)$ ، $(6, 2)$ ، $(3, -2)$ ، $(0, 2)$.
- (٣٠) قطع ناقص معادلته محوري التماثل له: $x=3$ ، $y=-2$ وإحدى بورتيه $(0, -2)$ وطول محوره الأصغر 8.
- (٣١) قطع ناقص يمر بنقطة الأصل وبؤرتاه $(3, 4)$ ، $(3, -4)$.
- (٣٢) قطع مكافئ دليله $y=2$ ومعادلة محور تماثله $x=1$ ويمر بالنقطة $(5, 6)$.
- (٣٣) قطع مكافئ يمر بالنقاط: $(-1, 0)$ ، $(0, 2)$ ، $(1, 1)$ ومحور تماثله يوازي المحور y .
- (٣٤) قطع مكافئ دليله $y=2$ ومحور تماثله $x=1$ ويمر بالنقطة $(5, 6)$.

الفصل الثاني عشر

الدوال في عدة متغيرات

FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES

(١٢, ١) الدوال بمتغيرين أو أكثر

(أ) لاحظ أن حجم الكرة V يتحدد تماما إذا علم طول نصف قطرها r ، وأن الحجم يعطى بالصيغة:

$$V = f(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

(ب) نعلم أن مساحة المستطيل S تتعين بمعرفة طوله x ، وعرضه y وفق المساواة:

$$S = f(x, y) = xy$$

(ج) أما حجم متوازي المستطيلات V ، فمعروف إذا علمت أبعاده الثلاث: x, y, z ويتحدد بالعلاقة:

$$V = f(x, y, z) = xyz$$

سبق أن درسنا بالتفصيل الدوال بمتغير واحد x . سنبحث فيما يلي ونعرض خواص الدوال بأكثر من متغير.

تعريف (١٢, ١)

المستوي: هو مجموعة الأزواج المرتبة الحقيقية، من الشكل: (x, y) .

لنرمز لمجموعة نقاط المستوي بالرمز R^2 ، بالتالي فإن:

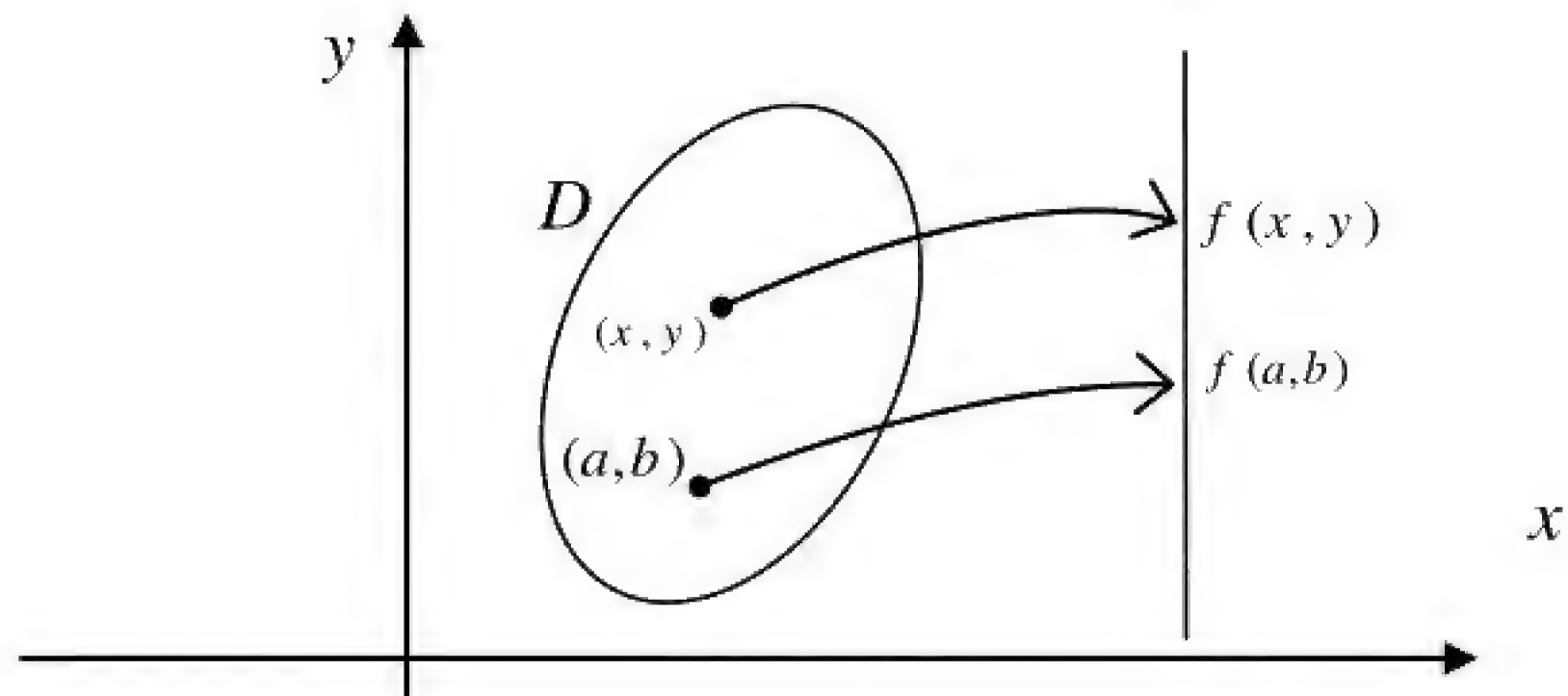
$$R^2 = \{(x, y) : x \in R, y \in R\}$$

تعريف (١٢, ٢)

لتكن مجموعة جزئية من R^2 . الدالة الحقيقية f بمتغيرين x, y هي: ارتباط بين عناصر مجموعتين بحيث يوافق كل زوج مرتب: $(x, y) \in D$ ، عددا حقيقيا وحيدا (نرمز له بالرمز $f(x, y)$) ينتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية.

نسمي D بمجال الدالة، كما نسمي مجموعة القيم $f(x, y)$ الموافقة لجميع الأزواج المرتبة (x, y) المنتمية إلى مجال الدالة بمدى الدالة.

غالبا ما نتحدد $f(x, y)$ صورة الزوج المرتب (x, y) وفق قاعدة معلومة، يسهل بواسطتها معرفة القيمة $f(x, y)$ بمجرد معرفة الزوج المرتب (x, y) ، فمثلا: من القاعدة: $f(x, y) = 2x + y$ ، نجد: $f(1, 2) = 4$ ، $f(-\frac{1}{2}, 1) = 0$ ، $f(3, 4) = 10$.



شكل (١٢, ١).

تعريف (١٢, ٣)

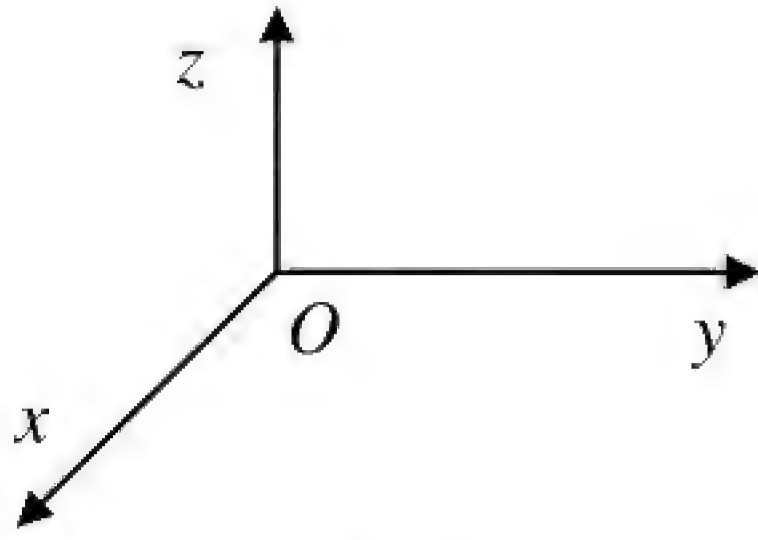
الفضاء الإقليدي ثلاثي البعد R^3 هو مجموعة كل الثلاثيات المرتبة الحقيقية، من الشكل: (x, y, z) . والذي عرف عليه البعد $|AB|$ بين أي نقطتين $A(x_1, y_1, z_1)$ ، $B(x_2, y_2, z_2)$ بالصورة:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \text{ إذن:}$$

$$R^3 = \{(x, y, z) : x \in R, y \in R, z \in R\}$$

(٢, ١٢) تحديد نقطة في الفضاء الإقليدي ثلاثي البعد

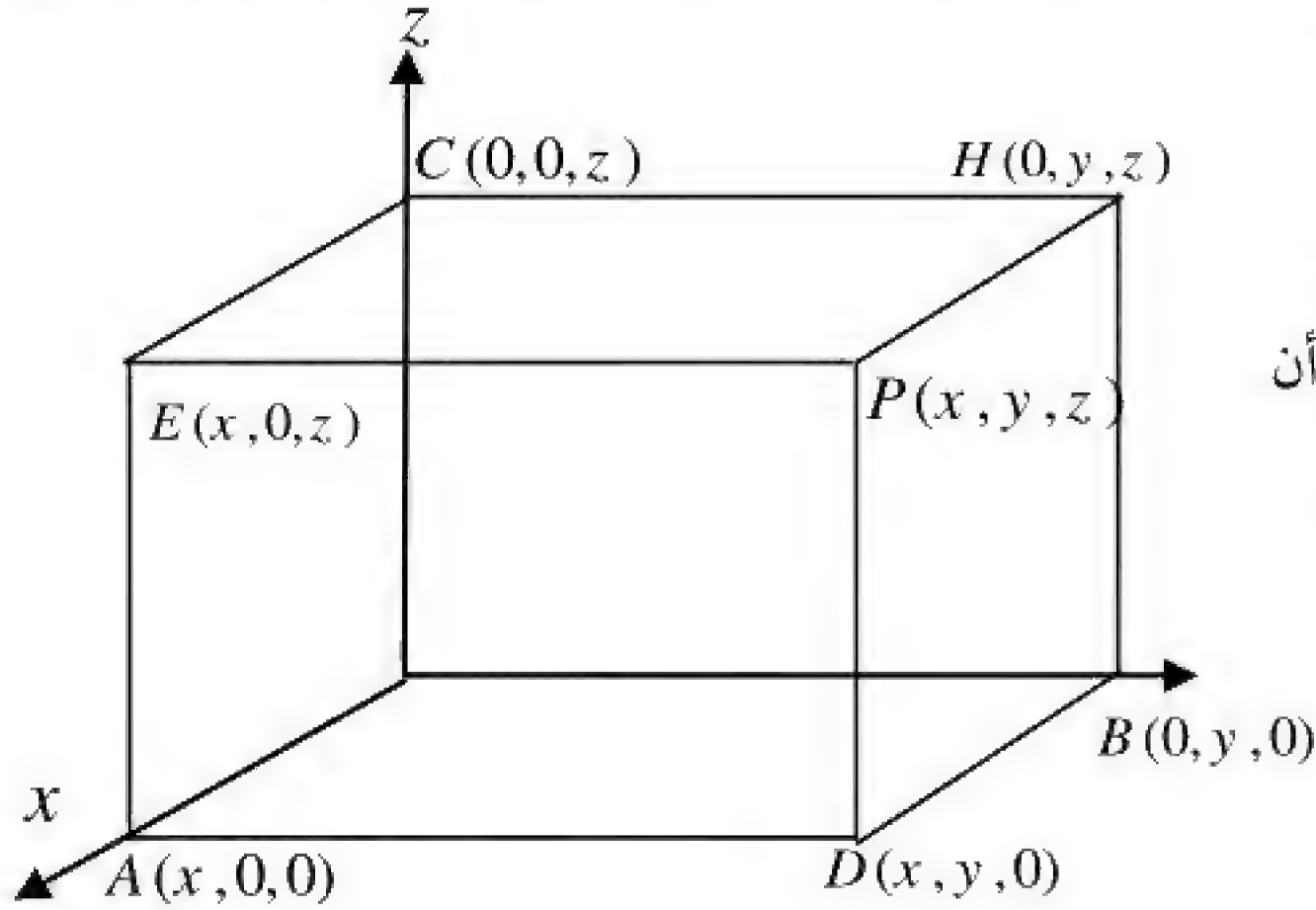
نسب نقاط هذا الفضاء إلى مجموعة من المحاور الإحداثية المتعامدة والمتلاقية في نقطة واحدة والتي نسميها بنقطة الأصل (مبدأ الإحداثيات). نسمي هذه المحاور بالمحور x ، المحور y ، المحور z ، شكل (٢, ١٢).



شكل (٢, ١٢).

تحدد هذه المحاور ثلاثة مستويات إحداثية وهي: المستوى xy ، المستوى yz ، المستوى zx . تتطابق نقطتان إذا تساوت إحداثياتها المتقابلة. نقول إن مجموعة المحاور تكون مجموعة مباشرة، إذا حققت الاختبار التالي:

إذا وقف راصد في اتجاه المحور z ووضع يمينه باتجاه المحور x الموجب ويسراه في اتجاه المحور y الموجب وحرك يمينه في المستوى xy بالاتجاه الموجب فيجب أن تلاقي يمينه يسراه بعد مسح زاوية مقياسها أقل من 180° ، وإلا نقول إن المجموعة غير مباشرة. نأخذ عادة ثلاثية المحاور بحيث تكون مباشرة ومتعامدة. نتحدد النقطة P من R^3 بمعرفة مسقطيها D على المستوى xy والمسقط C على المحور z ، شكل (٣, ١٢). لكن D تتحدد بمعرفة مسقطيها A و B على المحورين x, y على الترتيب.



شكل (٣, ١٢).

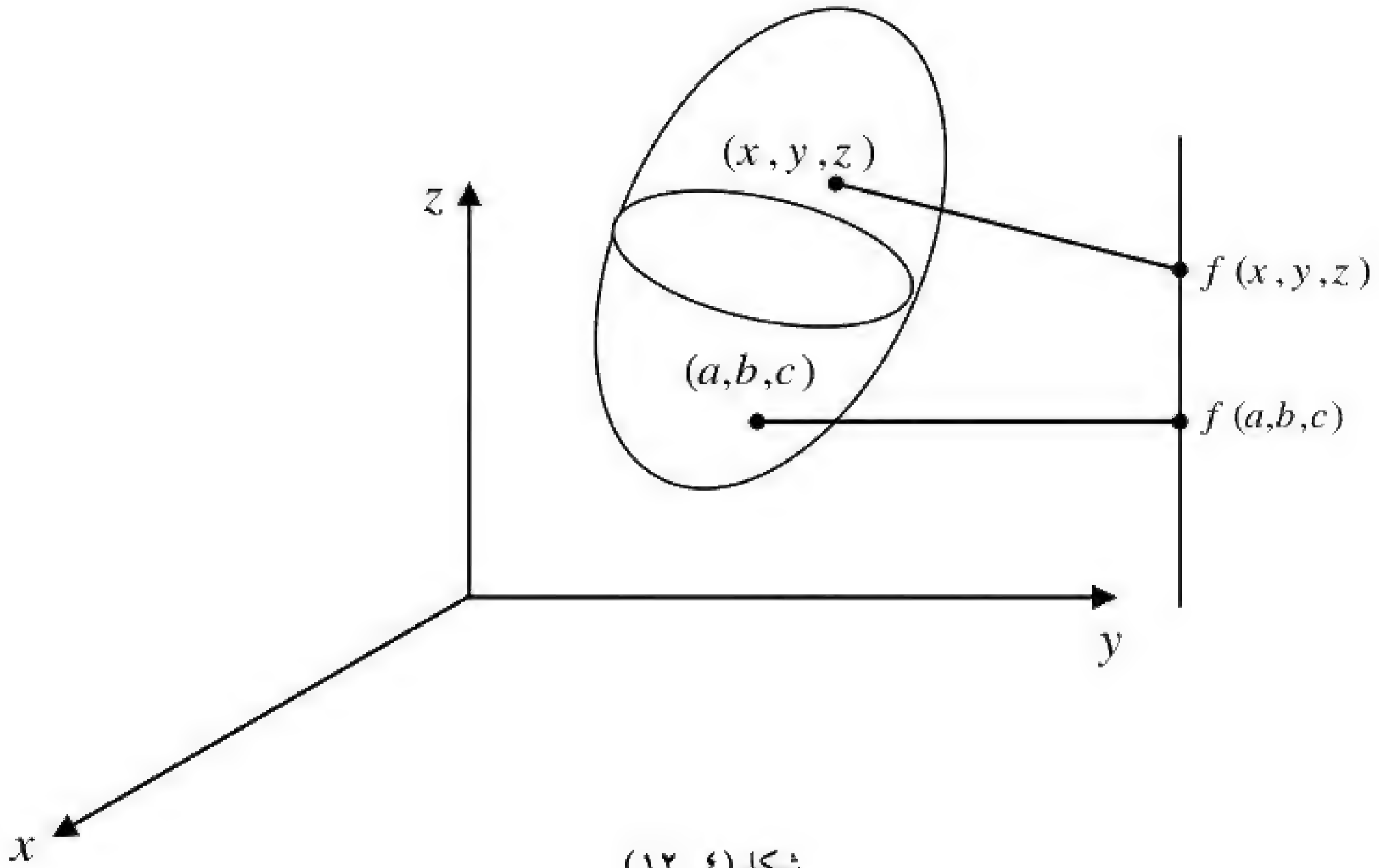
إذن نتحدد P إذا عرفنا النقاط A, B, C . يمكن أن نبرهن أن النقطة A هي مسقط P على المحور x وأن B هي مسقط P على المحور y .

إذن معرفة مساقط P على المحاور الإحداثية كاف لتحديد موضع النقطة P في الفضاء R^3 . تتحدد النقاط A, B, C على محاورها بثلاثة أعداد جبرية ولتكن x, y, z وهي إحداثيات هذه النقاط على هذه المحاور. إذن كل نقطة P من R^3 تتحدد بثلاثي مرتب من الأعداد الحقيقية من الشكل (x, y, z) . نرمز للنقطة P غالبا بالرمز $P(x, y, z)$. تظهر النقطة P ومساقطها كما هو موضح في الشكل (١٢, ٣).

تعريف (١٢, ٤)

لتكن D مجموعة جزئية من R^3 (الفضاء الإقليدي ثلاثي البعد). الدالة الحقيقية f بثلاث متغيرات x, y, z : هي ارتباط بين عناصر مجموعتين بحيث يوافق كل ثلاثي مرتب: $(x, y, z) \in D$ ، عددا حقيقيا وحيدا (نرمز له بالرمز $f(x, y, z)$) ينتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية.

نسمي D بمجال الدالة، كما نسمي مجموعة القيم $f(x, y, z)$ الموافقة لجميع الأزواج المرتبة (x, y, z) المنتمة إلى مجال الدالة بمدى الدالة.



شكل (١٢, ٤).

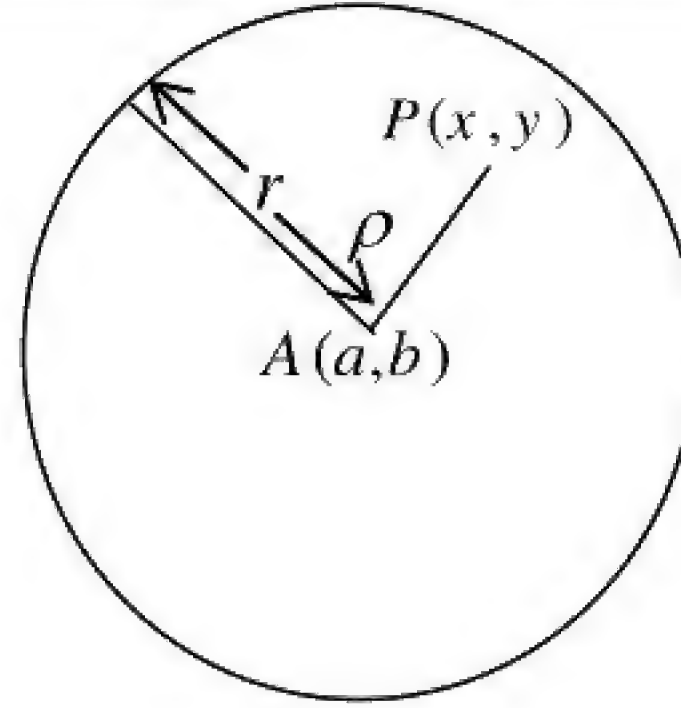
(١٢, ٣) النهايات والاتصال

Limits and Continuity

تعريف (١٢, ٥)

نسمي مجموعة النقاط $P(x, y)$ في المستوي R^2 والتي تبعد عن نقطة ثابتة $A(a, b)$ في هذا المستوي بعدا ρ أقل من عدد ثابت موجب r بالقرص المفتوح الذي مركزه A وطول نصف قطره r ($\rho = |PA| < r$).
وإذا حوى هذا القرص نقاط محيطه، سمي بالقرص المغلق ($\rho \leq r$).

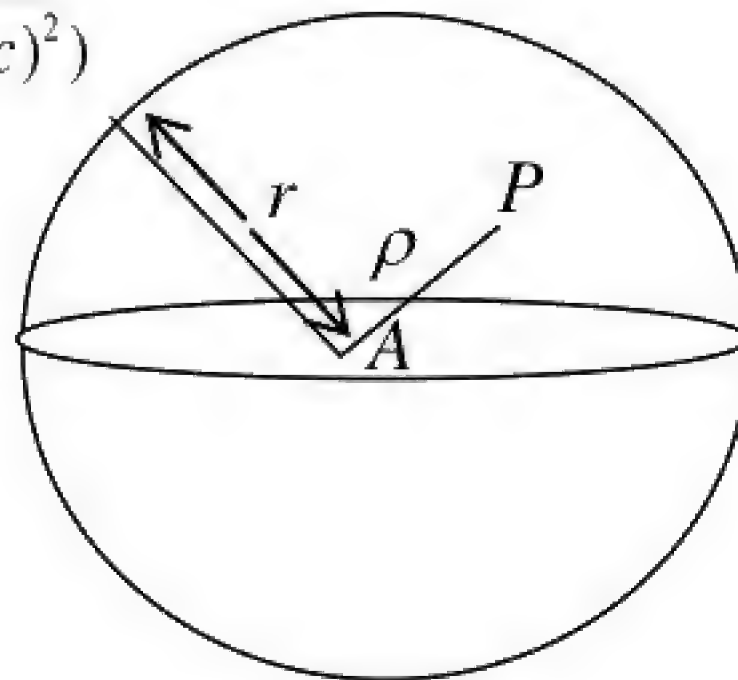
$$(\rho = |PA| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2})$$



شكل (١٢, ٥).

كما نسمي مجموعة النقاط $P(x, y, z)$ في R^3 والتي تحقق الشرط $\rho = |PA| < r$ بالمنطقة الكروية المفتوحة التي مركزها $A(a, b, c)$ وطول نصف قطرها r . وإذا حوت نقاط سطحها سميت بالمنطقة الكروية المغلقة ($\rho \leq r$).

$$(\rho = |PA| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2})$$



شكل (١٢, ٦).

تعريف (١٢, ٦)

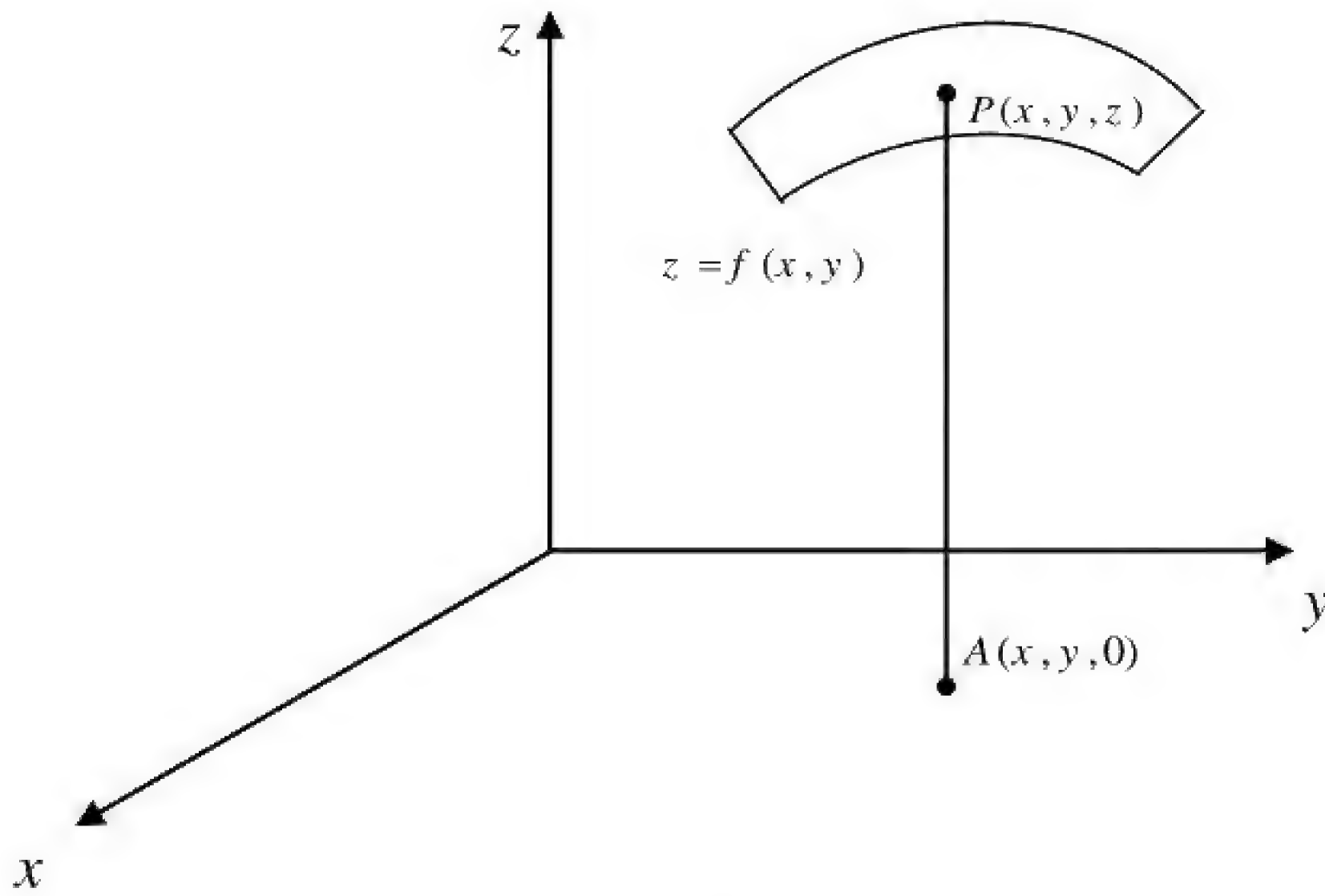
لتكن f دالة بمتغيرين x, y معرفة على قرص دائري مفتوح مركزه $A(a, b)$ (ومن الممكن أن لا تكون معرفة عند A). نقول إن الدالة f تنتهي نحو العدد L عندما: $(x, y) \rightarrow (a, b)$ ، ونرمز لذلك بالرمز: $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = L$ وذلك إذا تحقق ما يلي: لكل عدد $\varepsilon > 0$ (اختياري)، يوجد عدد $\delta > 0$ ، بحيث يكون:

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \Rightarrow |f(x, y) - L| < \varepsilon$$

يمكن أن نبرهن إذا كانت النهاية L موجودة، فإنها وحيدة.
بالمثل يمكن أن نعرف نهاية دالة بثلاثة متغيرات مع استبدال القرص الدائري المفتوح الذي لا يحوي مركزه بالكرة المفتوحة التي لا تحتوي مركزها.

ملحوظة (١٢, ١)

مجموعة النقاط: $(x, y, z) \in R^3$ والتي ترتبط متغيراتها بالمساواة $z = f(x, y)$ ، تمثل سطحاً في R^3 .



شكل (١٢, ٧).

نظرية (١٢, ١)

إذا كانت نهايتا الدالتين f, g موجودتين عندما: $(x, y) \rightarrow (a, b)$ ، وتساويان على الترتيب: L, M ، فإن:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} (f + g)(x, y) = L + M \quad (١)$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} (f \cdot g)(x, y) = LM \quad (٢)$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} \left(\frac{f}{g}\right)(x, y) = \frac{L}{M}, M \neq 0 \quad (٣)$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} \sqrt{f(x, y)} = \sqrt{L}, L \geq 0 \quad (٤)$$

ملحوظة (١٢, ٢)

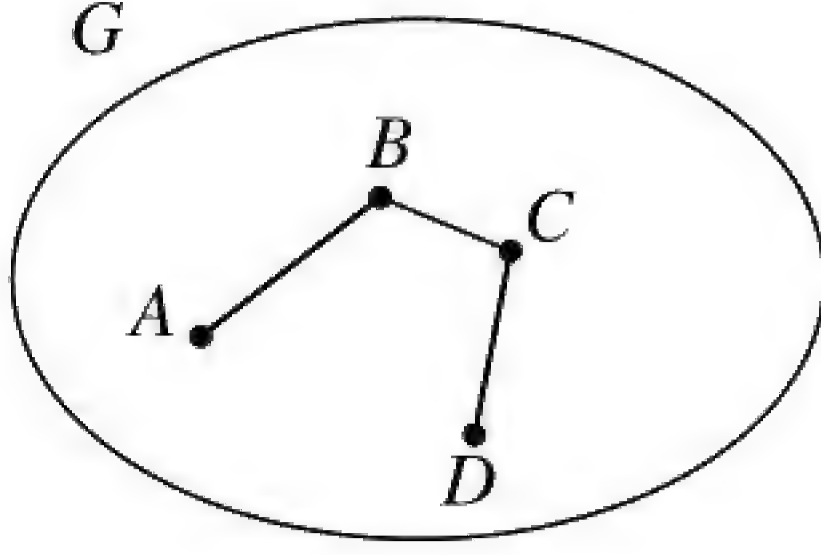
يمكن التعبير عن دالة كثيرة حدود f بمتغيرين x, y ، على صورة مجموع عدد من الحدود من الشكل $cx^\alpha y^\beta$ حيث c عدد حقيقي، والعددان α, β عددان صحيحان غير سالبين. كما نسمي قسمة كثيرتي حدود بالدالة الكسرية. يمكن البرهان على أن نهاية كثيرة حدود عندما: $(x, y) \rightarrow (a, b)$ تساوي قيمة كثيرة الحدود عندما: $x = a, y = b$. وبالمثل نهاية دالة كسرية تساوي قيمتها شرط أن لا تكون نهاية المقام مساوية للصفر. الأمر نفسه ينطبق على كثيرات الحدود بثلاثة متغيرات.

تعريف (١٢, ٧)

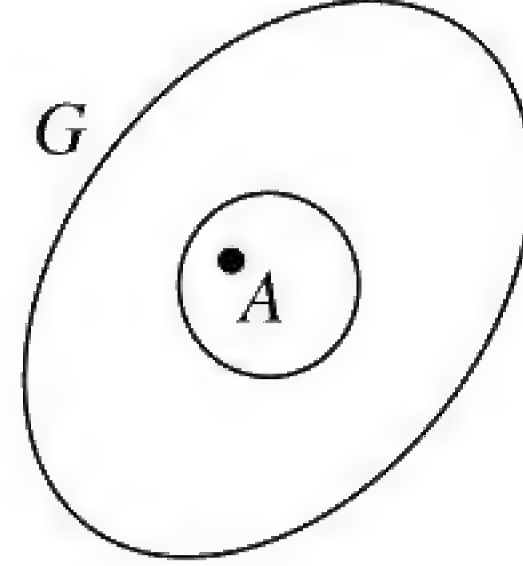
نقول إن النقطة $A(a, b)$ نقطة داخلية من المجموعة G . إذا كانت مركزا لقرص مفتوح يقع بأكمله ضمن G وإذا كانت جميع نقاط G نقاطا داخلية، فإننا نسمي هذه المجموعة بالمجموعة المفتوحة.

تعريف (١٢, ٨)

نقول عن المجموعة المفتوحة G التي يمكن أن نصل بين أية نقطتين منها بخط مضيئي (اتحاد لعدة قطع مستقيمة) يقع بأكمله ضمن G بمنطقة مفتوحة.



شكل (٩، ١٢).



شكل (٨، ١٢).

تعريف (٩، ١٢)

لتكن f دالة متغيرين x, y معرفة على القرص دائري مفتوح مركزه $A(a, b)$. نقول إن الدالة f متصلة عند النقطة A ، إذا كان:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = f(a, b)$$

وإذا كانت f دالة بثلاثة متغيرات، نستبدل القرص الدائري المفتوح بالكرة المفتوحة

لتكن f دالة بثلاثة متغيرات. نقول إن الدالة f متصلة عند النقطة الداخلية $A(a, b, c)$ من المنطقة D ، إذا كان:

$$\lim_{(x, y, z) \rightarrow (a, b, c)} f(x, y, z) = f(a, b, c)$$

من المفيد أن نشير هنا إلى أن نظريات الاتصال لدوال بمتغيرين أو أكثر تتشابه مع ما يقابلها لدوال بمتغير واحد. فمجموع وحاصل ضرب وقسمة دالتين متصلتين هو متصل بشرط ألا ينعدم المقام في حالة القسمة.

(٤، ١٢) المشتقات الجزئية

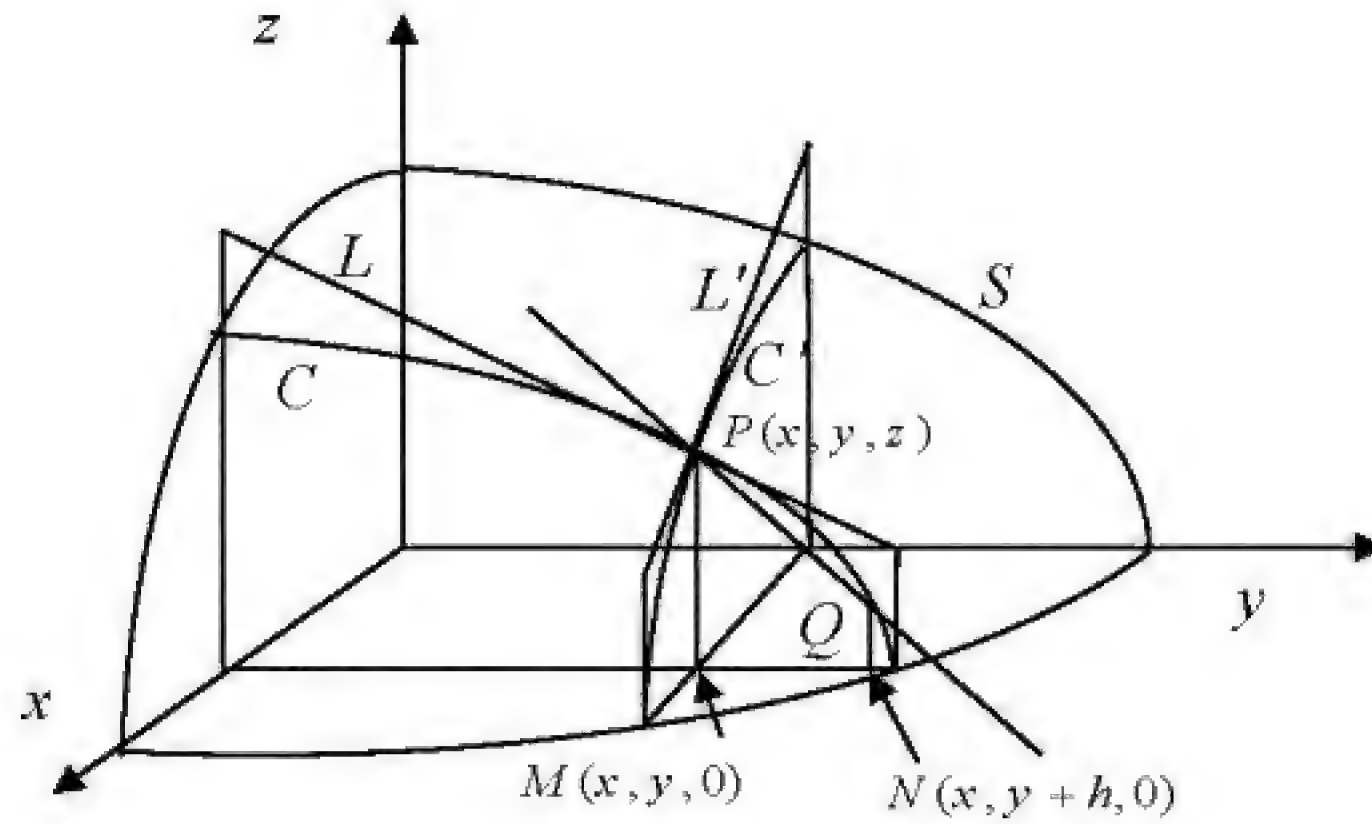
Partial Derivatives

لتكن f دالة بمتغيرين x, y معرفة على المنطقة $D \subset R^2$ بالقاعدة: $z = f(x, y)$ وليكن S بيان السطح الذي تمثله هذه المعادلة في R^3 .

ويقطع المستوي Γ الموازي للمستوي yz السطح S في المنحني المستوي C . لتكن P, Q نقطتين من المنحني C ، ولتكن: $M(x, y, 0)$ ، $N(x, y + h, 0)$ مسقطي P و Q على المستوي xy ،

شكل (١٠، ١٢). ميل القاطع PQ بالنسبة للمحور الإحداثي MN الموازي للمحور y وبنفس

جهته C هو: $m_{PQ} = \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$



شكل (١٠، ١٢).

نهاية ميل القاطع PQ عندما: $h \rightarrow 0$ إن وجدت تسمى بالمشتقة الجزئية للدالة f بالنسبة لمتغير y ونرمز لها بالرمز $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ وهي تمثل ميل المماس L للمنحني C عند النقطة P بالنسبة للمحور y . بالمثل يمكن أن نعرف المشتقة الجزئية للدالة f بالنسبة للمتغير x ونرمز لها بالرمز $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ ، وهي تمثل ميل المماس L' للمنحني C' (أثر المستوي Γ' الموازي للمستوي xy على السطح S) عند النقطة P بالنسبة للمحور x .

تعريف (١٠، ١٢)

لتكن f دالة بمتغيرين معرفة على المنطقة المفتوحة D ، نعرف المشتقتين الجزئيتين للدالة f بالنسبة للمتغيرين x و y عند النقطة (x, y) ونرمز لهما بالشكل: $f_x(x, y)$ و $f_y(x, y)$ بالصورة:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

(شرط وجود النهاية في كل حالة)

مثال (١٢، ١)

إذا كان: $f(x, y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$ ، فأوجد باستخدام التعريف: $f'_y(2, 1)$ ، ثم أوجد هاتين القيمتين مستخدما قواعد الاشتقاق وتحقق من صحة إجابتك.

الحل

(١) نعلم أن: $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$ ، ومنه:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h, 1) - f(2, 1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(2+h) + (2+h)} - \sqrt{2+2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2(2+h)} - 2}{h} \\ \frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(2+h) - 4}{h(\sqrt{2(2+h)} + 2)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{2(2+h)} + 2} = \frac{1}{2} \quad (\text{ضربنا بالمرافق}) \end{aligned}$$

بالمثل، نجد:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(2, 1+k) - f(2, 1)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2(1+k) + \frac{2}{1+k}} - 2}{k} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{2(1+k) + \frac{2}{1+k} - 4}{\sqrt{2(1+k) + \frac{2}{1+k}} + 2} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{2(1+k)^2 + 2 - 4(1+k)}{k(1+k)(\sqrt{2(1+k) + \frac{2}{1+k}} + 2)} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{2k^2}{k(1+k)(\sqrt{2(1+k) + \frac{2}{1+k}} + 2)} = 0 \quad (\text{اختصرنا } k \text{ من البسط والمقام}) \end{aligned}$$

لنستخدم قواعد الاشتقاق لايجاد المشتقتين الجزئيتين للدالة:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{x - \frac{x}{y^2}}{2\sqrt{xy + \frac{x}{y}}}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y + \frac{1}{y}}{2\sqrt{xy + \frac{x}{y}}} \quad \text{، فنجد:} \\ \frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) &= \frac{1+1}{4} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = \frac{2-2}{2\sqrt{2+2}} = 0 \end{aligned}$$

ملحوظة (١٢, ٣)

لايجاد $f_x(x, y)$ ننظر إلى y على أنها مقدار ثابت ثم نشتق f بالنسبة للمتغير x مستخدمين قواعد الاشتقاق المعروفة لنا بالنسبة لدالة ذات متغير واحد. لايجاد $f_y(x, y)$ ننظر إلى x على أنها مقدار ثابت ثم نشتق f بالنسبة للمتغير y .

مثال (١٢, ٢)

أوجد $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$, $f_x(1, 1)$, $f_y(1, 1)$ إذا كان: $f(x, y) = e^{x^2y - y^2x}$

الحل

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x^2y - y^2x} (x^2 - 2xy) \quad (٢) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = e^{x^2y - y^2x} (2xy - y^2) \quad (١)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = -1, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) = -1 \quad \text{بالتالي، فإن:}$$

لنعرف المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى لدالة f بثلاثة متغيرات x, y, z ، فمثلاً:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = f_x(x, y, z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{بالمثل نعرف}$$

إذا كانت دالة f بمتغيرين x, y فإن المشتقة الجزئية للمقدار f_x بالنسبة لأحد المتغيرين تسمى

بالمشتقة الجزئية من الرتبة الثانية، وتعرف بالصورة:

$$\frac{\partial}{\partial x}(f_x) = (f_x)_x = f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(f_x) = (f_x)_y = f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(f_y) = f_{yy}, \quad \frac{\partial}{\partial x}(f_y) = f_{yx} \quad \text{بالمثل:}$$

بوجه عام، فإن: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ والنظرية التالية تحدد الشروط الواجب توافرها لتتقلب الإشارة \neq إلى المساواة.

نظرية (١٢، ٢)

لتكن f دالة بمتغيرين x, y . إذا كانت الدوال: $f, f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx}$ ، متصلة على منطقة مفتوحة D ، فإن: $f_{yx} = f_{xy}$ لكل: $(x, y) \in D$. المشتقات الجزئية لدالة f من الرتبة الثالثة وأكثر تعرف بشكل مماثل، فمثلاً:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(f_{xx}) &= f_{xxx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \\ \frac{\partial}{\partial x}(f_{xy}) &= f_{xyx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}\end{aligned}$$

مثال (١٢، ٣)

إذا كان: $u = x + \frac{x-y}{y-z}$ ، فأوجد: $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ ، ثم أثبت أن: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 1$

الحل

لنشتق بالنسبة للمتغير x مع ثبات y و z ، فنجد: $\frac{\partial u}{\partial x} = 1 + \frac{(y-z)}{(y-z)^2} = 1 + \frac{1}{y-z}$

لنشتق بالنسبة للمتغير y مع ثبات x و z ، فنجد:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{-(y-z) - (x-y)}{(y-z)^2} = \frac{(z-x)}{(y-z)^2} \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{(x-y)}{(y-z)^2} \text{ فنجد: } \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{y-z + z-x + x-y}{(y-z)^2} + 1 = 1\end{aligned}$$

مثال (١٢، ٤)

إذا كان: $f(x, y) = (1+x)^m (1+y)^n$ ، فأوجد: $f_{xx}(0,0), f_{yy}(0,0), f_{xy}(0,0)$.

الحل

لنشتق بالنسبة للمتغير x : $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = m(1+x)^{m-1}(1+y)^n$ (ثبتنا y)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = m(m-1) \text{ ، ومنه : } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = m(m-1)(1+x)^{m-2}(1+y)^n$$

لنشتق بالنسبة للمتغير y (مع ثبات x) ، فنجد :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = n(1+x)^m(1+y)^{n-1} \text{ ، ومنه : } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = n(n-1)(1+x)^m(1+y)^{n-2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = n(n-1) \text{ ، لنشتق بالنسبة للمتغير } y \text{ (مع ثبات } x \text{) ، فنجد :}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = mn \text{ ، ومنه : } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = mn(1+x)^{m-1}(1+y)^{n-1}$$

مثال (٥، ١٢)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ ، فأثبت أن : } u(x, t) = A \sin(a\lambda t + \varphi) \sin(\lambda x)$$

الحل

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A \lambda \sin(a\lambda t + \varphi) \cos(\lambda x) \text{ (مع ثبات } t \text{)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A a \lambda \cos(a\lambda t + \varphi) \sin(\lambda x) \text{ (مع ثبات } x \text{)}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = A \lambda^2 \sin(a\lambda t + \varphi) \sin(\lambda x) \text{ (نشتق } \frac{\partial u}{\partial x} \text{ مع ثبات } t \text{)}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A a^2 \lambda^2 \sin(a\lambda t + \varphi) \sin(\lambda x) \text{ (نشتق } \frac{\partial u}{\partial t} \text{ مع ثبات } x \text{)}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 [-A \lambda^2 \sin(a\lambda t + \varphi) \sin(\lambda x)] = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ من الواضح أن :}$$

مثال (٦، ١٢)

$$\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2} \text{ ، أثبت أن الدالة : } z = y \varphi(x^2 - y^2) \text{ ، تحقق المعادلة :}$$

الحل

نضع : $w = x^2 - y^2$ ، فنجد : $z = y \varphi(w)$ ، ومنه :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \varphi'(w) \cdot 2x \text{ ، إذن : } \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi(w) - 2y^2 \varphi'(w)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} = 2y \varphi'(w) \\ \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\varphi(w)}{y} - 2y \varphi'(w) \end{cases}$$

بالجمع، نجد: $\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\varphi(w)}{y} = \frac{z}{y^2}$ (لاحظ أن: $\varphi(w) = \frac{z}{y}$)

مثال (١٢, ٧)

إذا كان: $u = \tan^{-1} \frac{y}{x}$ ، فإثبت صحة معادلة لابلاس:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (١٢, ١)$$

الحل

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\text{ومن ثم نجد (١٢, ١)} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{-2yx}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2yx}{(x^2 + y^2)^2}$$

مثال (١٢, ٨)

أوجد $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$ ، إذا كان: $u = x^\alpha y^\beta z^\lambda$.

الحل

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \lambda \beta x^\alpha y^{\beta-1} z^{\lambda-1} \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial z} = \lambda x^\alpha y^\beta z^{\lambda-1}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = \alpha \beta \lambda x^{\alpha-1} y^{\beta-1} z^{\lambda-1} \quad \text{لاحظ أن:}$$

تمارين (١, ١٢)

أوجد المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى للدوال المعرفة كما يلي:

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2} \quad (٢)$$

$$f(x, y) = \sin(x + 2y) \quad (١)$$

$$f(x, y) = e^{x-y} \quad (٤)$$

$$f(x, y) = \frac{y + 2x}{y - 2x} \quad (٣)$$

$$f(x, y) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right) \quad (٦)$$

$$f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4y^2}} \quad (٥)$$

$$f(x, y) = x^{\sqrt{y}} \quad (٨)$$

$$f(x, y) = \tan^{-1} \frac{x}{y} \quad (٧)$$

$$f(x, y) = (x + y)^z \quad (١٠)$$

$$f(x, y) = e^{\sin(x-y+2z)} \quad (٩)$$

$$f(x, y, z) = \sin^{-1} \frac{yz}{x} \quad (١٢)$$

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 - z^2} \quad (١١)$$

$$f(x, y) = e^{x \ln(y-z)} \quad (١٤)$$

$$f(x, y, z) = \cos^{-1}[\ln(x + y + z)] \quad (١٣)$$

(١٥) أوجد $f'_x(1, 2, 0)$ و $f'_y(1, 2, 0)$ و $f'_z(1, 2, 0)$ إذا كان: $f(x, y, z) = \ln(xy + z)$

$$(١٦) \text{ إذا كان: } z = c \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}, \text{ فأوجد: } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$(١٧) \text{ إذا كان: } z = \sqrt{2yx + y^2}, \text{ فأوجد: } \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

$$(١٨) \text{ إذا كان: } z = \tan^{-1} \frac{x+y}{1-xy}, \text{ فأوجد: } \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

$$(١٩) \text{ إذا كان: } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \text{ فأوجد: } \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}$$

(٢٠) إذا كان: $u = xy + yz + zx$, فأوجد المشتقات الجزئية من الرتب الثانية.

(١٢, ٥) قاعدة السلسلة

لتكن دالتين g, f بمتغير واحد، معرفتين بالصورة $y = f(u), u = g(x)$. نعرف دالة التركيب للدالة f مع الدالة g ، بالشكل:

$$y = (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

إذا كانت الدالة g قابلة للاشتقاق عند x وكانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند $u = g(x)$ ، فإن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

سنعمم فيما يلي هذه القاعدة من أجل دوال ذات عدة متغيرات. لتكن f, g, h دوالا بمتغيرين

اثنين، من الشكل: $z = f(u, v), u = g(x, y), v = h(x, y)$

إذا وافق كل زوج (x, y) من المنطقة $D \subset R^2$ ، زوجا (u, v) يقع في مجال f ، فإن دالة التركيب:

$z = f(g(x, y), h(x, y))$ تحدد المتغير z كدالة بالمتغيرين x, y مجالها D . فمثلا، إذا كان:

$$(x > 0, y > 0) \quad z = e^{uv}, u = \ln(x, y), v = x - 2y$$

$$\text{فإن: } z = e^{(x-2y)\ln(xy)} = [e^{\ln(xy)}]^{x-2y} = (xy)^{x-2y}$$

قاعدة السلسلة (The Chain Rule)

إذا كان $z = f(u, v)$ حيث $u = g(x, y)$ و $v = h(x, y)$. إذا كانت المشتقات الجزئية

للدوال f, g, h متصلة على منطقة مفتوحة D ، فإن:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \quad (١٢, ٢)$$

حالة خاصة

إذا كان: $z = f(u, v)$ ، حيث: $u = g(x)$ و $v = h(x)$ ، فإن:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

وهذه نتيجة مباشرة من المعادلة الأولى من (١٢, ٢)، بعد ملاحظة أن u, v يتبعان متغيرا واحدا x

وأن z يتبع ضمنا نفس المتغير x .

مثال (٩، ١٢)

(٣، ١٢)

$$\text{إذا كان: } u = \frac{y}{x^2 + y^2} \text{ و } v = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

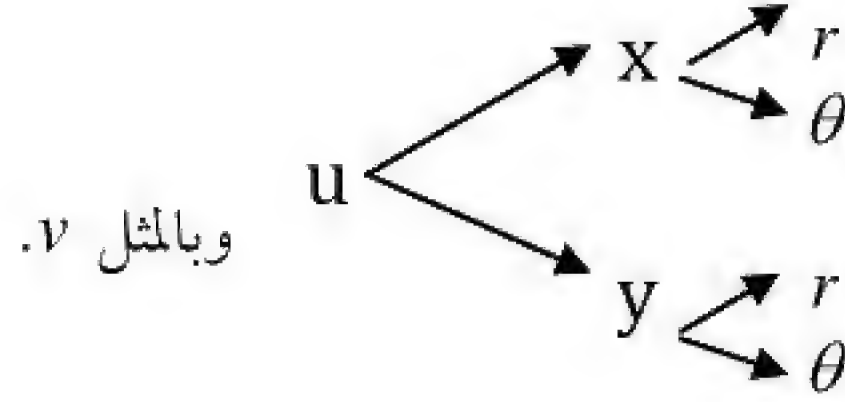
وكان: $x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$ ، فأوجد: $\frac{\partial u}{\partial r}$ و $\frac{\partial v}{\partial \theta}$ ، ثم أثبت أن:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}$$

الحل

الطريقة الأولى:

u, v يتبعان المتغيرين x و y وكلاهما يتبعان المتغيرين r, θ :



$$\text{إذن: حسب قاعدة السلسلة: } \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta}, \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\text{وبالتالي: } \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \cdot \cos \theta + \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \cdot \sin \theta$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} \cdot (-r \sin \theta) - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \cdot r \cos \theta$$

$$\text{لاحظ أن: } \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}$$

الطريقة الثانية: بالتعويض عن x و y بما يساويها بدلالة r و θ في

$$(٣، ١٢)، \text{ نجد: } u = \frac{\sin \theta}{r}, v = \frac{\cos \theta}{r} \text{ (لاحظ أن: } x^2 + y^2 = r^2 \text{)}$$

$$\text{بالتالي، فإن: } \frac{\partial v}{\partial \theta} = -\frac{\sin \theta}{r}, \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\sin \theta}{r^2} \text{ ومنه نجد المطلوب.}$$

مثال (١٠، ١٢)

أوجد $\frac{\partial u}{\partial t}$ باستخدام قاعدة السلسلة، إذا كان: $u = x^2 + y^2, x = \sin t, y = \cos t$

الحل

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = 2x \cos t - 2y \sin t = 2 \sin t \cos t - 2 \cos t \sin t = 0$$

مثال (١١، ١٢)

إذا كان: $z = x^2 + y^2$ وكان: $x = uv$ و $y = \frac{u}{v}$ ، فأوجد باستخدام قاعدة السلسلة: $\frac{\partial z}{\partial u}$

الحل

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = 2x \cdot v + 2y \cdot \frac{1}{v} = 2uv^2 + \frac{2u}{v^2}$$

تمارين (٢، ١٢)

- (١) أوجد: $\frac{dz}{dt}$ إذا كان: $z = \frac{x}{y}$ حيث: $y = \ln t, x = e^t$.
- (٢) أوجد: $\frac{du}{dt}$ إذا كان: $u = \ln \left(\sin \frac{x}{\sqrt{y}} \right)$ حيث: $y = \sqrt{t^2 + 1}, x = 3t^2$.
- (٣) أوجد: $\frac{du}{dt}$ إذا كان: $u = xyz$ حيث: $z = \tan t, y = \ln t, x = t^2 + 1$.
- (٤) أوجد: $\frac{du}{dt}$ إذا كان: $u = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ حيث: $z = 4, y = 2 \sin t, x = 2 \cos t$.
- (٥) أوجد: $\frac{dz}{dx}$ إذا كان: $z = u^v$ حيث: $v = \cos x, u = \sin x$.
- (٦) أوجد: $\frac{dz}{dx}$ إذا كان: $z = \tan^{-1} \frac{y}{x}$ حيث: $y = x^2$.
- (٧) أوجد: $\frac{dz}{dx}$ إذا كان: $z = x^y$ حيث: $y = \varphi(x)$.
- (٨) أوجد: $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ إذا كان: $z = f(u, v)$ حيث: $v = e^{xy}, u = x^2 - y^2$.
- (٩) أوجد: $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$ إذا كان: $z = \tan^{-1} \frac{x}{y}$ حيث: $x = u \sin v, y = u \cos v$.
- (١٠) أوجد: $\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial x}$ إذا كان: $z = f(u)$ حيث: $u = xy + \frac{y}{x}$.

(١٢, ٦) الدوال الضمنية

The Implicit Functions

لتكن f دالة بمتغيرين: x, y تحقق المساواة: $f(x, y) = 0$ (١٢, ٤)

إذا كانت المشتقتان: $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x}$ متصلتين داخل قرص دائري مفتوح (لا يحوي نقاط محيطه)، وكان:

$\frac{\partial f}{\partial y}$ لا يساوي الصفر عند نقطة (x, y) داخل القرص تحقق المساواة (١٢, ٤)، عندئذ توجد

دالة ضمنية F قاعدتها: $y = F(x)$ ، تحقق المعادلة (١٢, ٤) ومشتقتها تساوي:

$$(١٢, ٥) \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

مثال (١٢, ١٢)

إذا كان: $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ (١٢, ٦)

فأوجد: $\frac{dy}{dx}$

الحل

إذن استناداً للمساواة (١٢, ٥)، فإن: $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \frac{\partial f}{\partial x} = 2x$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$

لاحظ أن المشتقتين: $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x}$ متصلتان على المستوى IR^2 بأكمله لأنها كثيرتا حدود، وأن النقاط

المحققة للمعادلة تمثل دائرة معادلتها: $x^2 + y^2 = 1$ مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها يساوي 1

وأن: $\frac{dy}{dx}$ يمثل ميل المماس لمنحنى الدائرة وهو معرف عند جميع نقاط الدائرة باستثناء

النقطتين A, B المحققتين للشرط: $y = 0$ وهما تقعان على المحور x .

لتكن f دالة بثلاثة متغيرات : x, y, z تحقق المساواة :

$$f(x, y, z) = 0 \quad (١٢, ٧)$$

إذا كانت المشتقات : $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ من الدرجة الأولى للدالة f متصلة داخل كرة مفتوحة ، وكان $\frac{\partial f}{\partial z}$ لا يساوي الصفر عند نقطة (x, y, z) داخل الكرة تحقق المساواة (١٢, ٧) ، عندئذ توجد دالة ضمنية F قاعدتها : $z = F(x, y)$ تحقق المساواة (١٢, ٧) بحيث يكون:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

مثال (١٣, ١٢)

إذا كان : $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ (١٢, ٨)

فأوجد المشتقتين : $\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial x}$

الحل

بالتالي فإن : $\frac{\partial f}{\partial z} = 2z, \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \frac{\partial f}{\partial x} = 2x$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z}, z \neq 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{2y}{2z} = -\frac{y}{z}, z \neq 0$$

لاحظ أن المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى للدالة f هي كثيرات حدود وهي متصلة على R^3 الفضاء الإقليدي ثلاثي البعد بأكمله.

لاحظ أيضاً أن المعادلة (١٢, ٨) تمثل كرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها الوحدة . من جهة أخرى فإن : $z = 0$ يوافقها نقاط الدائرة $x^2 + y^2 = 1$ الواقعة في المستوى xy وعند نقاط هذه الدائرة المشتقتان : $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ غير موجودتين.

مثال (١٤, ١٢)

إذا كانت المعادلة : $x^3z - 5y^4 = 11$ ، تعرف دالة ضمنية من الشكل : $z = F(x, y)$ مشتقاتها الجزئية موجودة ومتصلة، فأوجد : $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

الحل

لنكتب المعادلة على الشكل : $f(x, y, z) = x^3z - 5y^4 - 11 = 0$

من الملاحظ أن : $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2z, \frac{\partial f}{\partial y} = -20y^3, \frac{\partial f}{\partial z} = x^3$

إذن : $(x \neq 0) \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{3x^2z}{x^3} = -\frac{3z}{x}$

$(x \neq 0) \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{-20y^3}{x^3} = 20\frac{y^3}{x^3}$

مثال (١٥, ١٢)

إذا كانت المعادلة : $y^3 = 1 - x^2 \sin(xy)$ ، تعرف دالة ضمنية من الشكل : $y = F(x)$

مشتقتها موجودة ومتصلة فأوجد : $\frac{dy}{dx}$

الحل

لنكتب المعادلة على الشكل : $f(x, y) = y^3 + x^2 \sin(xy) - 1 = 0$

من الملاحظ أن :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \sin(xy) + x^2 \cos(xy) \cdot y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + x^2 \cos(xy) \cdot x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \quad \text{لكن :}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x \sin(xy) + x^2 y \cos(xy)}{3y^2 + x^3 \cos(xy)} \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0\right) \quad \text{إذن :}$$

مثال (١٦، ١٢)

إذا كانت المساواة : $x \cos y + y \cos z + z \cos x = 1$

تعرف دالة ضمنية من الشكل : $z = F(x, y)$ مشتقاتها الجزئية موجودة ومتصلة ، فأوجد :

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$$

الحل

تكتب المعادلة على الشكل :

$$f(x, y, z) = x \cos y + y \cos z + z \cos x - 1 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos y - z \sin x, \frac{\partial f}{\partial y} = -x \sin y + \cos z \quad \text{لكن :}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -y \sin z + \cos x$$

بالتالي، فإن :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\cos y - z \sin x}{-y \sin z + \cos x}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{-x \sin y + \cos z}{-y \sin z + \cos x}$$

تمارين (٣, ١٢)

(١) أوجد $\frac{dy}{dx}$ ، فيما يلي:

(أ) $x^2 + y^2 - 4xy = 0$

(ب) $-1 + xy + \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$

(ج) $x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2 = 0$

(د) $y = x + \ln y$

(هـ) $y + xe^{y^2} + x = 0$

(الدوال السابقة يعرف كل منها دالة ضمنية من الشكل $y = F(x)$ مشتقتها موجودة ومتصلة)(٢) أوجد $\frac{\partial z}{\partial y}$ ، $\frac{\partial z}{\partial x}$ إذا كان:

(أ) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1$

(ب) $x^2y + y^2z + z = 1$

(ج) $y = e^{xz}$

(د) $y^2 \ln(xy) + z^2 = 2$

(هـ) $z \sin^2(x + 2y) - z^2x = 2$

(و) $z \sin(x^2 + y^2) = 3$

(المعادلات السابقة تعرف كل منها دالة ضمنية من الشكل: $z = F(x, y)$ مشتقاتها الجزئية

من الرتبة الأولى موجودة ومتصلة على منطقة (D).

الفصل الثالث عشر

المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى

THE FIRST ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

لتكن f دالة بمتغير واحد x معرفة بالمساواة $f(x) = y = e^{-x}$. من الواضح أن مشتقتها الأولى y' ، تساوي $y' = -e^{-x}$. المتغير غير المستقل y والذي يتبع في تغيره المتغير المستقل x والمشتقة y' يرتبطان بالمساواة: $y + y' = 0$. نطلق على هذه المعادلة، بالمعادلة التفاضلية.

بشكل عام: أي علاقة تربط المتغير المستقل x والمتغير y التابع له ومشتقات y المختلفة، ومن الشكل: $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ تسمى بالمعادلة التفاضلية من الرتبة n ، و n هو رتبة أعلى مشتقة في هذه المعادلة. فمثلاً: $y' + y = x^2$ ، هي من الرتبة الأولى. والمعادلة $y'' + 2y' + y = x$ هي من الرتبة الثانية. اهتمامنا هنا يتركز على المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى.

تعريف (١، ١٣)

حل المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى ومن الشكل: $F(x, y, y') = 0$ هو إيجاد جميع الدوال من الشكل: $y = f(x)$ والتي تحقق هذه المعادلة. نسمي مجموعة حلول المعادلة التفاضلية، بالحل العام لها. سنطلق فيما يلي على y قيمة الدالة f عند x بالدالة تجاوزاً وللتسهيل.

مثال (١٣, ١)

برهن أن : $y = e^{-x}(x + 2)$ ، حل للمعادلة التفاضلية : $y' + y = e^{-x}$

الحل

من الواضح أن : $y' = -e^{-x}(x + 2) + e^{-x}$. بالتعويض عن y و y' بما يساويهما في المعادلة التفاضلية ، نجد أنها محققة. لاحظ أن :

$$y' + y = -e^{-x}(x + 2) + e^{-x} + e^{-x}(x + 2) = e^{-x}$$

(١٣, ١) المعادلات التفاضلية القابلة للفصل

The Separable Differential Equations

الشكل النموذجي لهذا النوع من المعادلات ، هو :

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}, h(y) \neq 0$$

وهذه تكتب على الشكل : $h(y)dy = g(x)dx$ لنفرض أن : $g(x)$ و $h(y)$ قابلتان للتكامل .بتكامل طرفي المعادلة السابقة ، نجد : $\int h(y)dy = \int g(x)dx$ أو : $H(y) = G(x) + c$ (c ثابت اختياري) والمعادلة الأخيرة تعبر ضمناً عن y كدالة فيالمتغير x ، والمتغير y يمثل حل المعادلة التفاضلية وهو يتبع دوماً ثابتاً اختيارياً c

مثال (١٣, ٢)

حل المعادلة التفاضلية : $yy' = -x$ ، ثم أوجد الحل الخاص المار بالنقطة $(0,1)$.

الحل

لاحظ أن : $y' = \frac{dy}{dx}$ ، بالتالي فإن المعادلة تكتب على الشكل :

$$ydy = -x dx \dots (منفصلة المتحولات)$$

بتكامل الطرفين ، نجد $\int ydy = -\int xdx$ ومنه : $\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c$.(c ثابت اختياري) .

بالتالي، فإن: $y^2 + x^2 = 2c$ (الحل العام)

لإيجاد الحل الخاص ، نعوض عن إحداثيي النقطة (0,1) في الحل العام ، فنجد :

$$c = \frac{1}{2} \Leftarrow 1 = 2c$$

$x^2 + y^2 = 1$. وهي تمثل دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها الوحدة .

مثال (١٣, ٣)

$$\text{حل المعادلة التفاضلية : } x \cos^2 y + \tan y \frac{dy}{dx} = 0$$

الحل

لنحاول وضعها على الصورة : $P(x)dx = Q(y)dy$

من الممكن أن نكتب المعادلة على الشكل :

$$x \cos^2 y dx = -\tan y dy$$

نقسم طرفي المعادلة على $\cos^2 y$ ، فنجد :

$$x dx = -\frac{\sin y}{\cos^3 y} dy = -\sin y (\cos y)^{-3} dy$$

(لاحظ أن مشتقة ما بين القوسين في الطرف الثاني هو $-\sin y$)

بتكامل الطرفين نجد:

$$\int x dx = \int (\cos y)^{-3} (-\sin y) dy \text{ ، ومنه : } \frac{x^2}{2} = \frac{(\cos y)^{-2}}{-2} + c \text{ ، إذن:}$$

$$x^2 = -\frac{1}{(\cos y)^2} + 2c \Rightarrow x^2 + \sec^2 y = 2c$$

(١٣, ٢) المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى

الشكل العام للمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى ، هو :

(١٣, ١)

$$(y' = \frac{dy}{dx}) \quad \boxed{\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)}$$

حيث P, Q دالتان متصلتان على الفترة (a, b)

الحل باستخدام عامل التكميل:

أ) حل المعادلة (١٣, ١) نبحث عن العامل μ والمسمى بعامل التكميل والمعرف بالصورة:

$$\mu = e^{\int P(x) dx} \quad (١٣, ٢)$$

ب) نضرب طرفي المعادلة (١٣, ١) بهذا العامل فتصبح على الشكل:

$$\mu(y' + P(x)y) = \mu Q(x) \quad (١٣, ٣)$$

من الملاحظ أن الطرف الأيسر هو مشتقة للمقدار μy ، بالتالي فإن المعادلة (١٣, ٣) تكتب على الصورة:

$$\frac{d}{dx}(\mu y) = \mu Q(x)$$

بتكامل الطرفين ، نجد :

$$\mu y = \int \mu Q(x) dx + c \quad (c \text{ ثابت اختياري})$$

وبتقسيم الطرفين على μ ، نجد :

$$y = \frac{1}{\mu} \left(\int \mu Q(x) dx + c \right) \quad (١٣, ٤)$$

مثال (١٣, ٤)

حل المعادلة التفاضلية: $y' + y = e^{-x}$ ،

ثم أوجد الحل الخاص المار بالنقطة (0,1)

أ) لاحظ أن: $P(x) = 1$ ، بالتالي فإن μ ، يساوي :

$$\mu = e^{\int P(x) dx} = e^{\int dx} = e^x$$

ب) لاحظ أن: $Q(x) = e^{-x}$ ، إذن :

$$\int \mu Q(x) dx = \int e^x e^{-x} dx = \int dx = x$$

ج) واستناداً للمعادلة $y = \frac{1}{\mu} \left(\int \mu Q(x) dx + c \right)$ ، فإن:

$$y = \frac{1}{e^x} (x + c) = x e^{-x} + c e^{-x} \quad (c \text{ ثابت اختياري})$$

الحل الخاص: من الملاحظ أن النقطة (0,1) تحقق المعادلة السابقة ، إذن: $1 = c$ ، بالتالي فإن الحل

الخاص هو: $y = e^{-x} (x + 1)$

مثال (١٣, ٥)

(١٣, ٥) حل المعادلة التفاضلية : $(x > 0) \quad xy' + y = xe^{-x}$

الحل

المعادلة ليست على الشكل النموذجي . لنقسم طرفي المعادلة على x ، فنجد :

$$y' + \frac{1}{x} y = e^{-x}$$

(أ) من الملاحظ أن : $P(x) = \frac{1}{x}$ ، بالتالي فإن :

$$\mu = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$$

(ب) لاحظ أن : $Q(x) = e^{-x}$ ، إذن :

$$\int \mu Q(x) dx = \int x e^{-x} dx$$

لنكامل بالتجزيء : لنضع $du = e^{-x} dx$ ، $v = x$. بالتالي فإن :

$$dv = dx , u = -e^{-x} \text{ , إذن :}$$

$$\int x e^{-x} dx = uv - \int u dv = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x}$$

(ج) فالحل المطلوب :

$$y = \frac{1}{\mu} (\int \mu Q(x) + c) = \frac{1}{x} (-x e^{-x} - e^{-x} + c)$$

$$y = -e^{-x} - \frac{e^{-x}}{x} + \frac{c}{x} \text{ : بالتالي فإن :}$$

مثال (١٣, ٦)

حل المعادلة التفاضلية : $y' \sin x + 2y \cos x = \frac{1}{\sin x}$

الحل

$$y' + \frac{2 \cos x}{\sin x} y = \frac{1}{\sin^2 x} \text{ : فنجد :}$$

$$\mu = e^{2 \int \frac{\cos x}{\sin x} dx} = e^{2 \ln(\sin x)} = e^{\ln(\sin^2 x)} = \sin^2 x \text{ : عامل التكميل :}$$

(لاحظ عند تكامل الكسر : $\frac{\cos x}{\sin x}$ ، أن البسط مشتقة للمقام)

(فرضنا أن : $\sin x > 0$ ، ونحصل على نفس الحل إذا كان : $\sin x < 0$)

$$\text{ب) لاحظ أن : } \int \mu Q(x) dx = \int \sin^2 x \cdot \frac{1}{\sin^2 x} dx = x$$

$$\text{ج) إذن الحل ، هو : } y = \frac{1}{\mu} (\int \mu Q(x) dx + c)$$

$$\left(\frac{1}{\sin x} = \csc x : \text{ لاحظ أن : } \right) = \frac{1}{\sin^2 x} (x + c) = \csc^2 x (x + c)$$

تمارين (١, ١٣)

حل المعادلات التفاضلية التالية :

$$\sec^2 x dx - e^y dy = 0 \quad (١) \quad \sec xy' = \csc y \quad (٢)$$

$$y' = \frac{1+y^2}{1+x^2} \quad (٣) \quad x(1+y)dx - (1+x^2)dy \quad (٤)$$

$$xy^3 dx + e^{x^2} dy = 0 \quad (٥) \quad x \tan y \frac{dy}{dx} = 1 \quad (٦)$$

$$ye^{2x} dx = (4 + e^{2x}) dy \quad (٧) \quad x \cos^2 y dx + \tan y dy = 0 \quad (٨)$$

(٩) حل المعادلة التفاضلية التالية : $y' = xe^{y-x^2}$ ، ثم أوجد الحل الخاص المار بالنقطة $(e, 0)$

حل المعادلات التفاضلية التالية :

$$\frac{dy}{dx} + 2y = e^{2x} \quad (١٠) \quad x \frac{dy}{dx} + y = x^4 \quad (١١)$$

$$x^2 \frac{dy}{dx} + y = 1 \quad (١٢) \quad \frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = \frac{\sin x}{x} \quad (١٣)$$

(١٤) حل المعادلة التفاضلية : $y' = -2y + 4x$ ثم أوجد الحل الخاص المحقق للشرط

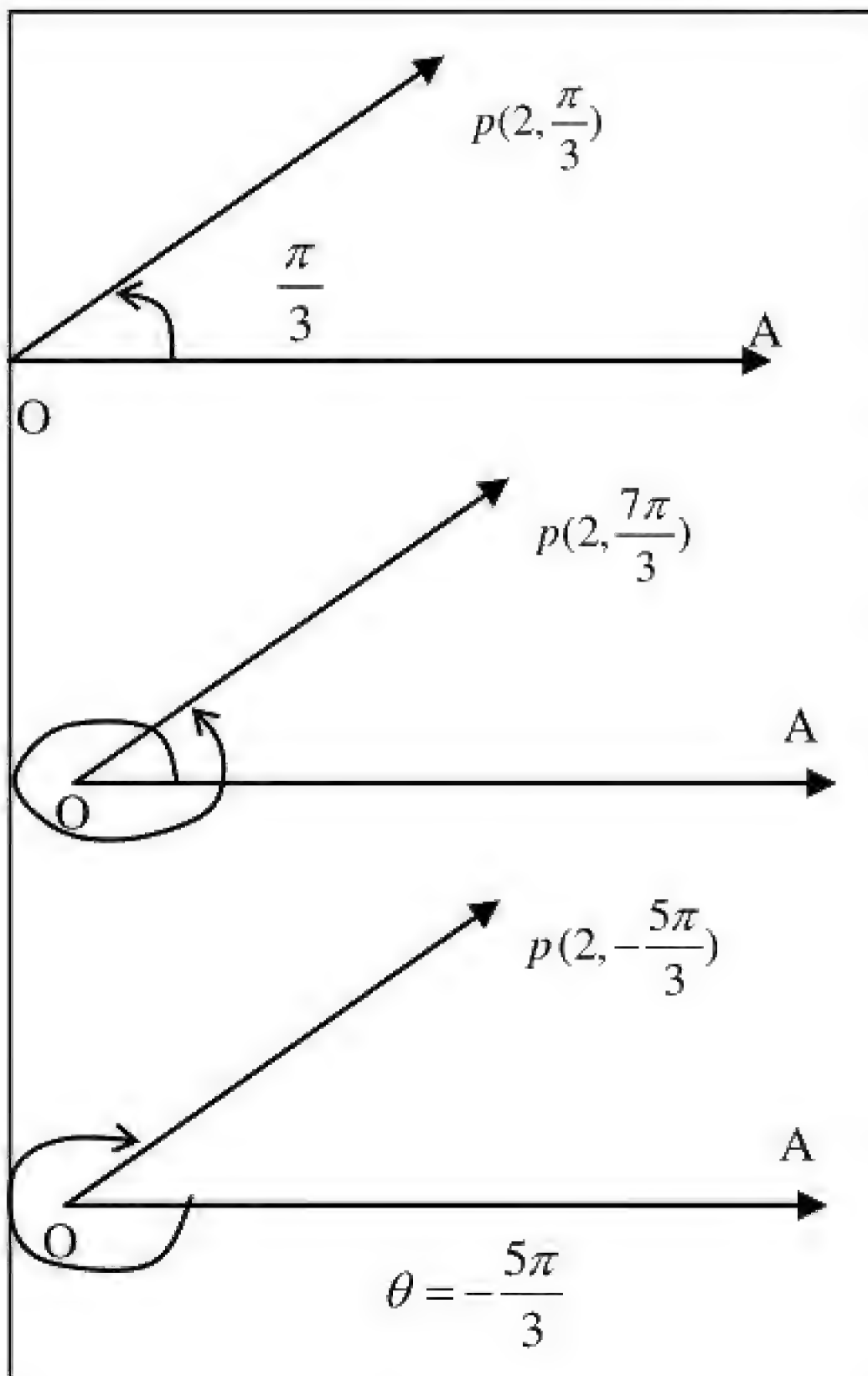
$$y(0) = 1$$

المعادلات الوسيطة والإحداثيات القطبية

PARAMETRIC EQUATIONS AND POLAR COORDINATES

(١٤, ١) المنحنيات القطبية

The Polar Curves

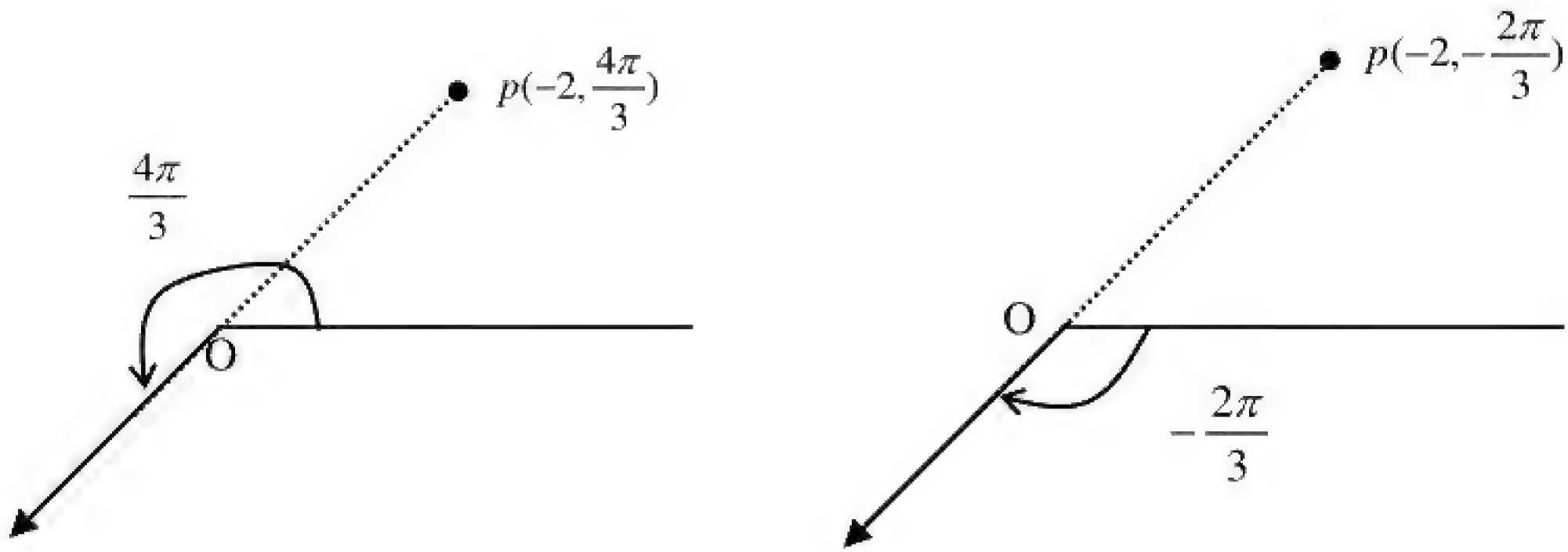


شكل (١٤, ١).

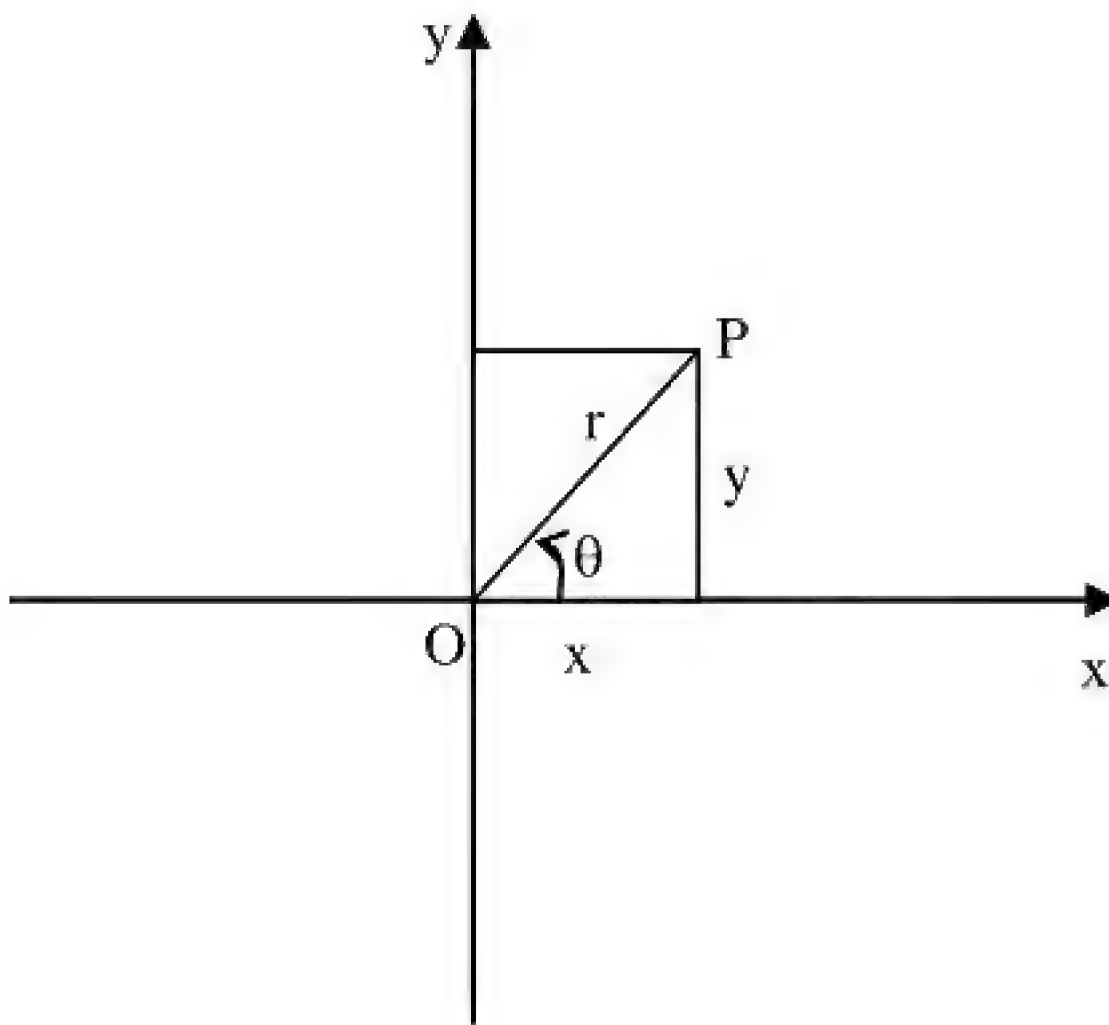
الإحداثيات القطبية (Polar Coordinates)
نعلم أن النقطة p في المستوى الديكارتي تتحدد
بزوج مرتب من الأعداد الحقيقية (x, y) .
سنعرض الآن لطريقة أخرى لتحديد هذه
النقطة. لتكن O نقطة في المستوى ندعوها
بالقطب (أو نقطة الأصل) ولنرسم في هذا
المستوى نصف مستقيم موجه OA (ندعوه
بالمحور القطبي) (Polar Axis).

لتحديد أية نقطة p (لا تنطبق على O)
في هذا المستوى (ندعوه بالمستوي
القطبي)، ندير المحور القطبي حول O
بزاوية موجهة قياسها θ حتى ندرك
النقطة p (سواء بالجهة الموجبة المخالفة
لاتجاه عقارب الساعة أو الجهة السالبة).

إذا كان $|Op|=r(r>0)$ ، فإن الزوج المرتب (r, θ) كاف لتحديد النقطة p . وهناك عدة طرق لتحديد هذه النقطة فمثلاً: $p(2, \frac{\pi}{3})$ تتحدد كما في الشكل (١٤، ١). إذا اعتبرنا Op محورا موجها وافترضنا r هو إحداثي النقطة على هذا المحور، فإنه يمكن للعدد r أن يأخذ قيما موجبة وقيما سالبة وفي هذه الحالة فإن نظير النقطة: $p(r, \theta)$ بالنسبة للقطب O هي النقطة $p'(-r, \theta)$. لاحظ أن النقطة $p(2, \frac{\pi}{3})$ تتحدد أيضا بالصورتين التاليتين:



شكل (١٤، ٢).



شكل (١٤، ٣).

(٢) العلاقة بين الإحداثيات الديكارتية والإحداثيات القطبية.
يمكن أن نستنتج من الشكل (١٤-٣) أن:

(١٤, ١)

$$\begin{aligned} & y = r \sin \theta, \quad x = r \cos \theta \text{ (أ)} \\ & r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan \theta = \frac{y}{x} \text{ (ب)} \end{aligned}$$

كما يمكن أن نثبت صحة العلاقات في (١٤, ١) عندما يكون \vec{Op} محورا موجهها وتأخذ 0 جميع القيم الممكنة.

مثال (١٤, ١)

اكتب المعادلات التالية بالشكل القطبي:

$$(x^2 - y^2)^2 = x^2 + y^2 \text{ (٢)} \quad x^2 + y^2 - 2x = 0 \text{ (١)}$$

$$ax + by = c \text{ (٣)} \quad a, b, c \neq 0 \text{ لا تساويان الصفر معا.}$$

الحل

(١) بالتعويض عن قيمتي x, y بما يساويها من العلاقة (١٤, ١)، نجد:

$$r^2 - 2r \cos \theta = 0 \text{ وبفرض } r \neq 0, \text{ فإن } r = 2 \cos \theta$$

لاحظ أنه بالتعويض عن θ بالقيمة $\frac{\pi}{2}$ ، نجد $r = 0$ ، إذن:

$$(x-1)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow r = 2 \cos \theta$$

وهذه معادلة دائرة مركزها (1,0) وطول نصف قطرها الوحدة.

(٢) بالمثل فإن المعادلة القطبية للمنحني: $(x^2 - y^2)^2 = x^2 + y^2$ هي:

$$\Leftrightarrow (r \neq 0) r^2 \cos^2 2\theta = 1 \Leftrightarrow (r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta)^2 = r^2$$

$$r = \pm \frac{1}{\cos 2\theta} \Leftrightarrow r^2 = \frac{1}{\cos^2 2\theta}$$

من الملاحظ أن نقطة الأصل هي حل للمعادلة الديكارتية ولا يظهر في الصورة الأخيرة للمعادلة القطبية.

(٣) المعادلة القطبية للمنحني هنا، هي:

$$r = \frac{c}{a \cos \theta + b \sin \theta} \Leftrightarrow r(a \cos \theta + b \sin \theta) = c$$

وهذه معادلة مستقيم لا يمر بنقطة الأصل.

المنحني القطبي

نسمي مجموعة النقاط (r, θ) في المستوي القطبي والتي تحقق المساواة التالية:

$$r = f(\theta) \quad (١٤, ٢)$$

ببيان المعادلة القطبية أو المنحني البياني للمعادلة القطبية $(١٤, ٢)$. فمثلا المعادلة: $r = 1$ تمثل بيانيا دائرة مركزها القطب وطول نصف قطرها الوحدة.

تعريف (١٤, ١)

نقول إن المنحني البياني للمعادلة: $r = f(\theta)$ متماثل بالنسبة للقطب، ذلك إذا تحققت المساواة:

$$f(\theta + \pi) = f(\theta) \quad (١٤, ٣)$$

هذا يعني أنه إذا كانت النقطة (r, θ) من نقاط المنحني، فإن النقطة: $(r, \pi + \theta)$ هي أيضاً من نقاط المنحني، شكل (١٤, ٤) (أ).

تعريف (١٤, ٢)

نقول إن المنحني البياني للمعادلة $(١٤, ٢)$ متناظر بالنسبة للمحور القطبي، ذلك إذا تحققت المساواة:

$$f(-\theta) = f(\theta) \quad (١٤, ٤)$$

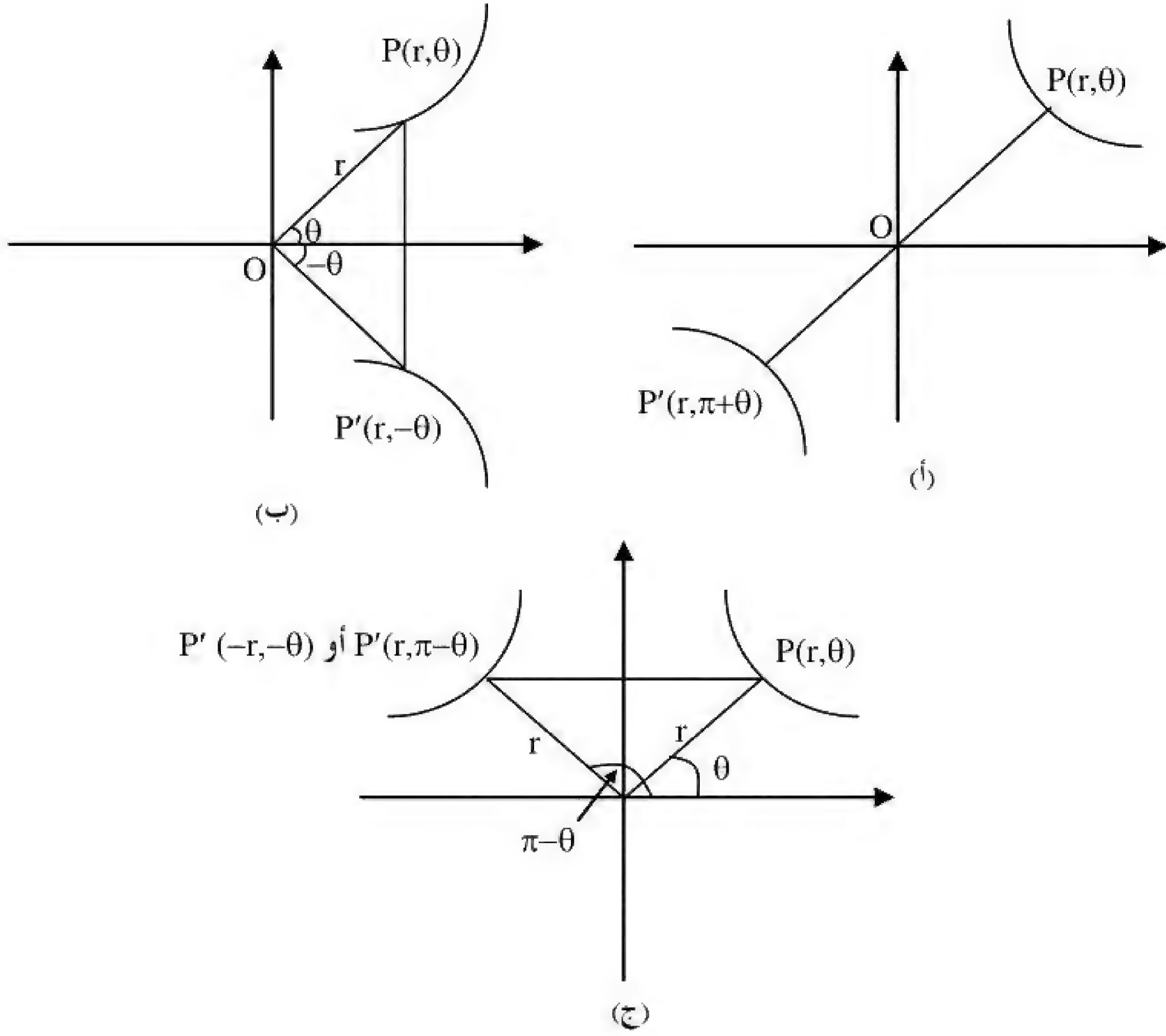
هذا يعني أنه إذا كانت النقطة (r, θ) من نقاط المنحني، فإن النقطة: $(r, -\theta)$ هي أيضاً من نقاط المنحني، شكل (١٤, ٤) (ب).

تعريف (١٤, ٣)

نقول إن المنحني البياني للمعادلة $(١٤, ٢)$ متناظر بالنسبة للمحور y (العمودي على المحور القطبي)، ذلك إذا تحققت المساواة:

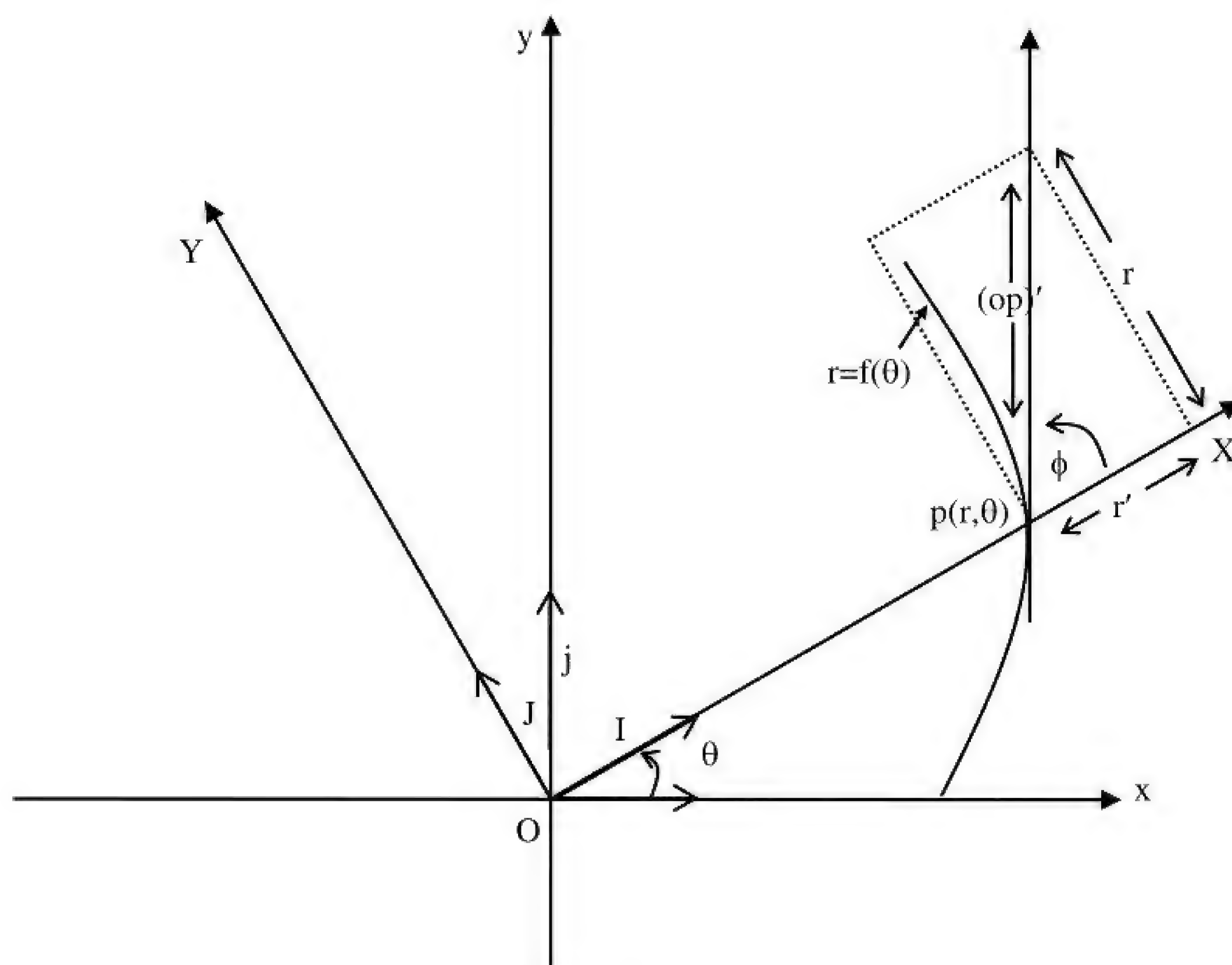
$$f(\pi - \theta) = f(\theta) \text{ ، أو المساواة: } f(-\theta) = -f(\theta) \quad (١٤, ٥)$$

هذا يعني أنه إذا كانت النقطة (r, θ) من نقاط المنحني، فإن النقطة $(r, \pi - \theta)$ أو النقطة $(-r, -\theta)$ هي أيضا من نقاط المنحني، شكل (٤، ١٤) (ج).



شكل (٤، ١٤).

زاوية المماس لمنحن قطبي



شكل (٥، ١٤).

ليكن X, Y ، المحورين الإحداثيين الناشئين من المحورين x, y بدوران حول المحور x بزاوية قياسها θ كما هو موضح في الشكل (٥، ١٤).

ليكن I, J متجهي الوحدة المحمولين على المحورين الجديدين، وليكن \vec{i}, \vec{j} متجهي الوحدة المحمولين على المحورين القديمين x, y . بفرض أن: $r = f(\theta)$ المعادلة القطبية للمنحني C وأن $p(r, \theta)$ نقطة منه. فمن الممكن أن نكتب:

$$op = rI \quad (r \text{ إحداثي } p \text{ على المحور } op)$$

بالاشتقاق نجد:

$$(14, 6) \quad \frac{dp}{d\theta} = (op)' = \frac{dr}{d\theta} I + r \frac{dI}{d\theta}$$

$$I = \cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j} \quad \text{لكن:}$$

$$\frac{dI}{d\theta} = -\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j} \quad \text{بالاشتقاق نجد:}$$

$$J = -\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j} \quad \text{لكن:}$$

$$\frac{dI}{d\theta} = J \quad \text{إذن:}$$

تكتب عند ذلك (١٤, ٦) على الشكل:

$$\boxed{\frac{dp}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta} I + rJ}$$

فللمتجه $(op)'$ المماس للمنحني C عند p مركبتان على المحورين X, Y هما r, r' . فظل الزاوية ϕ التي يصنعها هذا المماس مع Op تعطى بالصيغة:

$$(14, 7) \quad \boxed{(r' \neq 0) \quad \tan\phi = \frac{r}{r'}}$$

بيان (منحني) معادلة قطبية (The Graph of a Polar Equation)

لرسم بيان أي معادلة قطبية من الشكل: $r = f(\theta)$ ، نبحث عن:

(١) مجال f الكافي لرسم المنحني، ولنفرض أن r' موجودة على هذا المجال.

(٢) التناظرات الممكنة لهذا المنحني.

(٣) إشارة المشتقة الأولى r' ونستنتج منها سلوك r من تزايد وتناقص.

(٤) الزوايا ϕ المحددة بالعلاقة: $\tan\phi = \frac{r}{r'}$ عند بعض النقاط الميزة وفيما يلي نقدم الطرائق لرسم بعض المنحنيات من خلال الأمثلة التالية:

مثال (١٤, ٢)

ارسم المنحني التالي المحدد بالمعادلة القطبية:

$$r = a(1 + \cos\theta) \quad , \quad a > 0 \quad (\text{منحني القلب})$$

الحل

(١) المجال الكافي لرسم المنحني هو الفترة $[-\pi, \pi]$ (٢) المنحني متناظر بالنسبة للمحور القطبي لأن: $f(\theta) = f(-\theta)$ ، لذا يكفي رسمه على الفترة $[0, \pi]$

(٣) من الملاحظ أن:

$$\tan \phi = \frac{r}{r'} = \frac{1 + \cos \theta}{-\sin \theta}$$

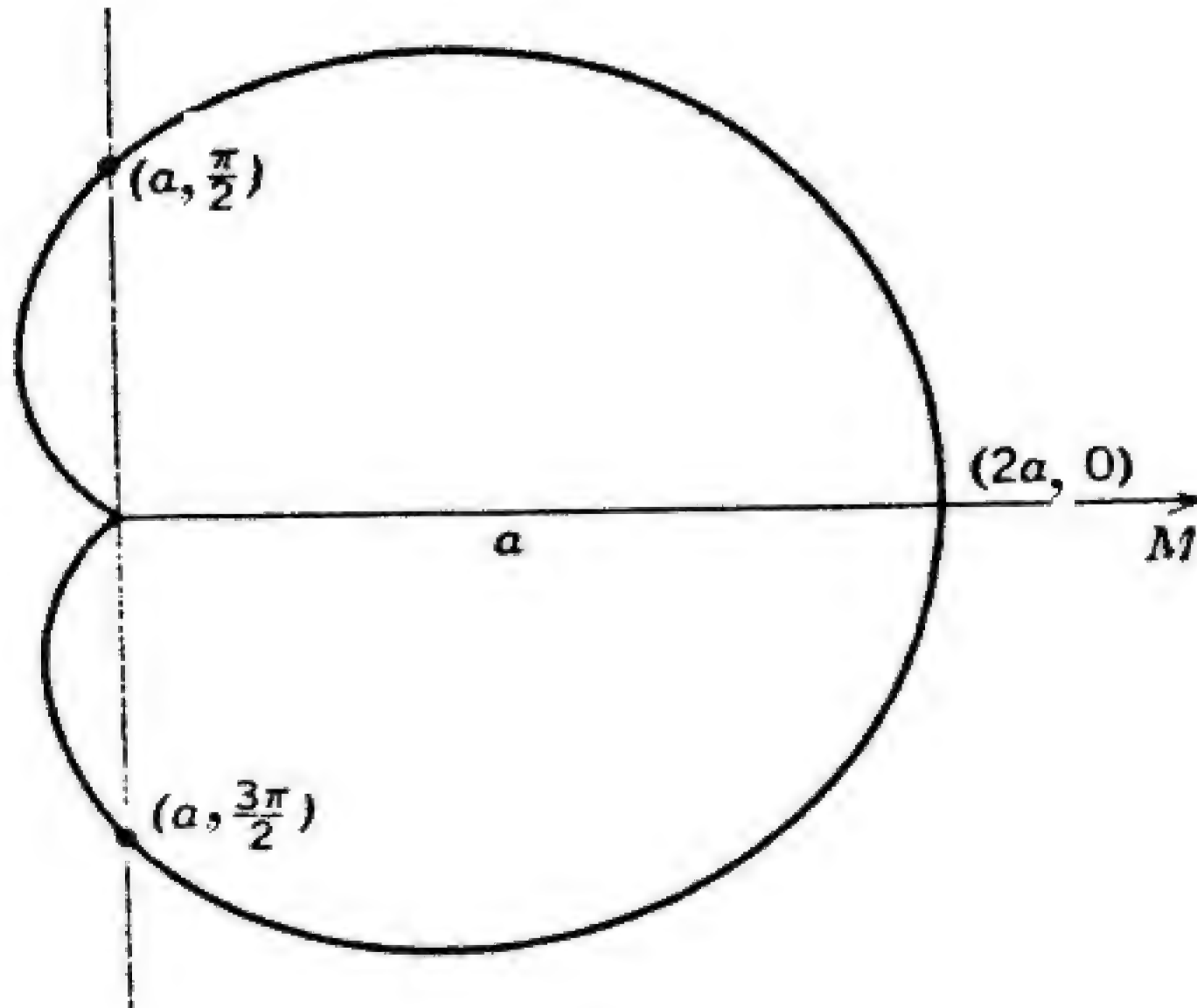
$$= -\frac{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} = -\cot \frac{\theta}{2}$$

(٤) دراسة إشارة المشتقة:

من الملاحظ أن: $r' = -a \sin \theta$ وأن: $r' = 0 \Leftrightarrow \theta = 0, \theta = \pi$. وإشارتها كما هو واضح سالبة دوماً على الفترة $(0, \pi)$ ، نلخص ذلك في الجدول التالي:

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π
r' (إشارة المشتقة)	0	-	0
r (سلوك r من تزايد وتناقص)	$2a$	\searrow	0
ϕ (قيم ϕ عند بعض النقاط)	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π

(٥) الرسم



شكل (٦، ١٤).

مثال (١٤, ٣)

ارسم المنحني القطبي (Sketch the polar curve):

$$r = a\theta, \quad a > 0$$

(حلزون أرخميدس)

الحل

(١) المنحني متناظر بالنسبة للمحور y لأن: $f(-\theta) = -f(\theta)$ لذا يكفي رسمه على الفترة $[0, \infty)$

ثم أخذ نظير الجزء الناتج بالنسبة للمحور y .

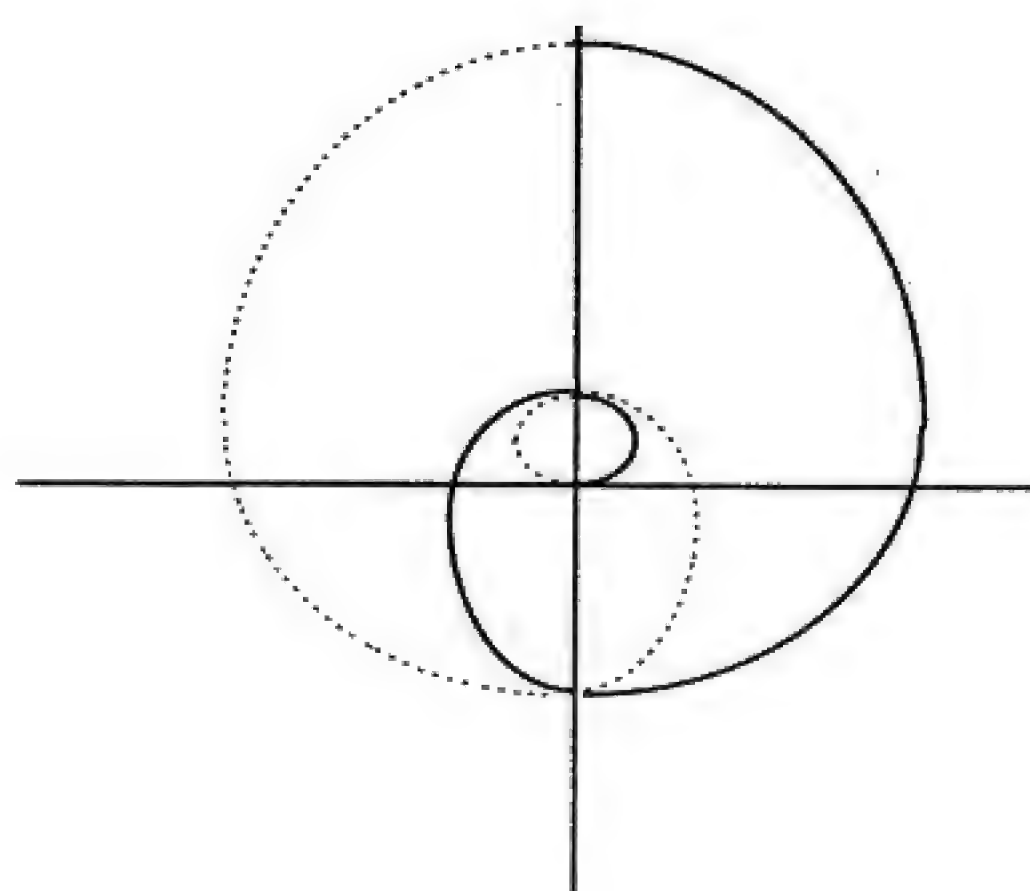
(٢) دراسة إشارة المشتقة:

من الملاحظ أن: $r' = a > 0$ ، ومنه يظهر الجدول التالي:

θ	0	∞
r'	+	
r	0	$\nearrow \infty$
$\tan^{-1}\theta = \phi$	0	$\frac{\pi}{2}$

لاحظ أن ϕ تزداد من الصفر حتى $\frac{\pi}{2}$ عندما تزداد θ من الصفر وتنتهي إلى ما لا نهاية.

(٣) الرسم



شكل (١٤, ٧).

مثال (٤, ١٤)

ارسم المنحني: $r = f(\theta) = \sin(4\theta)$

الحل

(١) من الملاحظ أن: $f(\theta + \frac{\pi}{2}) = f(\theta)$

هذا يعني أن النقطة $A(r, \theta + \frac{\pi}{2})$ تنشأ من النقطة $p(r, \theta)$ بدوران حول 0 بزاوية قدرها $\frac{\pi}{2}$. إذن لو رسمنا الجزء من المنحني الموافق للفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$ ثم قمنا بعملية دوران لهذا الجزء حول 0 بزاوية قدرها $\frac{\pi}{2}$ لحصلنا على نصف المنحني. وبإجراء هذه العملية بعد ذلك مرتين متتابعتين نحصل على المنحني بأكمله.

(٢) المشتقة الأولى: $r' = 4\cos(4\theta)$

تندم المشتقة على الفترة: $[0, \frac{\pi}{2}]$ عند النقاط:

$$\theta = \frac{\pi}{8}, \quad \theta = \frac{3\pi}{8}$$

$$\tan\phi = \frac{\sin(4\theta)}{4\cos(4\theta)} = \frac{1}{4}\tan(4\theta) \quad \text{وبملاحظة أن:}$$

فإن جدول إشارة المشتقة يظهر على الصورة:

θ	0		$\frac{\pi}{8}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{8}$		$\frac{\pi}{2}$
r'	4	+	0	−	4	−	0	+	
r	0	↗	1	↘	0	↘	1	↗	0
ϕ	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{\pi}{2}$		π

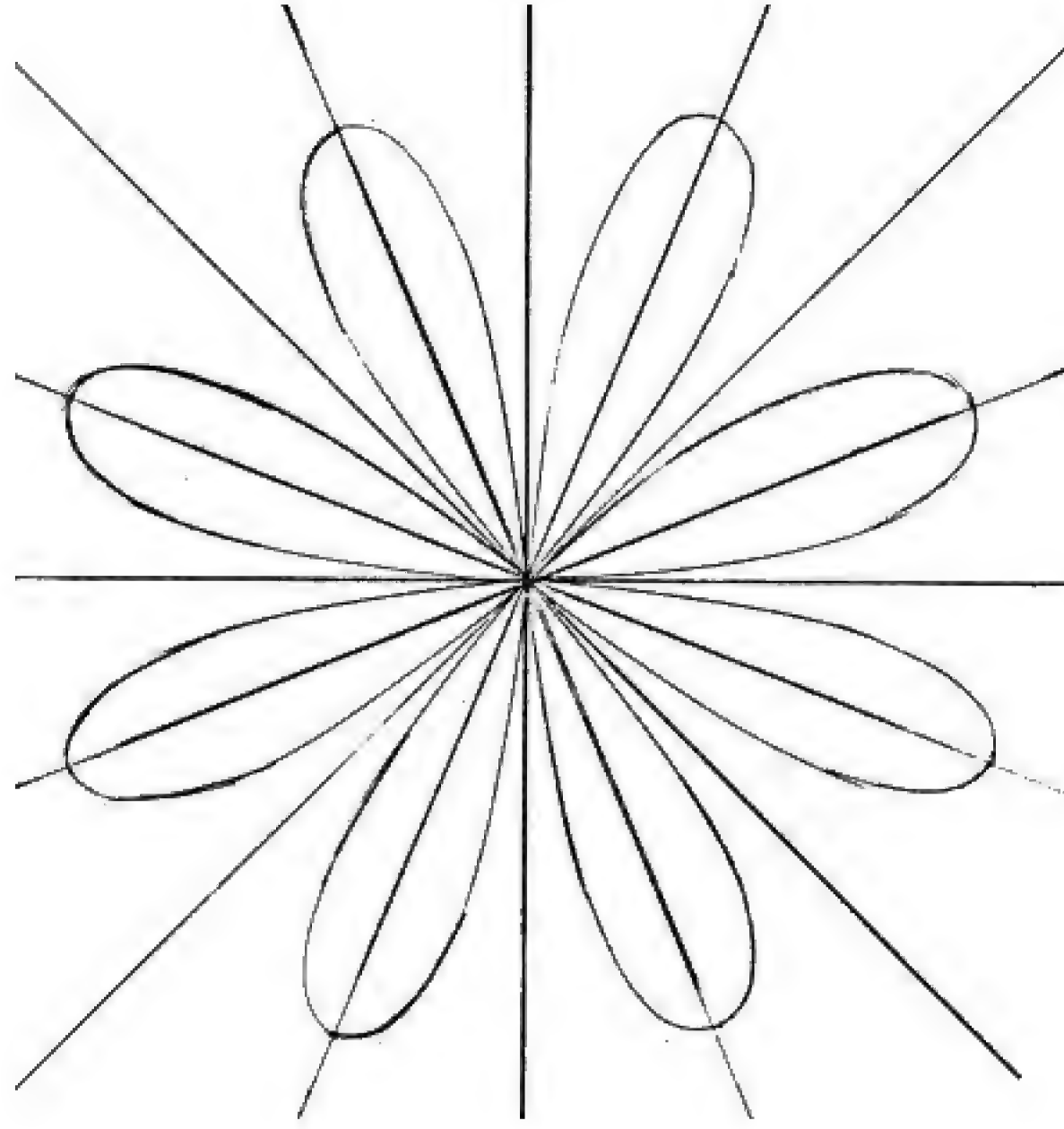
المماسات عند بعض النقاط المميزة:

(أ) عند النقطة (0,0): المماس للمنحني يمر المحور القطبي.

(ب) عند النقطة $(1, \frac{\pi}{8})$: المماس للمنحني عمودي على المستقيم $\theta = \frac{\pi}{8}$.(ج) عند النقطة $(0, \frac{\pi}{4})$: المماس للمنحني يمر المستقيم $\theta = \frac{\pi}{4}$.

- (د) عند النقطة $(-1, \frac{3\pi}{8})$: المماس للمنحني عمودي على المستقيم $\theta = \frac{3\pi}{8}$.
 (هـ) عند النقطة $(0, \frac{\pi}{2})$: المماس للمنحني يمس المحور y (انظر الشكل (١٤, ٨)).

بإجراء عمليات الدوران الموافقة، نجد الشكل التالي:



شكل (١٤, ٨).

لاحظ أن المنحني متماثل بالنسبة للمحور القطبي لأن:
 $f(\pi - \theta) = -f(\theta)$ ومتماثل حول المحور y ، لأن: $f(-\theta) = -f(\theta)$. وبما أن نظير النقطة (r, θ) بالنسبة للمستقيم $\theta = \frac{\pi}{8}$ هي النقطة $(r, \frac{\pi}{4} - \theta)$ وأن $f(\frac{\pi}{4} - \theta) = f(\theta)$ ، فإن المنحني متناظر بالنسبة للمستقيم: $\theta = \frac{\pi}{8}$.

مثال (١٤, ٥)

ارسم المنحني: $r = \sin 3\theta$

الحل

(١) من الملاحظ أن: $f(\theta + \frac{2\pi}{3}) = f(\theta)$ ، إذن يكفي رسم المنحني على الفترة $[0, \frac{2\pi}{3}]$ فنحصل على الجزء c_1 من المنحني. بدوران c_1 حول 0 بزاوية قدرها $\frac{2\pi}{3}$ نحصل على الجزء الثاني وبتكرار هذه العملية مرة أخرى نحصل على المنحني بأكمله. لاحظ أن المنحني متماثل (تناظر) بالنسبة للمحور y ، لأن: $f(-\theta) = -f(\theta)$ ولهذا السبب يكفي أن نرسم الجزء الأول وأخذ نظيره بالنسبة للمحور y للحصول على المنحني بأكمله كما سنلاحظ فيما يلي.

(٢) المشتقة الأولى: $r' = 3\cos 3\theta$

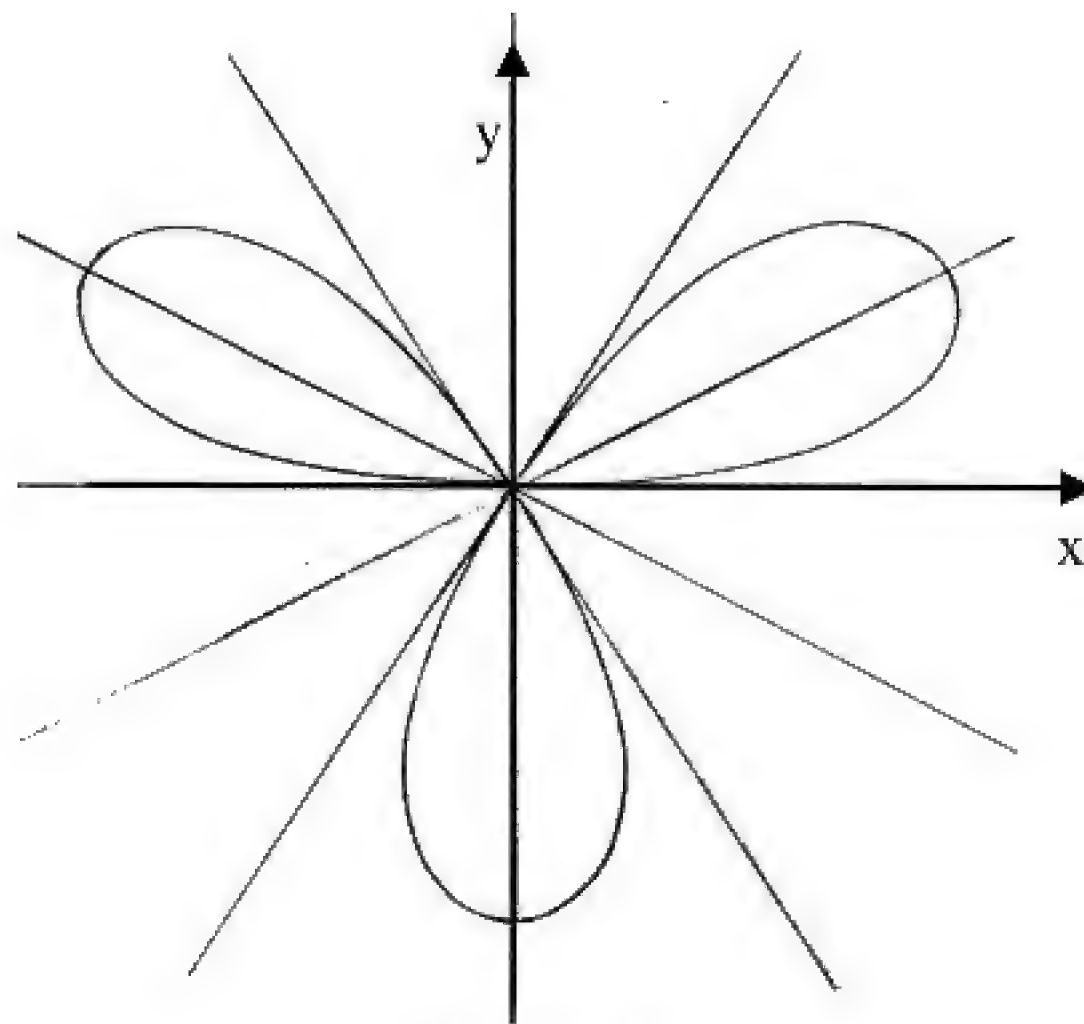
بملاحظة أن المشتقة تنعدم عند: $\theta = \frac{\pi}{6}$ ، $\theta = \frac{\pi}{2}$ ، وأن:

$$\tan \phi = \frac{\sin 3\theta}{3\cos 3\theta} = \frac{1}{3} \tan 3\theta$$

فإن جدول إشارة المشتقة يظهر على الشكل:

θ	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$
r'	3	+	0	−	−3	−	0	+	3
r	0	\nearrow	1	\searrow	0	\searrow	−1	\nearrow	0
ϕ	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{\pi}{2}$		0

(٣) الرسم:



شكل (٩، ١٤).

مثال (٦، ١٤)

ارسم المنحنى: $r^2 = \cos 2\theta$

الحل

$$r = \pm \sqrt{\cos 2\theta} \quad (١)$$

نحصل على المنحنى $r = -\sqrt{\cos 2\theta}$ من المنحنى $r = \sqrt{\cos 2\theta}$ بأخذ نظيره بالنسبة للقطب 0.

لنرسم إذن المنحنى: $f(\theta) = r = +\sqrt{\cos 2\theta}$

(٢) من الملاحظ أن: $f(\theta) = f(-\theta)$ فالمنحنى متماثل بالنسبة للمحور x. يكفي رسمه على الفترة

$[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$. بما أنه متماثل بالنسبة للمحور x فيكفي رسمه على الفترة $[0, \frac{\pi}{4}]$

(٣) من الملاحظ أن: $r' = \frac{-2\sin 2\theta}{2\sqrt{\cos 2\theta}}$ ، إذن: $\theta = 0 \Leftrightarrow r' = 0$

من جهة أخرى، فإن: $r' \rightarrow -\infty \Rightarrow \theta \rightarrow \frac{\pi}{4}$ ، ومنه نحصل على الجدول التالي:

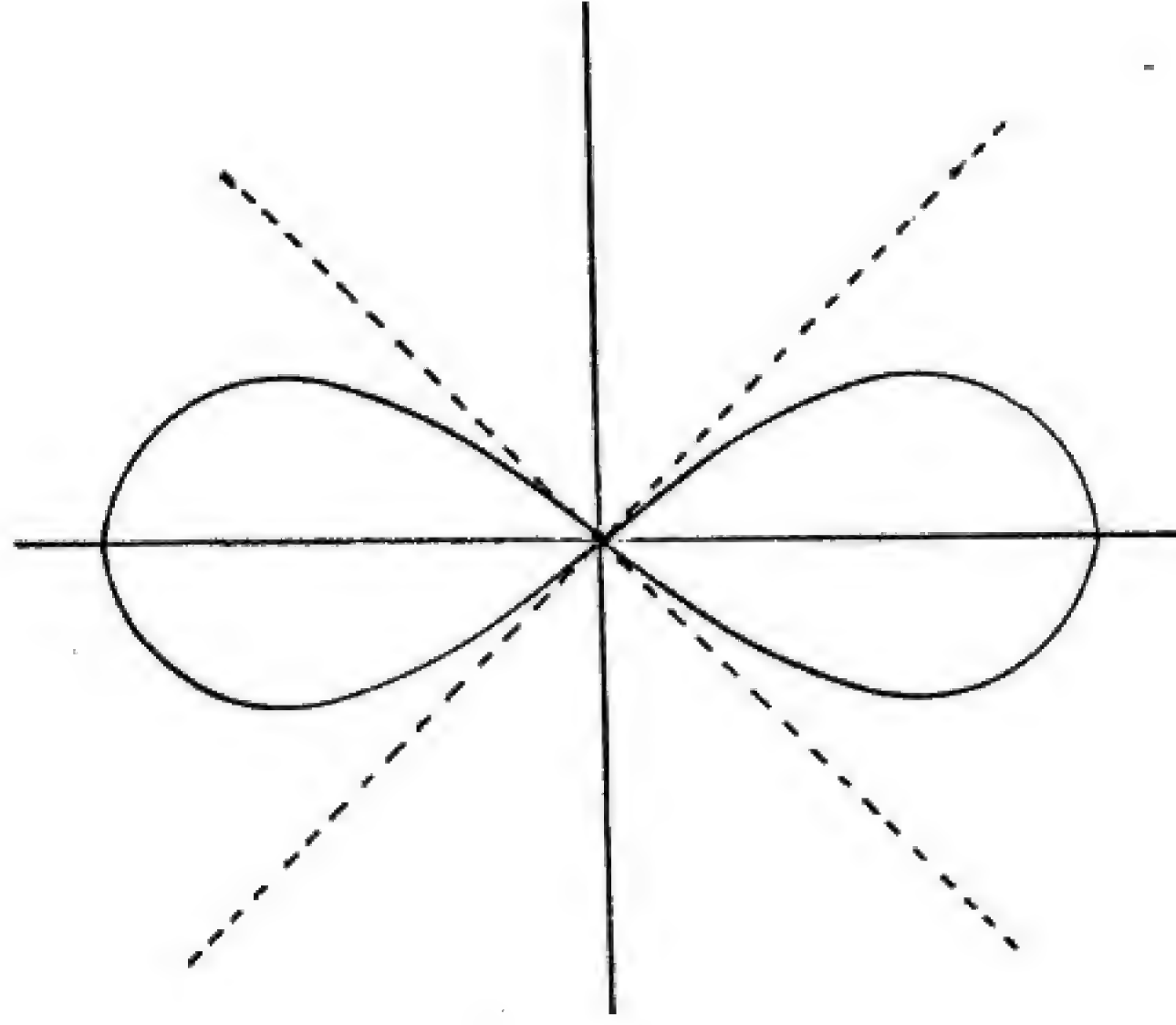
θ	0		$\frac{\pi}{4}$
r'	0	-	$-\infty$
r	1	\searrow	0
ϕ	$\frac{\pi}{2}$		π

$$\left(\tan \phi = \frac{r}{r'} = -\frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} \right)$$

(٤) الممارسات للمنحنى عند بعض النقاط المميزة

(أ) عند النقطة (0,1) المماس عمودي على المحور x.

(ب) عند النقطة $(0, \frac{\pi}{4})$ المماس ينطبق على المستقيم $\theta = \frac{\pi}{4}$.



شكل (١٠، ١٤).

(٢، ١٤) المنحنيات الوسيطة

The Parametric curves

لتكن f و g دالتين معرفتين على الفترة I وقابلتين للاشتقاق على هذه الفترة. نسمي مجموعة كل الأزواج المرتبة (x, y) المعرفة بالصورة: $x = f(t)$, $y = g(t)$ بالمنحني الوسيطي.

لرسم بيان هذا المنحني، نبحث عن:

- (١) مجموعة قيم t الكافية لرسم المنحني.
- (٢) إشارة المشتقتين f' , g' ونقط انعدامهما، ثم نحدد سلوك المتغيرين x , y من تزايد وتناقص.
- (٣) التناظرات الممكنة.
- (٤) المستقيمات المقاربة.

مثال (١٤-٧)

ارسم المنحني C المعين بالمعادلتين:

$$x = f(t) = t^3 \quad , \quad y = g(t) = t^2$$

الحل

- (١) x, y معرفتان لجميع قيم t .
- (٢) من الملاحظ أن $f(-t) = -f(t)$ ، $g(-t) = g(t)$. هذا يعني أنه لو كانت (x, y) نقطة من المنحني C ، فإن النقطة $(-x, y)$ نقطة أيضا، أي أن C متناظر بالنسبة للمحور y ، لذا يكفي رسمه على الفترة $[0, \infty)$ ثم أخذ نظيره بالنسبة للمحور y .
- (٣) دراسة إشارتي المشتقتين f', g'
- من الملاحظ أن: $x' = 3t^2$ ، $y' = 2t$
- ومنه، نجد الجدول التالي:

t	0		∞
x'	0	+	∞
x	0	\nearrow	∞
y'	0	+	∞
y	0	\nearrow	∞

من الواضح أن المنحني متزايد على الفترة $[0, \infty)$.

ملحوظة (١، ١٤)

عند البحث عن النقاط التي يكون عندها المماس موازيا للمحور السينات نبحث عن النقاط انعدام y' (شرط أن يكون $x' \neq 0$).

وعند البحث عن النقاط التي يكون عندها المماس موازيا لمحور الصادات نبحث عن نقاط انعدام x' (شرط أن يكون $y' \neq 0$).

وعند انعدام x', y' معا عند نقطة معينة، ندرس نهاية المقدار $\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'}$ عند هذه النقطة لتتعرف على وضع المماس.

ملحوظة (٢، ١٤)

نعلم أن:

$$\begin{aligned} \frac{d_2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{x'} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{y'}{x'} \right) \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt} \left(\frac{y'}{x'} \right) \cdot \frac{1}{x'} \\ &= \frac{x'y'' - y'x''}{(x')^2} \cdot \frac{1}{x'} = \frac{x'y'' - y'x''}{(x')^3} , \quad x' \neq 0 \end{aligned}$$

للبحث عن نقط الانقلاب، ندرس إشارة المقدار $\frac{d_2 y}{dx^2}$ ونقط انعدامه، ثم نحدد تبعا لذلك نقط الانقلاب إن وجدت.
ففي مثالنا:

$$\begin{aligned}\frac{d_2 y}{dx^2} &= \frac{x'y'' - y'x''}{x'^3} = \frac{6t^2 - 12t^2}{27t^6} \\ &= \frac{-2}{9t^4}, \quad t \neq 0\end{aligned}$$

فالمنحني محدب (مقعر نحو الأسفل) على المجموعة $\mathbb{R} - \{0\}$ ولا يوجد نقط انقلاب له.

(٤) من الملاحظ أن x', y' منعدمان معا عند $t = 0$. ومن المساواة:

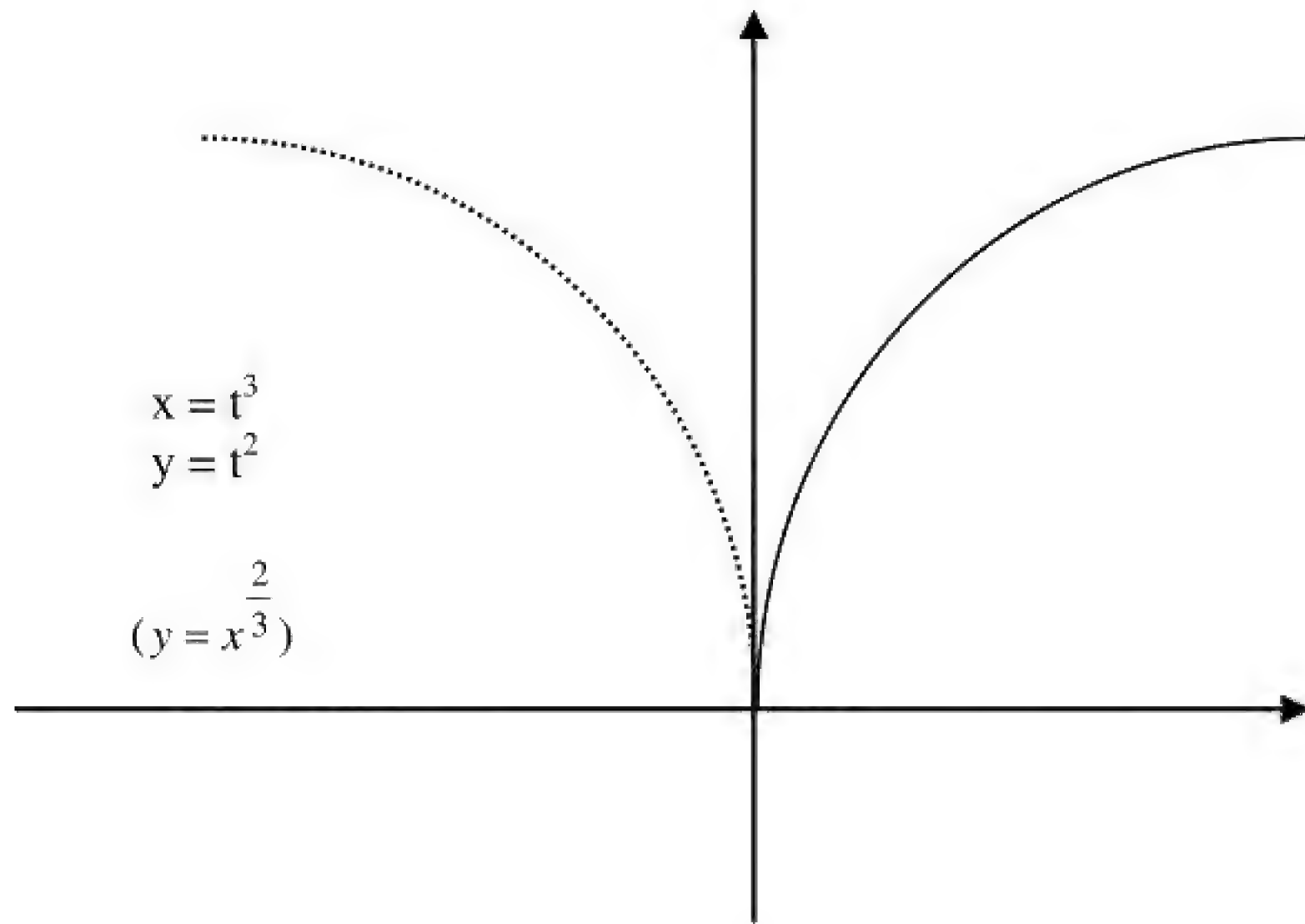
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{2t}{3t^2} = \frac{2}{3t}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{dy}{dx} = \infty$$

نجد أن:

إذن المماس للمنحني عند النقطة $(0,0)$ يوازي المحور y .

(٥) الرسم



شكل (١١)، (١٤).

مثال (٨, ١٤)

ارسم المنحني الوسيطي التالي:

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}, \quad a > 0$$

الحل

- (١) يكفي لرسم المنحني أن تأخذ t مجموعة القيم: $[-\pi, \pi]$.
- (٢) من الملاحظ أنه عندما تستبدل t بالقيمة $-t$ في معادلتني المنحني، نجد أن (x, y) تستبدل بالنقطة $(+x, -y)$ ، هذا يعني أن المنحني متناظر بالنسبة للمحور x . وعندما نستبدل t بالمقدار $\pi - t$ ، نجد أن النقطة (x, y) تستبدل بالنقطة $(-x, y)$ ، هذا يعني أن المنحني متناظر (متماثل) بالنسبة للمحور y ، إذن المنحني متناظر بالنسبة لنقطة الأصل.
- يكفي رسم الجزء الواقع في الربع الأول الموافق للفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$. ثم أخذ نظيره بالنسبة للمحور x وأخذ نظير القسم الناتج بالنسبة للمحور y للحصول على المنحني بأكمله.
- (٣) المشتقة:

$$\begin{aligned} x' &= -3a \cos^2 t \sin t \\ y' &= 3a \sin^2 t \cos t \end{aligned}$$

من الملاحظ أن:

$$\frac{dy}{dx} = \tan \theta = -\tan t \quad (٨, ١٤)$$

(٨) زاوية المماس للمنحني مع المحور x

جدول إشارة المشتقة الأولى:

t	0		$\frac{\pi}{2}$
x'	0	-	0
x	a	\searrow	0
y'	0	+	0
y	0	\nearrow	a
θ	π		$\frac{\pi}{2}$

من الواضح أن المنحني متناقص على الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$ ويمس المحور x عند النقطة $(a, 0)$.
وأيضا يمس المحور y عند النقطة $(0, a)$.

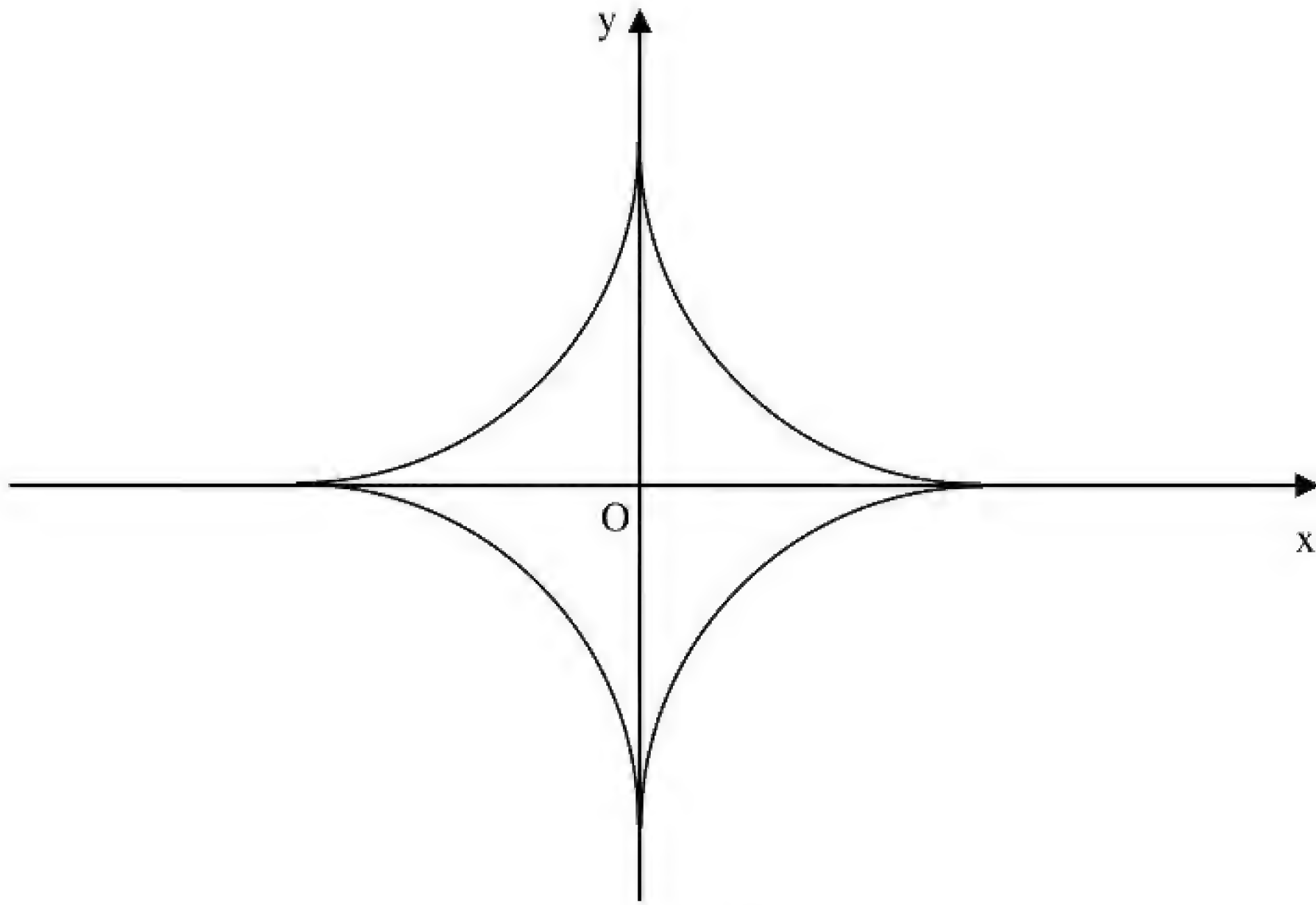
من جهة أخرى:

(بالاستفادة من (٨, ٤))

$$\begin{aligned}\frac{d_2 y}{dx^2} &= -\sec^2 t \frac{dt}{dx} \\ &= \frac{-\sec^2 t}{-3\cos^2 t \sin t} = \frac{\sec^4 t}{3\sin t}\end{aligned}$$

فالمشتقة $\frac{d_2 y}{dx^2}$ موجبة على الفترة $(0, \frac{\pi}{2})$ والمنحني مقعر على هذه الفترة.

نرسم الجزء الواقع في الربع الأول ثم نأخذ جميع التناظرات الممكنة، فنحصل على المنحني بأكمله.



شكل (١٢, ١٤).

مثال (١٤-٩)

ارسم المنحني: $x = t^2$ $y = t - \frac{1}{3}t^3$

الحل

(١) المجال هو: R وبملاحظة أن النقطة (x, y) تستبدل بالنقطة $(x, -y)$ عندما نستبدل t بالمقدار $-t$

في معادلتنا المنحني، فإن المنحني متماثل بالنسبة للمحور y . يكفي رسم الجزء الموافق للفترة

$[0, \infty)$ ثم أخذ نظير هذا الجزء بالنسبة للمحور x .

(٢) دراسة إشارة المشتقة
من الملاحظ أن:

$x' = 2t \quad , \quad y' = 1 - t^2$

بالتالي، فإن:

$x' = 0 \Rightarrow t = 0 \quad , \quad t = 1 \Leftarrow y' = 0$

ومنه الجدول التالي:

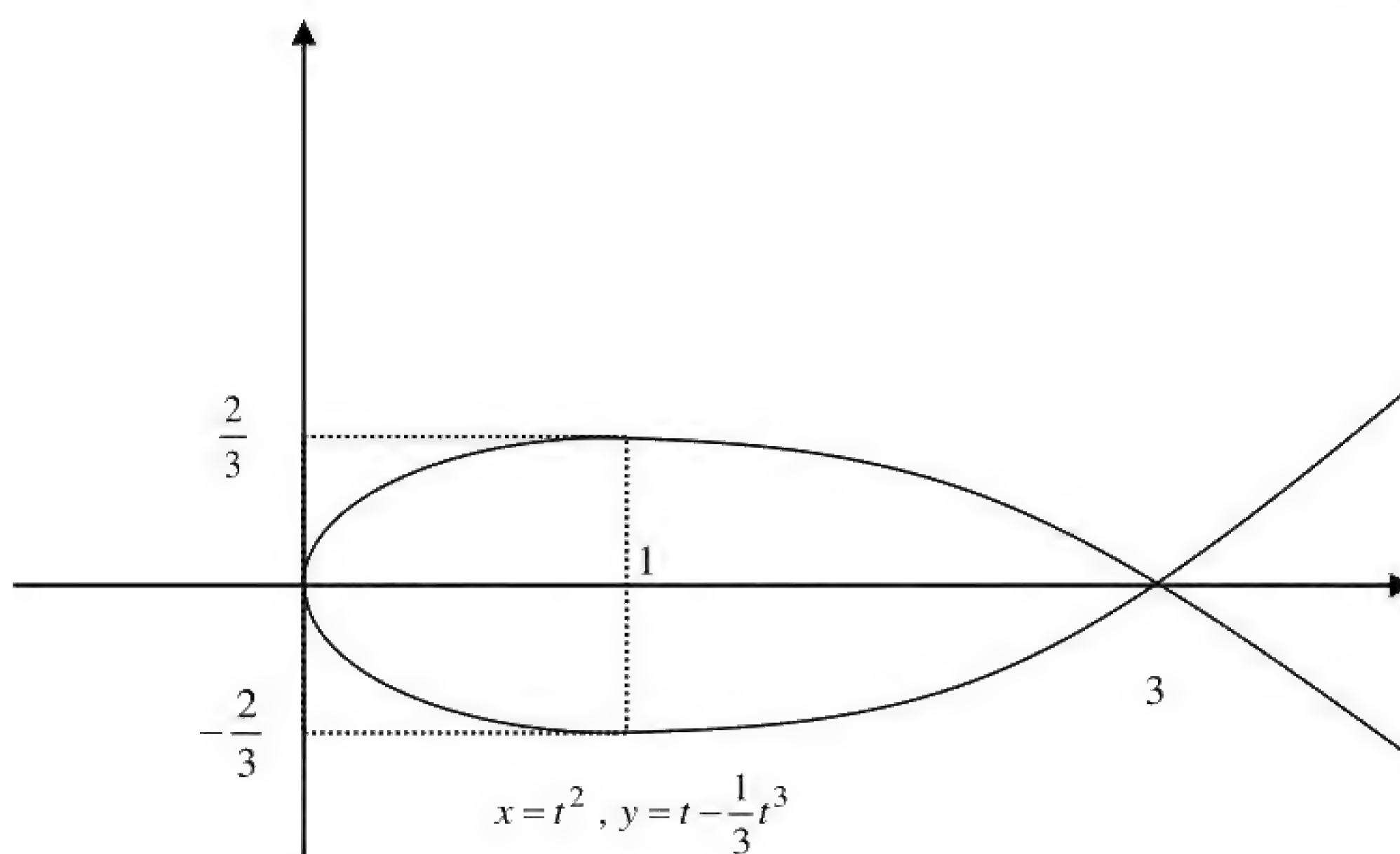
t	0	1		∞	
x'	0	+	2	+	
x	0	\nearrow	1	\nearrow	∞
y'	1	+	0	—	
y	0	\nearrow	$\frac{2}{3}$	\searrow	$-\infty$
$\tan^{-1} \frac{y'}{x'} = \theta$	$\frac{\pi}{2}$	0			

على هذه الفترة فإن المنحني يقطع المحور x عندما: $t = 0$, $t = \sqrt{3}$ ، وعند ذلك فإن: $x = 0$ ، $x = 3$. فنقطتا التقاطع مع محوري الإحداثيات هما: $(0,0)$, $(3,0)$ من جهة أخرى فإن:

$$\frac{d_2 y}{dx^2} = \frac{x'y'' - y'x''}{(x')^3}$$
$$= \frac{2t(-2t) - 2(1-t^2)}{8t^3} = \frac{-2t^2 - 2}{8t^3}$$

فالمنحني محدب على الفترة $(0,\infty)$. وهو يمس المحور y عند نقطة الأصل . لاحظ أن للمنحني قيمة عظمى محلية $y(1) = \frac{2}{3}$ ، عند النقطة $(1, \frac{2}{3})$.

الرسم:



شكل (١٤, ١٣).

تمارين (١٤, ١)

ارسم المنحنيات التالية:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (٢)$$

$$y = \sin^2 x \quad (٤)$$

$$y = e^x \quad (٦)$$

$$y^2 = \frac{x^3}{2-x} \quad (٨)$$

$$y = \ln x \quad (١٠)$$

$$y^3 = x \quad (١٢)$$

$$y = \tan x \quad (١٤)$$

$$y = 2x - x^2 \quad (١)$$

$$y = \frac{3}{2} \left(e^{\frac{x}{3}} + e^{-\frac{x}{3}} \right) \quad (٣)$$

$$y = x^{\frac{3}{2}} \quad (٥)$$

$$(x-4)y^2 = x(x-3) \quad (٧)$$

$$x^2 - y^2 = a^2 \quad (٩)$$

$$y = x(x-1)(x-2) \quad (١١)$$

$$y = \sin x \quad (١٣)$$

$$y = \frac{a^3}{x^2 + a^2} \quad (١٦)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (١٨)$$

$$y = \frac{1}{x^2} \quad (٢٠)$$

$$y = \ln|\sin x| \quad (٢٢)$$

$$xy = m^2 \quad (١٥)$$

$$y = \frac{1}{1+x^2} \quad (١٧)$$

$$a^2 y^2 = x^2(a^2 - x^2) \quad (١٩)$$

$$x = \ln(\sec y) \quad (٢١)$$

$$y^2 = x(x-3)^2 \quad (٢٣)$$

أوجد النقاط: (r, θ) حيث: $0 \leq \theta < 360$ والتي تحقق كلا من أزواج المنحنيات التالية

(نقاط التقاطع)، ثم ارسم هذه المنحنيات:

$$r = 1 + \cos \theta, \quad r = 1 + \sin \theta \quad (٢٥)$$

$$r = \cos \theta, \quad r = \sin \theta \quad (٢٤)$$

$$r = 1 - \sin \theta, \quad r = \sin \theta \quad (٢٧)$$

$$r = 1 - \cos \theta, \quad r = \cos \theta \quad (٢٦)$$

$$r = 2 \cos 2\theta, \quad r = \sqrt{3} \quad (٢٩)$$

$$r = \sin 2\theta, \quad r = 1 \quad (٢٨)$$

$$r = 4, \quad r = 2 \sec \theta \quad (٣١)$$

$$r = \sec \theta, \quad r = \cos \theta \quad (٣٠)$$

$$r = 4 - 4 \cos \theta, \quad r = \frac{4}{1 - \cos \theta} \quad (٣٣)$$

$$r = 4 - 4 \cos 2\theta, \quad r = \sin \theta \quad (٣٢)$$

$$r = \frac{2}{1 - \sin \theta}, \quad r = \frac{6}{1 + \sin \theta} \quad (٣٥)$$

$$r = 6, \quad r = 3 \csc \theta \quad (٣٤)$$

$$r \sin \theta = 1, \quad r = 2 - \sin \theta \quad (٣٧)$$

$$r = \sin \theta, \quad r = 3 - 2 \sin \theta \quad (٣٦)$$

$$r = \sin \theta, \quad r = 1 + 2 \sin \theta \quad (٣٩)$$

$$r = \cos \theta, \quad r = 1 + 2 \cos \theta \quad (٣٨)$$

$$r^2 = \sin 2\theta, \quad r = \sqrt{2} \sin \theta \quad (٤١)$$

$$r^2 = \cos 2\theta, \quad r^2 = \cos \theta \quad (٤٠)$$

ملحوظة: المعادلة: $r = \frac{ep}{1 \pm e \sin \theta}$ أو $r = \frac{ep}{1 \pm e \cos \theta}$ حيث $P > 0$ و $e > 0$ ، تمثل قطعاً ناقصاً إذا كان

$e < 1$ ، وتمثل قطعاً زائداً إذا كان $e > 1$ ، وتمثل قطعاً مكافئاً إذا كان: $e = 1$.

ارسم كلا من المنحنيات القطبية التالية:

$$r = \frac{3}{1 + \frac{1}{2} \cos \theta} \quad (٤٤)$$

$$r = 4 \cos^2 \theta \quad (٤٣)$$

$$r = 2(1 + \cos \theta) \quad (٤٢)$$

$$r = \sin 3\theta \quad (٤٧)$$

$$r = 2 \sec^2 \frac{\theta}{2} \quad (٤٦)$$

$$r = 2 \cos 3\theta \quad (٤٥)$$

$$r = \sin 2\theta \quad (٤٩)$$

$$r^2 = \sin 4\theta \quad (٤٨)$$

$$r = \frac{1}{\theta} \quad (٥٢)$$

$$r = e^{-2\theta} \quad (٥١)$$

$$r^2 = 2 \cos 2\theta \quad (٥٠)$$

$$r = 3\theta \quad (٥٥)$$

$$\theta = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \quad (٥٤)$$

$$r = 2(1 - \sin \theta) \quad (٥٣)$$

(٥٦) ضع المنحني التالي بشكله القطبي ثم ارسمه: $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$

ارسم كلا من المنحنيات الوسيطة التالية:

$$(a > 0) \quad y = a(1 - \cos t) \quad , \quad x = a(t - \sin t) \quad (٥٧)$$

$$(a, b > 0) \quad x = a \cos^3 t \quad , \quad y = b \sin^3 t \quad (٥٨)$$

(٦٠) ضع المنحني التالي بشكله الوسيطي ثم ارسمه:

$$\left(\frac{x}{5} \right)^2 + \left(\frac{y}{4} \right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

إرشاد: ضع: $x = 5 \cos t$

(٦١) ضع المنحني التالي بشكله الوسيطي ثم ارسمه:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \quad , \quad a > 0$$

إرشاد: ضع: $x = a \cos^3 t$

ارسم كلا من المنحنيات الوسيطة التالية:

$$y = a - b \cos t \quad , \quad x = at - b \sin t \quad (٦٢)$$

$$0 < b \leq a$$

$$y = a(2 \sin t - \sin 2t) \quad , \quad x = a(2 \cos t - \cos 2t) \quad (٦٣)$$

$$y = \frac{3at^2}{1+t^3} \quad , \quad x = \frac{3at}{1+t^3} \quad (٦٤)$$

الدوال الزائدية

THE HYPERBOLIC FUNCTIONS

(١٥, ١) الدوال الزائدية

The Hyperbolic Functions

انطلاقاً من الدالة الأسية الطبيعية المعرفة بالقاعدة: $y = e^x$.

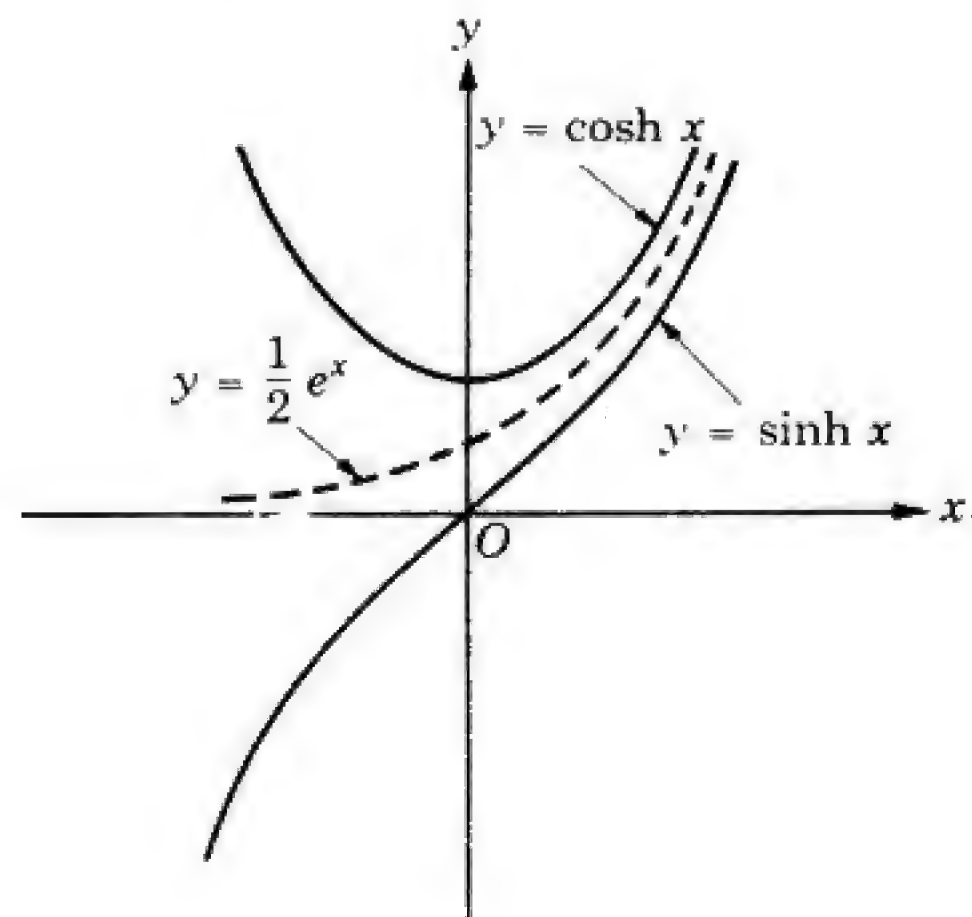
لنعرف دالتي الجيب وجيب التمام الزائديتين ونرمز لهما وعلى التوالي، بالرمزين: \cosh , \sinh .

بالصورة:

(١٥, ١)

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



شكل (١٥, ١).

من (١٥, ١)، نجد بالجمع تارة وبالطرح تارة أخرى:

(١٥, ٢)

$$\begin{aligned}\cosh x + \sinh x &= e^x \\ \cosh x - \sinh x &= e^{-x}\end{aligned}$$

من (١٥, ٢)، نحصل على المتطابقة:

$$(\cosh x + \sinh x)(\cosh x - \sinh x) = e^x \cdot e^{-x} = e^0 = 1$$

إذن:

(١٥, ٣)

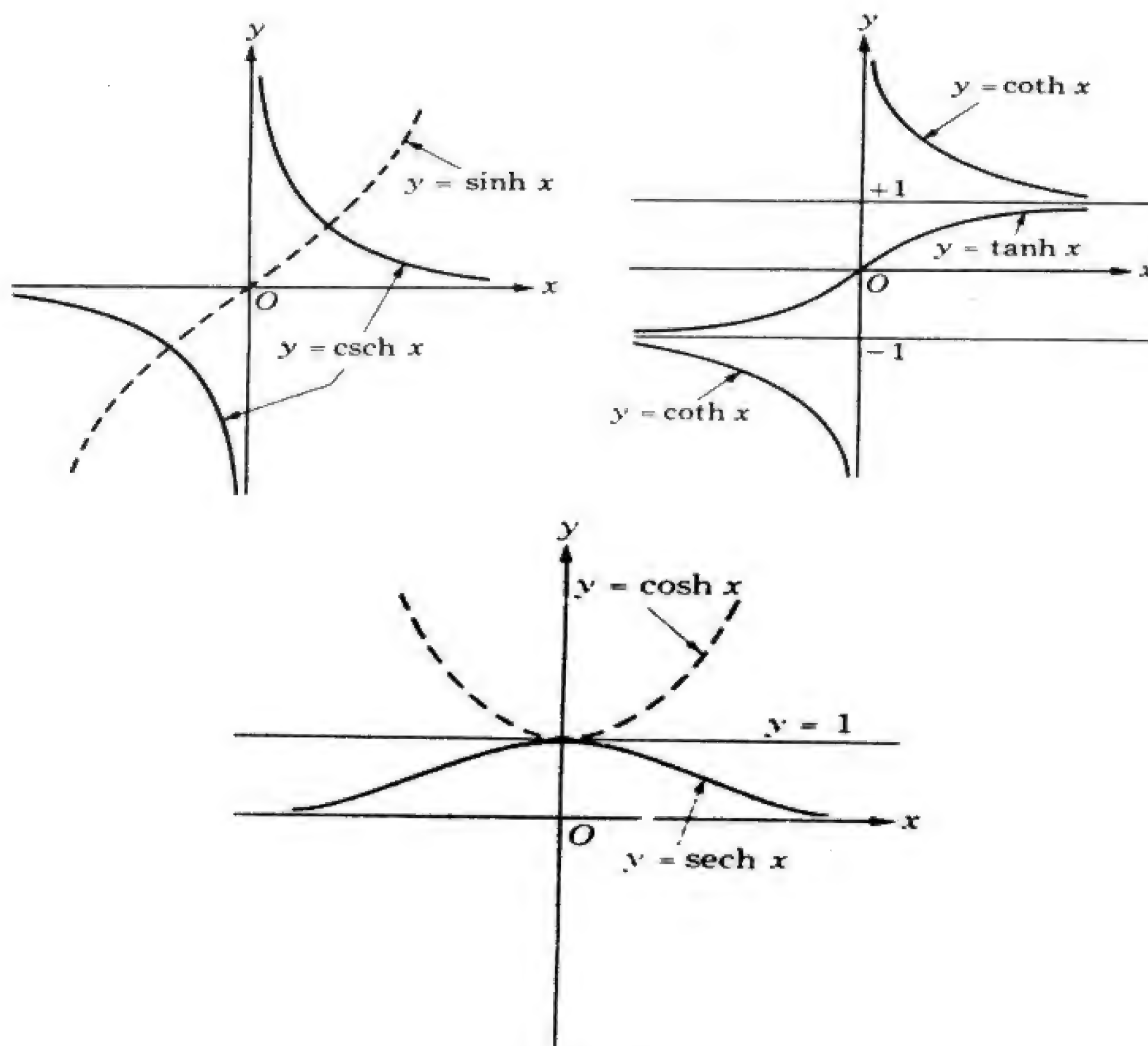
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

بالطريقة نفسها التي عرفنا بها بقية الدوال المثلثية (Trigonometric) ابتداء من دالتي الجيب وجيب التمام، لنعرف دالة الظل الزائدية وظل التمام الزائدية وقاطع الزائدية وقاطع التمام الزائدية ابتداء من دالتي الجيب وجيب التمام الزائديتين، بالصورة التالية:

$$\begin{aligned}\tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} \\ \coth x &= \frac{\cosh x}{\sinh x} \\ \operatorname{sech} x &= \frac{1}{\cosh x} \\ \operatorname{csch} x &= \frac{1}{\sinh x}\end{aligned}$$

حيث رمزنا لهذه الدوال بالرموز:

$$\tanh, \coth, \operatorname{sech}, \operatorname{csch}$$



شكل (١٥, ٢).

من المساواة (١٥, ٣) وبتقسيم طرفيها على $\cosh^2 x$ مرة، وعلى $\sinh^2 x$ مرة أخرى، نجد:

(١٥, ٤)

$$\begin{aligned} 1 - \tanh^2 x &= \operatorname{sech}^2 x \\ \coth^2 x - 1 &= \operatorname{csch}^2 x \end{aligned}$$

متطابقات الجمع

نظرية (١٥-١)

(١٥, ٥)

$$\begin{aligned} \sinh(x + y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \\ \cosh(x + y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \end{aligned}$$

البرهان

لنبرهن على الأولى منهما. حسب تعريف دالة الجيب الزائدية يمكن أن نكتب:

$$\sinh(x+y) = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} = \frac{e^x e^y - e^{-x} e^{-y}}{2}$$

$$(استفادة من (١٥, ٢)) = \frac{1}{2}[(\cosh x + \sinh x)(\cosh y + \sinh y) - (\cosh x - \sinh x)(\cosh y - \sinh y)]$$

$$= \frac{1}{2}[2\sinh x \cosh y + 2\cosh x \sinh y]$$

ومنه نجد:

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

وهذا القانون يشبه قانونا مثلثيا معروفا

من (١٥, ١) نجد:

$$\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

أي أن: $\sinh(-x) = -\sinh x$ ، بالمثل: $\cosh(-x) = \cosh x$ ، إذن:

(١٥, ٦)

$$\boxed{\begin{array}{l} \sinh(-x) = -\sinh x \\ \cosh(-x) = \cosh x \end{array}}$$

هذا يعني أن دالة الجيب الزائدية دالة فردية، وأن دالة جيب التمام الزائدية دالة زوجية.

لو عوضنا في (١٥, ٥) عن y بـ $-y$ نحصل على المتطابقتين:

$$\sinh(x-y) = \sinh x \cosh(-y) + \cosh x \sinh(-y)$$

$$\cosh(x-y) = \cosh x \cosh(-y) + \sinh x \sinh(-y)$$

وحسب (١٥, ٦)، فإن:

(١٥, ٧)

$$\boxed{\begin{array}{l} \sinh(x-y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y \\ \cosh(x-y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y \end{array}}$$

متطابقات الضرب

بالتعويض عن y بـ x في (١٥, ٥) نجد:

(١٥, ٨)

$$\boxed{\begin{array}{l} \sinh 2x = 2\sinh x \cosh x \\ \cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x \end{array}}$$

وبالتعويض في المعادلة الثانية من (١٥, ٨) عن $\cosh^2 x$ بما يساويها من المساواة:

$$\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x \text{ ، نجد:}$$

$$\begin{aligned}\cosh 2x &= 1 + \sinh^2 x + \sinh^2 x \\ &= 1 + 2\sinh^2 x \Rightarrow\end{aligned}$$

(١٥, ٩)

$$\begin{aligned}\cosh 2x &= 2\sinh^2 x + 1 \\ \sinh^2 x &= \frac{\cosh 2x - 1}{2}\end{aligned}$$

بالمثل لو عوضنا في (١٥, ٨) عن $\sinh^2 x$ بالقيمة $\cosh^2 x - 1$ ، لوجدنا:

$$\begin{aligned}\cosh 2x &= 2\cosh^2 x - 1 \\ \cosh^2 x &= \frac{\cosh 2x + 1}{2}\end{aligned}$$

نظرية (١٥, ٢)

مشتقات الدوال الزائدية هي على التوالي:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[\sinh x] &= \cosh x \quad (١) \\ \frac{d}{dx}[\cosh x] &= \sinh x \quad (٢) \\ \frac{d}{dx}[\tanh x] &= \operatorname{sech}^2 x \quad (٣) \\ \frac{d}{dx}[\operatorname{sech} x] &= -\operatorname{sech} x \tanh x \quad (٥) \\ \frac{d}{dx}[\coth x] &= -\operatorname{csch}^2 x \quad (٤) \\ \frac{d}{dx}[\operatorname{csch} x] &= -\operatorname{csch} x \coth x \quad (٦)\end{aligned}$$

البرهان

لنبرهن على ثلاثة منها ونترك البقية للقارئ:

$$\begin{aligned}\sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow \frac{d}{dx}(\sinh x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x \\ \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} \Rightarrow \frac{d}{dx}(\tanh x) = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x \\ \operatorname{sech} x &= \frac{1}{\cosh x} \Rightarrow \frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\frac{\sinh x}{\cosh^2 x} = -\frac{1}{\cosh x} \cdot \frac{\sinh x}{\cosh x} = -\operatorname{sech} x \tanh x\end{aligned}$$

مثال (١٥, ١)

أوجد y' ، إذا كان:

$$y = (\cosh x)^{\sinh x} + 3^{\cosh x^2} \quad (١)$$

$$y = \log_2(\cosh x) \quad (٢)$$

الحل

(١) نضع $\cosh x = e^{\ln(\cosh x)}$ ، فنجد:

$$y = e^{\sinh x \ln(\cosh x)} + 3^{\cosh x^2} \Rightarrow y' = e^{\sinh x \ln(\cosh x)} \left(\cosh x \ln(\cosh x) + \frac{\sinh x \cdot \sinh x}{\cosh x} \right) +$$

$$3^{\cosh x^2} \ln 3 \cdot \sinh x^2 \cdot 2x \Rightarrow y' = (\cosh x)^{\sinh x} (\cosh x \ln(\cosh x) + \sinh x \tanh x) +$$

$$3^{\cosh x^2} \ln 3 \sinh x^2 \cdot 2x$$

$$y' = \frac{\sinh x}{\cosh x \cdot \ln 2} = \frac{\tanh x}{\ln 2} \quad (٢)$$

من جدول مشتقات الدوال الزائدية نظرية (٢, ١٥)، نجد:

$$\int \sinh u du = \cosh u + c \quad \int \cosh u du = \sinh u + c$$

$$\int \operatorname{sech}^2 u du = \tanh u + c \quad \int \operatorname{csch}^2 u du = -\coth u + c$$

$$\int \operatorname{sech} u \tanh u du = -\operatorname{sech} u + c \quad \int \operatorname{csch} u \coth u du = -\operatorname{csch} u + c$$

مثال (٢, ١٥)

أوجد التكاملين:

$$\int \sinh^2 x dx \quad (١)$$

$$\int \cosh^2 x dx \quad (٢)$$

الحل

(١) طريقة أولى:

$$\int \sinh^2 x dx = \int \frac{\cosh 2x - 1}{2} dx = \frac{\sinh 2x}{4} - \frac{1}{2} x + c$$

طريقة ثانية:

$$\int \sinh^2 x dx = \int \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (e^{2x} - 2 + e^{-2x}) dx$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{e^{2x}}{2} - 2x - \frac{e^{-2x}}{2} \right) + c = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{8} - \frac{x}{2} + c = \frac{\sinh 2x}{4} - \frac{x}{2} + c$$

(٢) طريقة أولى:

$$\int \cosh^2 x dx = \int \frac{\cosh 2x + 1}{2} dx = \frac{\sinh 2x}{4} + \frac{1}{2} x + c$$

طريقة ثانية:

$$\begin{aligned} \int \cosh^2 x dx &= \int \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) dx \\ &= \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{8} + \frac{1}{2} x + c = \frac{\sinh 2x}{4} + \frac{1}{2} x + c \end{aligned}$$

مثال (٣، ١٥)

أوجد التكامل: $\int \sinh(\ln 3x) dx$

الحل

من الملاحظ أن:

$$\sinh(\ln 3x) = \frac{e^{\ln 3x} - e^{-\ln 3x}}{2} = \frac{e^{\ln 3x} - e^{\ln(3x)^{-1}}}{2} = \frac{3x - \frac{1}{3x}}{2}$$

(لاحظ أن $x > 0$)

بالتالي، فإن:

$$\begin{aligned} \int \sinh(\ln 3x) dx &= \frac{3}{2} \int x dx - \frac{1}{6} \int \frac{dx}{x} \\ &= \frac{3}{4} x^2 - \frac{1}{6} \ln x + c \end{aligned}$$

مثال (٤، ١٥)

أوجد التكامل:

$$\int e^{-10x} (\cosh 2x + \sinh 2x)^6 dx$$

الحل

من الملاحظ أن: $\cosh 2x + \sinh 2x = e^{2x}$ ، بالتالي فإن التكامل يصبح على الشكل:

$$\int e^{-10x} (e^{2x})^6 dx = \int e^{-10x} e^{12x} dx = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + c$$

تمارين (١٥, ١)

أوجد y' فيما يلي:

$$y = \ln(\sinh x^2) \quad (٢)$$

$$y = e^x \sinh x^2 \quad (١)$$

$$y = \sinh^3(e^x) \quad (٤)$$

$$y = \sin(\sinh x) \quad (٣)$$

$$y = (\sinh^2 x + \tanh^2 x)^2 \quad (٦)$$

$$y = (\cosh x)^{\cos x} \quad (٥)$$

$$y = \frac{x \tanh \sqrt{x}}{1 + \ln(\cosh x)} \quad (٨)$$

$$y = \operatorname{sech} x + \cosh 2x \quad (٧)$$

$$y = x \operatorname{csch} \frac{1}{x} \quad (١٠)$$

$$y = \frac{\coth x^2}{(1 + \operatorname{sech} \sqrt{x})^2} \quad (٩)$$

$$y = (x^2 + x + 1)^{\sqrt{x}} + \log_3(\cosh x) \quad (١١)$$

$$y = \log_2 |x^2 - 2x - 3| + (\cosh x)^{\sqrt{x}} + \int_0^1 e^{x^2} dx \quad (١٢)$$

أوجد y' فيما يلي:

$$y = \ln \sqrt{e^x + e^{-x}} + (\cosh x)^{\sqrt{x}} \quad (١٤)$$

$$y = (\cosh x)^{\sinh x} + 2^x \quad (١٣)$$

$$y = \frac{(x^2 + 4)^x}{(\sinh x)^2} \quad (١٥)$$

أوجد التكاملات التالية:

$$\int \cosh^4 x dx \quad (١٧)$$

$$\int \sinh^3 x dx \quad (١٦)$$

$$\int \sinh^2 x \cosh^2 x dx \quad (١٩)$$

$$\int \sinh^3 x \cosh x dx \quad (١٨)$$

$$\int \frac{dx}{\sinh^2 x \cosh^2 x} \quad (٢١)$$

$$\int \frac{dx}{\sinh x \cosh^2 x} \quad (٢٠)$$

$$\int \coth^4 x dx \quad (٢٣)$$

$$\int \tanh^3 x dx \quad (٢٢)$$

$$\int \frac{dx}{2 \sinh x + 3 \cosh^2 x} \quad (٢٥)$$

$$\int \frac{dx}{\sinh 2x + \cosh^2 x} \quad (٢٤)$$

$$\int \frac{\sinh x dx}{\sqrt{\cosh 2x}} \quad (٢٧)$$

$$\int \frac{dx}{\tanh x - 1} \quad (٢٦)$$

أوجد التكاملات التالية:

$$\int \cosh(\ln 2x) dx \quad (٢٩)$$

$$\int e^{3x} \sinh 2x dx \quad (٣١)$$

$$\int x(\sinh 3x + \cosh 3x)^3 dx \quad (٣٣)$$

$$\int \frac{\cosh(\tan^{-1} x) dx}{1+x^2} \quad (٣٥)$$

$$\int \frac{e^{-x}}{(\sinh x + \cosh x)^4} dx \quad (٣٧)$$

$$\int x e^{2x^2} \cosh x^2 dx \quad (٢٨)$$

$$\int \tanh^5 x \operatorname{sech} x dx \quad (٣٠)$$

$$\int \frac{2 \cosh 3x + 5}{\sqrt{\cosh 4x - \sinh 4x}} dx \quad (٣٢)$$

$$\int e^{-2x} \cosh^2 2x dx \quad (٣٤)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{\cosh 3x + \sinh 3x}} dx \quad (٣٦)$$

(١٥, ٢) الدوال الزائدية العكسية
The Inverse Hyperbolic Functions

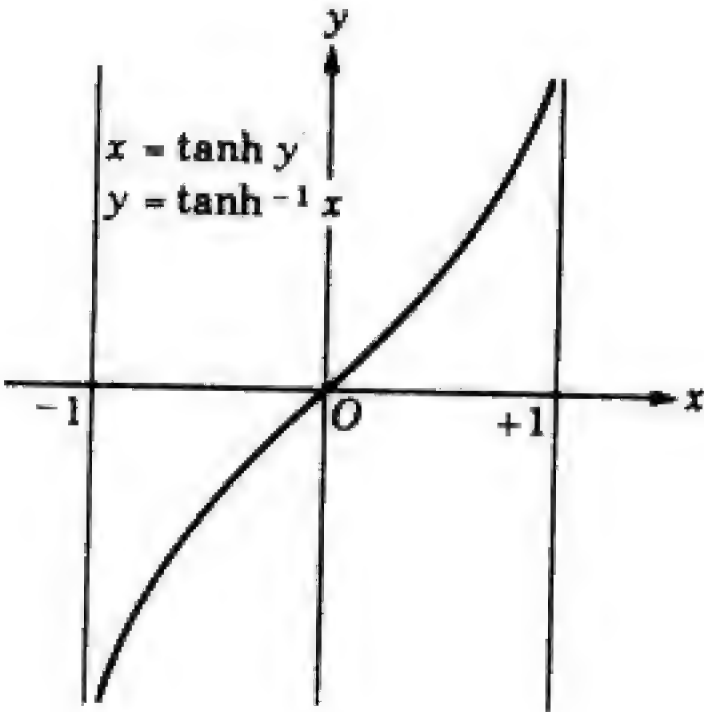
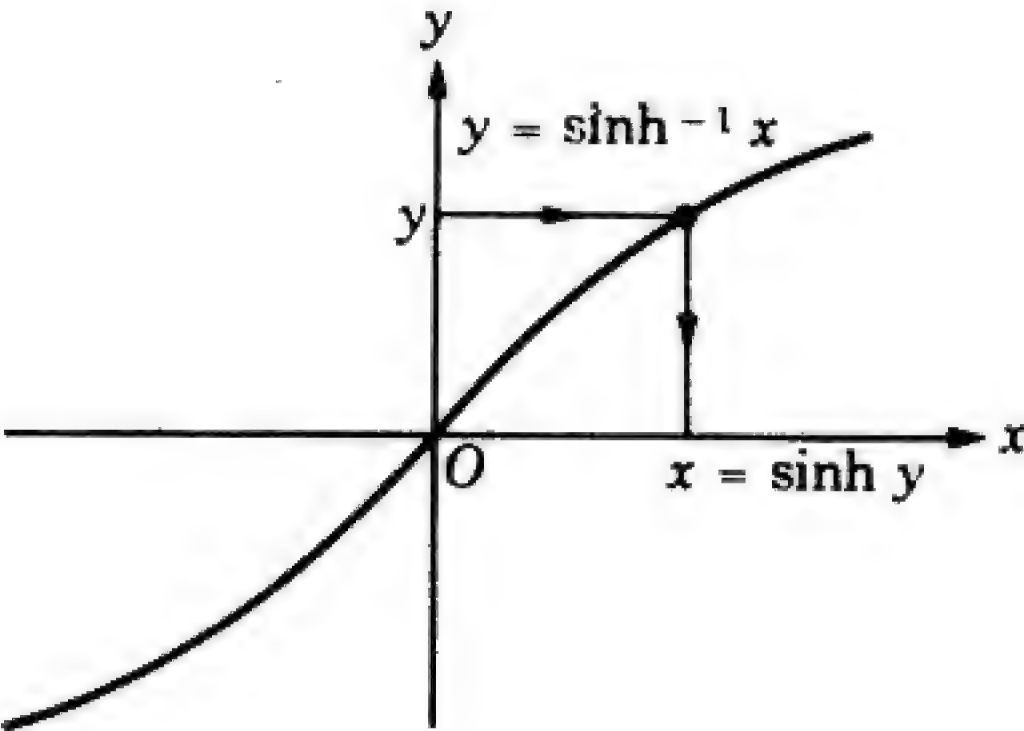
(أ) من الملاحظ أن مشتقات الدوال الزائدية التالية، والمعروفة بالصورة:

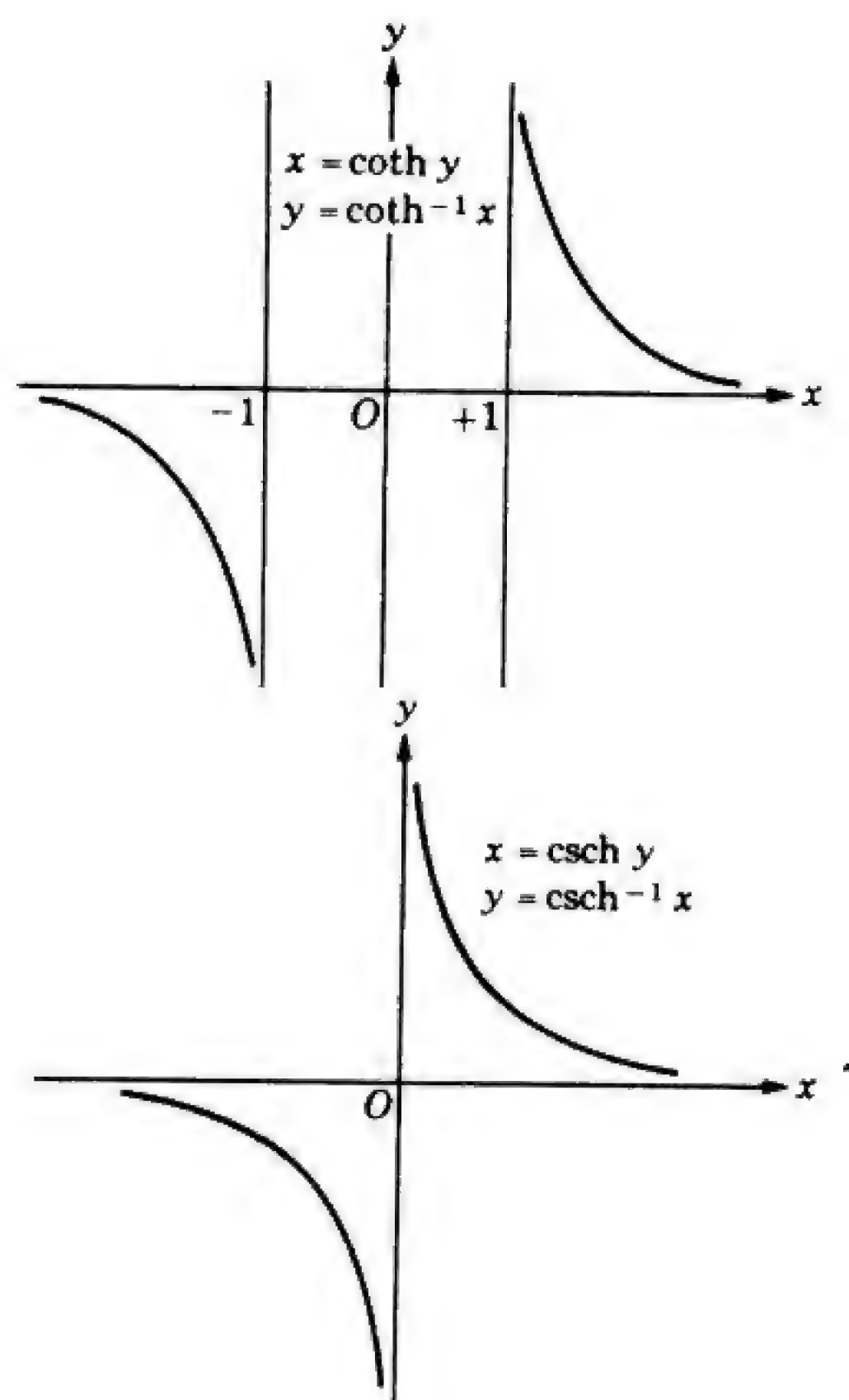
(١) $y \in \mathbb{R} \text{ , } x = \sinh y$

(٢) $y \in \mathbb{R} \text{ , } x = \tanh y$

(٣) $y \in \mathbb{R}^* \text{ , } x = \coth y$

(٤) $y \in \mathbb{R}^* \text{ , } x = \operatorname{csch} y$





شكل (٣، ١٥).

(وباعتبار y هو المتغير المستقل و x قيمة الدالة الزائدية عند y)، هي على التوالي:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dy} &= \cosh y \quad (١) \\ \frac{dx}{dy} &= \operatorname{sech}^2 y \quad (٢) \\ \frac{dx}{dy} &= -\operatorname{csch}^2 y \quad (٣) \\ \frac{dx}{dy} &= \frac{-\cosh y}{\sinh^2 y} \quad (٤) \end{aligned}$$

للمشتقة الأولى والثانية قيم موجبة عندما $y \in \mathbb{R}$ ، وللمشتقة الثالثة والرابعة قيم

سالبة عندما $y \in \mathbb{R}^*$. تقبل هذه الدوال دوالا عكسية، لنرمز لها وعلى التوالي بالرموز:

(١) \sinh^{-1} ، وندعوها بدالة الجيب الزائدي العكسي

(٢) \tanh^{-1} ، وندعوها بدالة الظل الزائدي العكسي

(٣) \coth^{-1} ، ونسميها بدالة ظل التمام الزائدي العكسي

(٤) csch^{-1} ، ونطلق عليها دالة قاطع التمام الزائدي العكسي، شكل (٣، ١٥).

لاحظ أن: $\sinh^{-1}(\sinh y) = y$ وبالمثل بالنسبة لبقية الدوال، إذن:

$$y = \sinh^{-1} x \quad (١)$$

$$y = \tanh^{-1} x \quad (٢)$$

$$y = \coth^{-1} x \quad (٣)$$

$$y = \operatorname{csch}^{-1} x \quad (٤)$$

(انظر الشكل (٣، ١٥)).

(ب) لاحظ أيضا أن مشتقتي الدالتين الزائديتين التاليتين، والمعرفتين بالصورة:

$$x = \cosh y \quad (١)$$

$$x = \operatorname{sech} y \quad (٢)$$

وباعتبار y هو المتغير المستقل، هي على التوالي:

$$\frac{dx}{dy} = \sinh y \quad (١)$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{\sinh y}{\cosh^2 y} \quad (٢)$$

قيم المشتقة الأولى موجبة وقيم الثانية سالبة عندما $y > 0$ ، شكل (٤، ١٥). تقبل الدالتان

$\sec h$ ، $\cos h$ على الفترة $[0, \infty)$ دالتين عكسيّتين، نرمز لهما وعلى التوالي، بالرمزين:

(١) \cosh^{-1} ، وندعوها بدالة جيب التمام الزائدي العكسي.

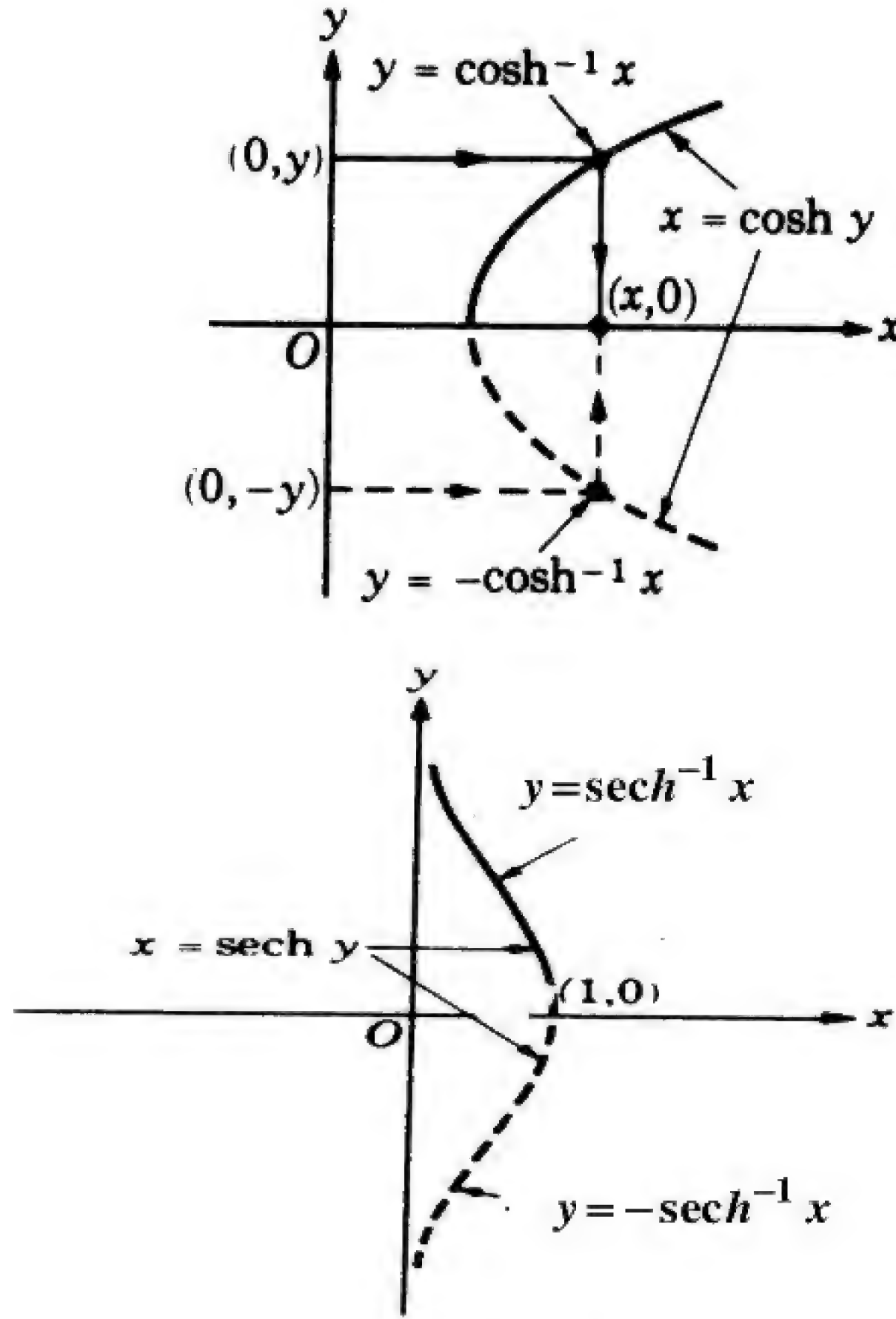
(٢) sech^{-1} ، ونسميها بدالة القاطع الزائدي العكسي.

إذن:

$$y = \cosh^{-1} x \quad (١)$$

$$y = \operatorname{sech}^{-1} x \quad (٢)$$

(حيث $y \geq 0$)، (انظر الشكل (٤، ١٥))



شكل (٤، ١٥).

الصيغة اللوغاريتمية لدالة الجيب الزائدية العكسية \sinh^{-1}

نعلم أن: $x = \sinh y \Leftrightarrow y = \sinh^{-1} x$

لكن: $\cosh^2 y = 1 + \sinh^2 y$ ، إذن: $\cosh y = \sqrt{1 + \sinh^2 y} = \sqrt{1 + x^2}$

ومنه: $e^y = \sinh y + \cosh y = x + \sqrt{1 + x^2}$

بأخذ \ln الطرفين، نجد: $y = \ln(\sqrt{1 + x^2} + x)$ ، بالتالي فإن:

$$\sinh^{-1} x = \ln(\sqrt{1 + x^2} + x)$$

الجدول التالي يحوي جميع الصيغ اللوغاريتمية للدوال الزائدية العكسية.

الصيغ اللوغاريتمية للدوال الزائدية العكسية.

ملاحظات	الصيغة اللوغاريتمية	$y = f(x)$
$x \in \mathbb{R} , y \in \mathbb{R}$	$\ln(\sqrt{x^2 + 1} + x)$	$\sinh^{-1} x$
$x \geq 1 , y \geq 0$	$\ln(\sqrt{x^2 - 1} + x)$	$\cosh^{-1} x$
$ x < 1 , y \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$	$\tanh^{-1} x$
$ x > 1 , y \in \mathbb{R}^*$	$\frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$	$\coth^{-1} x$
$0 < x \leq 1 , y \geq 0$	$\ln \frac{\sqrt{1-x^2} + 1}{x}$	$\operatorname{sech}^{-1} x$
$x \in \mathbb{R}^* , y \in \mathbb{R}^*$	$\ln \left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{ x } + \frac{1}{x} \right)$	$\operatorname{csch}^{-1} x$

مشتقات الدوال الزائدية العكسية:

من الصيغ اللوغاريتمية السابقة وبلاشتقاق بالنسبة للمتغير x ، نجد جميع مشتقات الدوال الزائدية العكسية، فعلى سبيل المثال نجد الصيغة التالية:

$$\begin{aligned} (\tanh x)' &= \frac{1}{2} [\ln(1+x) - \ln(1-x)]' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{1-x^2} , \quad |x| < 1 \end{aligned}$$

فيما يلي نضع جدولاً يحوي جميع مشتقات الدوال الزائدية والزائدية العكسية.

جدول مشتقات الدوال الزائدية والدوال الزائدية العكسية.

y	y'
$\sinh u$	$\cosh u \, u'$
$\cosh u$	$\sinh u \, u'$
$\tanh u$	$\operatorname{sech}^2 u \, u'$
$\coth u$	$-\operatorname{csch}^2 u \, u'$

y	y'
sech u	$-sechutanhu u'$
csch u	$-cschucothu u'$
$\sinh^{-1} u$	$\frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}} u'$
$\cosh^{-1} u$	$\frac{u'}{\sqrt{u^2 - 1}} \cdot (u > 1)$
$\tanh^{-1} u$	$\frac{u'}{1 - u^2} (u < 1)$
$\coth^{-1} u$	$\frac{1}{1 - u^2} u' (u > 1)$
$\operatorname{sech}^{-1} u$	$-\frac{u'}{u\sqrt{1 - u^2}} \quad 0 < u < 1$
$\operatorname{csch}^{-1} u$	$-\frac{u'}{ u \sqrt{1 + u^2}} \quad (u \neq 0)$

u = g(x) ، قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير x.

مثال (١٥-٥)

أوجد y'، إذا كان:

(١) $y = (\tanh^{-1} x)^2 + \sinh^{-1} x^2 + \ln(\cosh x)$

(٢) $y = x \cosh^{-1} x + (\operatorname{csch}^{-1} x)^2 \quad (x \geq 1)$

(٣) $y = e^x \operatorname{sech}^{-1} x^2$

الحل:

(١) $y' = 2 \tanh^{-1} x \cdot \frac{1}{1 - x^2} + \frac{1}{\sqrt{1 + x^4}} \cdot 2x + \frac{\sinh x}{\cosh x}$

(٢) $y' = \cosh^{-1} x + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} + 2 \operatorname{csch}^{-1} x \cdot -\frac{1}{x\sqrt{x^2 + 1}}$

(٣) $y' = e^x \operatorname{sech}^{-1} x^2 - e^x \frac{2x}{x^2 \sqrt{1 - x^4}}$

مثال (١٥, ٦)

حل المعادلة التالية:

(١٥, ١٠)

$\sinh^{-1}(x) = \ln 3x$

الحل :

لاحظ أن: $\sinh^{-1}(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} + x)$ إذن: $\ln(\sqrt{1+x^2} + x) = \ln 3x$ بالتالي، فإن: $\sqrt{1+x^2} + x = 3x$ (لاحظ أن الدالة \ln دالة تقابل)إذن: $\sqrt{1+x^2} = 2x \Leftrightarrow 1+x^2 = 4x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ ، والمقبول هو: $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (لاحظ أن الدالة \ln في المعادلة (١٥-١٠) معرفة إذا كان $x > 0$).

من جدول مشتقات الدوال الزائدية العكسية، نجد:

نظرية (٣، ١٥)

(١٤، ١٥)

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{u^2 + a^2}} du &= \sinh^{-1} \frac{u}{a} + c, \quad a > 0 \\
\int \frac{1}{\sqrt{u^2 - a^2}} du &= \cosh^{-1} \frac{u}{a} + c, \quad 0 < a < u \\
\int \frac{1}{a^2 - u^2} du &= \frac{1}{a} \tanh^{-1} \frac{u}{a} + c, \quad |u| < a, \quad a > 0 \\
\int \frac{1}{a^2 - u^2} du &= \frac{1}{a} \coth^{-1} \frac{u}{a} + c, \quad |u| > a, \quad a > 0 \\
\int \frac{1}{u\sqrt{a^2 - u^2}} du &= -\frac{1}{a} \operatorname{sech}^{-1} \frac{|u|}{a} + c, \quad 0 < |u| < a \\
\int \frac{1}{u\sqrt{a^2 + u^2}} du &= -\frac{1}{a} \operatorname{csch}^{-1} \frac{|u|}{a} + c, \quad u \neq 0
\end{aligned}$$

البرهان

لنبرهن الفقرة الأولى:

لنضع: $u = at$ ، نجد: $du = a dt$ ، ومنه فإن:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{u^2 + a^2}} du &= \int \frac{adt}{\sqrt{a^2 t^2 + a^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}} = \sinh^{-1} t + c \\
&= \sinh^{-1} \frac{u}{a} + c
\end{aligned}$$

(بالاستفادة من جدول مشتقات الدوال الزائدية العكسية).

نتيجة (١٥, ١)

باستخدام الصيغ اللوغاريتمية للدوال الزائدية العكسية، فإن الجدول السابق يكتب على الشكل:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{\sqrt{u^2 + a^2}} du &= \ln(\sqrt{u^2 + a^2} + u) + c \\
 \int \frac{1}{\sqrt{u^2 - a^2}} du &= \ln \left| \sqrt{u^2 - a^2} + u \right| + c \\
 &\quad (0 < a < |u|) \\
 \int \frac{du}{a^2 - u^2} &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| + c \\
 \int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} &= -\frac{1}{a} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{|u|} + c, \quad 0 < |u| < a \\
 \int \frac{du}{u\sqrt{a^2 + u^2}} &= -\frac{1}{a} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + u^2}}{|u|} + c, \quad u \neq 0 \\
 &\quad (a > 0 \text{ حيث})
 \end{aligned}$$

مثال (١٥, ٧)

أوجد التكاملات التالية:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{\sqrt{4+9x^2}} \quad (٢) \\
 \int \frac{dx}{\sqrt{4-e^{2x}}} \quad (٤)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}-9}} dx \quad (١) \\
 \int \frac{5}{6-2x^2} dx \quad (٣)
 \end{aligned}$$

الحل

نضع: $dt = 2e^{2x} dx \Leftrightarrow e^{2x} = t$

يصبح التكامل على الشكل:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 9}} = \cosh^{-1} \frac{t}{3} + c = \cosh^{-1} \frac{e^{2x}}{3} + c$$

أو بالاستعانة بالصيغ اللوغاريتمية:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 9}} = \ln \left| \sqrt{t^2 - 9} + t \right| + c = \ln \left(\sqrt{e^{4x} - 9} + e^{2x} \right) + c$$

$$\left(\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 9}} = \ln \left| \sqrt{t^2 - 9} + t \right| + c \quad \text{(لاحظ أن:)} \right)$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{4+9x^2}} = \int \frac{dx}{3\sqrt{\frac{4}{9}+x^2}} = \frac{1}{3} \sinh^{-1} \frac{3x}{2} + c \quad (٢)$$

أو باستخدام الصيغة اللوغاريتمية:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{4+9x^2}} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{4}{9}+x^2}} = \frac{1}{3} \ln \left(\sqrt{\frac{4}{9}+x^2} + x \right) + c$$

(لاحظ أن: $\int \frac{dt}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln \left(\sqrt{a^2+x^2} + x \right) + c$)

$$\int \frac{5}{6-2x^2} dx = \frac{5}{2} \int \frac{dx}{3-x^2} = \begin{cases} \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \tanh^{-1} \frac{x}{\sqrt{3}} + c, & |x| < \sqrt{3} \\ \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \coth^{-1} \frac{x}{\sqrt{3}} + c, & |x| > \sqrt{3} \end{cases} \quad (٣)$$

أو في كلتا الحالتين باستخدام الصيغة اللوغاريتمية:

$$\frac{5}{2} \int \frac{dx}{3-x^2} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{3}+x}{\sqrt{3}-x} \right| + c$$

(لاحظ أن: $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + c$)

$$(٤) \text{ نضع: } dt = e^x dx \Leftarrow e^x = t$$

يصبح التكامل على الشكل:

$$\int \frac{dt}{e^x \sqrt{4-e^{2x}}} = \int \frac{dt}{t \sqrt{4-t^2}} = -\frac{1}{2} \operatorname{sech}^{-1} \frac{|t|}{2} + c = -\frac{1}{2} \operatorname{sech}^{-1} \frac{e^x}{2} + c$$

$$(e^x < 2 \Rightarrow x < \ln 2)$$

أو حسب الصيغة اللوغاريتمية:

$$\int \frac{dt}{t \sqrt{4-t^2}} = -\frac{1}{2} \ln \frac{2+\sqrt{4-t^2}}{|t|} + c$$

$$= -\frac{1}{2} \ln \frac{2+\sqrt{4-e^{2x}}}{e^x} + c$$

$$\left(\int \frac{dx}{x \sqrt{a^2 \pm x^2}} = -\frac{1}{a} \ln \frac{a+\sqrt{a^2 \pm x^2}}{|x|} + c \right) \quad (\text{لاحظ أن:})$$

تمارين (٢, ١٥)

أوجد y' ، إذا كان:

$$y = (\operatorname{sech}^{-1} x)^3 + (\sinh^2 x)^{x+1} \quad (٢)$$

$$y = \sinh^{-1} x^2 + \ln(\cosh 5x) \quad (٤)$$

$$y = x \operatorname{sech}^{-1} x + \tanh^{-1} x^2 \quad (٦)$$

$$y = \operatorname{sech}^{-1} x^3 \quad (٨)$$

$$y = \tanh^{-1}(3x) \quad (١٠)$$

$$y = \sinh^{-1}(e^{2x} + x^2) \quad (١٢)$$

$$y = \operatorname{sech}^{-1} \sqrt{1-2x} \quad (١٤)$$

$$y = (\tanh^{-1}(x))^4 + (\cosh 2x)^x \quad (١)$$

$$y = (x^2 + 1)^{\tan x} + \sinh^{-1} 3x \quad (٣)$$

$$y = \tan(x^2 + 1) + x \sinh^{-1} x \quad (٥)$$

$$y = \ln(\cosh^{-1} 2x) \quad (٧)$$

$$y = \sqrt{\cosh^{-1} 2x} \quad (٩)$$

$$y = \tanh^{-1}(\cos 3x) \quad (١١)$$

$$y = \tanh^{-1} x^3 \quad (١٣)$$

أوجد التكاملات التالية:

$$\int \coth^{-1} x dx \quad (١٦)$$

$$\int \operatorname{csch}^{-1} x dx \quad (١٨)$$

$$\int \cosh^{-1} x dx \quad (٢٠)$$

$$\int x^4 \cosh^{-1} x dx \quad (٢٢)$$

$$\int (x^3 + x^2) \sinh^{-1} x dx \quad (٢٤)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 - 4}} \quad (٢٦)$$

$$\int \tanh^{-1} x dx \quad (١٥)$$

$$\int \operatorname{sech}^{-1} x dx \quad (١٧)$$

$$\int \sinh^{-1} x dx \quad (١٩)$$

$$\int (x+1) \sinh^{-1} x dx \quad (٢١)$$

$$\int \frac{\tanh^{-1} x dx}{1-x^2} \quad (٢٣)$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{16-x^4}} dx \quad (٢٥)$$

(٢٧) أثبت أن: $(\cosh x \pm \sinh x)^n = \cosh(nx) \pm \sinh(nx)$ حيث n عدد صحيح موجب.

أوجد التكاملات التالية:

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{4 - \cos^2 x}} dx \quad (٢٩)$$

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{4 + \cos^2 x}} dx \quad (٣١)$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{9+x^4}} \quad (٣٣)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9+16x^2}} dx \quad (٢٨)$$

$$\int \frac{\sec^2 x dx}{\sqrt{4 \tan^2 x + 9}} \quad (٣٠)$$

$$\int \frac{dx}{16-9x^2} \quad (٣٢)$$

الفصل السادس عشر

قاعدة لوبيتال L'HOPITAL'S RULE

(١٦, ١) صيغ عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ أو من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$
Indeterminate Forms of Type $0/0$ or ∞/∞

نظرية (١٦, ١) (قاعدة لوبيتال)

إذا كانت الدالتان: f, g

(١) قابلتين للاشتقاق على الفترة (a, b) التي تنتمي إليها النقطة c .

(ومن الممكن أن لا تكون الدالتان f, g قابلتين للاشتقاق عند c)

(٢) وإذا كانت $g'(x) \neq 0$ لكل $x \neq c$ على هذه الفترة.

(٣) وإذا كان $\frac{f(x)}{g(x)}$ في حالة عدم تعيين من الشكل: $\left[\frac{0}{0}\right]$ أو $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ عندما $x \rightarrow c$ ، فإن:

(١٦, ١)

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

بشرط أن تكون النهاية في الجانب الأيمن من (١٦, ١) موجودة، أو تكون مساوية ∞ (أو $-\infty$).

مثال (١٦, ١)

أوجد النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x^2} \quad (٢)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} \quad (١)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln x}{x + \ln x} \quad (٤)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2 \sin x}{x \sin x} \quad (٣)$$

الحل

(١) الوضع هو حالة عدم تعيين من الشكل $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. لنطبق قاعدة لوبيتال، فنجد:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

(طبقنا قاعدة لوبيتال مرتين متتاليتين).

(٢) الوضع هو حالة عدم تعيين من الشكل $\left[\frac{0}{0}\right]$. لنطبق قاعدة لوبيتال، فنجد:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sec^2 x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sec x \sec x \tan x}{2} = 0$$

(طبقنا قاعدة لوبيتال مرتين متتاليتين).

(٣) الوضع هو حالة عدم تعيين من الشكل $\left[\frac{0}{0}\right]$. لنطبق قاعدة لوبيتال:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2 \sin x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2 \cos x}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} + 2 \sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = 0$$

(٤) الحالة هي حالة عدم تعيين من الشكل $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. لنطبق قاعدة لوبيتال، فنجد:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln x}{x + \ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + 1}{1 + \frac{1}{x}} = \infty$$

(لاحظ أن: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$).

(٢, ١٦) صيغ عدم التعيين من الشكل $\infty - \infty$ أو $0 \times \infty$

تواجهنا أيضا عندما نبحث عن نهايات بعض الدوال، من الشكل:

$$h(x) = f(x) + g(x) \quad (\text{أ}) \quad h(x) = f(x)g(x) \quad (\text{ب})$$

وذلك عندما تنتهي قيمة المتغير x نحو قيمة محددة a ، حالتين:

الحالة الأولى: في الفقرة (أ)، وذلك عندما تكون نهايتا الدالتين f, g على الصورة:

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \quad (\text{أو العكس})$$

ندعو هذه الحالة، بحالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$.

هذه الحالة لا يوجد لها طريقة محددة لردّها إلى حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$ ، لكن

الأمثلة المتنوعة كفيلة بتوليد الملكة التي تمكن الطالب من تحقيق ذلك.

الحالة الثانية: في الفقرة (ب)، وذلك عندما تكون نهايتا الدالتين f, g على الصورة:

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \quad (\text{من الممكن أن تنتهي } f \text{ نحو } -\infty)$$

نسمي هذا الوضع: بحالة عدم تعيين من الشكل $0 \times \infty$. نضع هنا $h(x)$ على إحدى الصورتين:
 $h(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ أو $h(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ حسبما تقتضيه الضرورة، فتقلب الحالة إلى صيغة عدم تعيين
 من الشكل $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$. بعدها نطبق قاعدة لوبيتال لإزالة عدم التعيين.

مثال (٢، ١٦)

أوجد النهايات التالية:

$$\begin{aligned} (١) \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(\sqrt{2x+3} - \ln \sqrt{x+2}) \\ (٢) \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{x+1}{x-1} \\ (٣) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \cot x \ln(1 + \sin x) \\ (٤) \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{x-1} \right) \end{aligned}$$

الحل

(١) الوضع عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$.

من الممكن أن تكتب النهاية على الصورة:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln \sqrt{2x+3} - \ln \sqrt{x+2}) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} [\ln(2x+3) - \ln(x+2)]$$

(لاحظ أن: $\sqrt{2x+3} = (3x+3)^{\frac{1}{2}}$ ، وأن:

$$\ln(2x+3)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln(2x+3)$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{2x+3}{x+2} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{x+2} \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{2}{1} = \frac{1}{2} \ln 2$$

(الوضع الناتج عدم تعيين من الصورة $\frac{\infty}{\infty}$ ، لذا طبقنا قاعدة لوبيتال).

(٢) الوضع عدم تعيين من الصورة: $\infty \times 0$

نكتب النهاية على الشكل:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{x+1}{x-1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}}{-\frac{1}{x^2}}$$

(جعلنا x مقاماً للمقام، فانقلب الوضع إلى الحالة $\frac{0}{0}$ وطبقنا عند ذلك قاعدة لوبيتال)

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{2x} = 2$$

(طبقنا لوبيتال مرتين)

(٣) الوضع عدم تعيين من الشكل: $\infty \times 0$
لاحظ أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cot x \ln(1 + \sin x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\frac{1}{\cot x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\tan x}$$

(أصبح وضع عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\sec^2 x} = \frac{1}{1} = 1$$

(٤) الوضع عدم تعيين من الشكل: $\infty - \infty$
تكتب النهاية على الصورة:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1-x \ln x}{(x-1) \ln x}$$

(وحدنا المقامات فأصبح عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$)

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - (\ln x + 1)}{\ln x + (x-1) \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\ln x}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{2}$$

(٣، ١٦) صيغ عدم التعيين من الشكل 0^0 ، 1^∞ ، ∞^0

سنتعرف فيما يلي على أنواع جديدة من أوضاع عدم التعيين لم نصادفها من قبل، تواجهنا عندما نبحث عن نهايات بعض الدوال المعرفة، بالصورة:

(٢، ١٦) $y = f(x)^{g(x)}$ ، $f(x) > 0$

وذلك عندما تكون نهايتا الدالتين f ، g عندما $x \rightarrow a$ ، وفق أحد الأوضاع التالية:

(١) $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ، $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ (عدم التعيين من الشكل: 0^0)

(٢) $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ، $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ (عدم التعيين على الصورة: ∞^0)

(٣) $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ (عدم التعيين على الشكل: 1^∞)

تعالج الحالات السابقة جميعها، وفق الخطوات التالية:

(١) نأخذ \ln الطرفين للمقدار: $y = f(x)^{g(x)}$ ، فنجد:

$$\ln y = g(x) \ln(f(x))$$

(٢) ننهي x نحو القيمة a ، فنحصل على النهاية:

$$\lim_{x \rightarrow a} (\ln y) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} (\ln(f(x)))$$

(٣) نضع النهاية على الصورة:

$$\ln(\lim y) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln(f(x))}{\frac{1}{g(x)}}$$

(٤) نطبق قاعدة لوبيتال مع التأكد من توافر شروطها. إن كانت النهاية موجودة وتساوي k ،

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = e^k} \text{ فإن: (النهاية موجودة) } \lim_{x \rightarrow a} y = e^k \Rightarrow \ln(\lim y) = k \text{ ، أو: } \lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = e^k$$

إذا كانت: $k = \infty$ ، فإن: $\lim_{x \rightarrow a} y = \infty$. إذا كانت: $k = -\infty$ ، فإن: $\lim_{x \rightarrow a} y = 0$.

مثال (٣، ١٦)

أوجد النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^x \quad (٣) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\sin x} \quad (٢) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{3x} \quad (١)$$

الحل

(١) الحالة من الشكل: 1^∞

(أ) نضع: $y = \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{3x}$ ، ثم نأخذ \ln الطرفين فنجد:

$$\ln y = 3x \ln \left(1 + \frac{2}{x}\right)$$

(ب) ننهي $x \rightarrow \infty$ ، فنجد:

$$\ln(\lim y) = 3 \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{2}{x}\right)$$

(الوضع من الشكل $\infty \times 0$)

(ج) نكتب النهاية السابقة، بالصورة:

$$\begin{aligned} \ln(\lim y) &= 3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \\ &= 3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{2}{x}} \cdot -\frac{2}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = 3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + \frac{2}{x}} = 6 \end{aligned}$$

(د) النهاية موجودة، وبالتالي فإن:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{3x} = e^6 \quad (أ) \text{ نضع: } y = (\sin x)^{\sin x} \quad (٢)$$

ثم نأخذ \ln الطرفين، فنحصل على المساواة:

$$\ln y = \sin x \ln(\sin x)$$

(ب) ننهي $x \rightarrow 0^+$ ، فنجد:

$$\begin{aligned} \ln(\lim y) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln(\sin x) \\ &\quad (\text{الوضع من الشكل } 0 \times (-\infty)) \end{aligned}$$

(ج) نكتب النهاية على الصورة:

$$\begin{aligned} \ln(\lim y) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{\sin x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x = 0 \end{aligned}$$

(طبقنا قاعدة لوبيتال)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\sin x} = 1 \text{ ، إذن: } \lim_{x \rightarrow 0^+} y = e^0 = 1 \quad (د)$$

$$(أ) \text{ نضع: } y = x^{\frac{1}{x}}, \quad x > 0 \quad (٣)$$

ثم نأخذ: \ln الطرفين، فنجد:

$$\ln y = \frac{1}{x} \ln x = \frac{\ln x}{x} \quad (\text{الوضع من الشكل } \infty^0)$$

(ب) نأخذ النهاية عندما: $x \rightarrow \infty$ فنحصل على الصيغة:

$$\ln(\lim y) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{\frac{1}{1}}{1} = 0$$

(الوضع عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1 \quad (\text{ج) إذن:}$$

تمارين (١, ١٦)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3} \quad (٢)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6} \quad (١)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{1 - \cos x} \quad (٤)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{1 - \sin \frac{\pi x}{2}} \quad (٣)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x - 2 \tan x}{1 + \cos 4x} \quad (٦)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x - \sin x} \quad (٥)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^5} \quad (٨)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\tan 5x} \quad (٧)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{x}}{\cot \frac{\pi x}{2}} \quad (١٠)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} \quad (٩)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cot x \quad (١٢)$$

$$(m > 0), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin(mx))}{\ln(\sin x)} \quad (١١)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin^{-1} x \cot x \quad (١٤)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \tan \frac{\pi x}{2} \quad (١٣)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{a}{x} \quad (١٦)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^n e^{-x}), \quad n > 0 \quad (١٥)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x \ln(x - 1) \quad (١٨)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^n \sin \frac{a}{x}, \quad a > 0 \quad (١٧)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{5}{x^2 - x - 6} \right) \quad (٢٠)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) \quad (١٩)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{\cot x} - \frac{\pi}{2 \cos x} \right) \quad (٢٢)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{2(1 - \sqrt{x})} - \frac{1}{3(1 - x^{\frac{1}{3}})} \right] \quad (٢١)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} \quad (٢٤)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} \quad (٢٦)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\frac{1}{x}} \quad (٢٨)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\tan \frac{\pi x}{4} \right)^{\tan \frac{\pi x}{2}} \quad (٣٠)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \right)^{\tan x} \quad (٣٢)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} \quad (٣٤)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x \quad (٢٣)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{3}{4 + \ln x}} \quad (٢٥)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - x)^{\cos \frac{\pi x}{2}} \quad (٢٧)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} \quad (٢٩)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} \quad (٣١)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x)^{\sin x} \quad (٣٣)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} \quad (٣٥)$$

الإجابات

٣	(٥	١	(٤	∞	(٣	$-\frac{1}{3}$	(٢	$\frac{1}{2}$	(١
$\frac{\pi^2}{2}$	(١٠	صفر	(٩	∞	(٨	5	(٧	$\frac{1}{2}$	(٦
صفر	(١٥	١	(١٤	$\frac{2}{\pi}$	(١٣	0	(١٢	1	(١١
a (١٦ ∞ من أجل n > 1، a من أجل n = 1، صفر من أجل n < 1									
-1	(٢٢	$\frac{1}{12}$	(٢١	$\frac{1}{5}$	(٢٠	$\frac{1}{2}$	(١٩	صفر	(١٨
1	(٢٧	1	(٢٦	e^3	(٢٥	1	(٢٤	1	(٢٣
1	(٣٢	$\frac{1}{e}$	(٣١	$\frac{1}{e}$	(٣٠	$\frac{1}{e}$	(٢٩	1	(٢٨
				1	(٣٥	صفر	(٣٤	1	(٣٣

التكاملات المعتلة IMPROPER INTEGRALS

(١٧, ١) فترة التكامل محدودة

نعلم أنه إذا كانت f دالة متصلة على الفترة $[a, b]$ ، فإن:

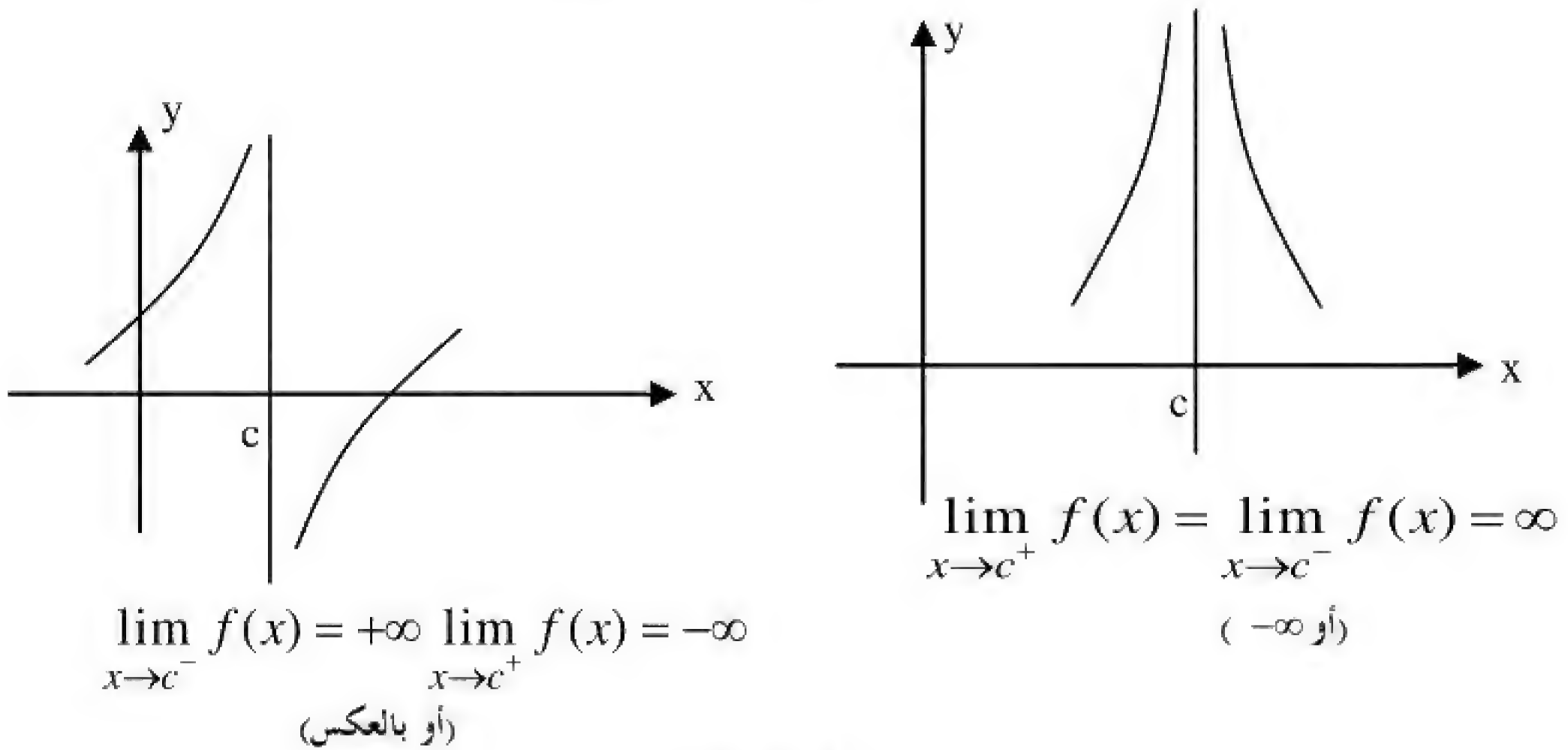
(١) f قابلة للتكامل على الفترة المغلقة $[a, b]$

(٢) وإذا كانت c نقطة تنتمي للمفتوحة (a, b) ، فإن:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad (١٧, ١)$$

لتساءل الآن عن الحالة التي يحدث فيها شرط الاتصال على الفترة $[a, b]$ عند نقطة واحدة

فقط $c \in (a, b)$ ، ويكون عدم الاتصال عند c من النمط الموضح في الشكل (١٧, ١).



شكل (١٧, ١).

نقول إن للدالة f عند c نقطة عدم اتصال لانهائية. في هذه الحالة، نعرف الآن التكاملين الجزئيين في الطرف الثاني من (١٧, ١)، بالشكل:

$$(١٧, ٢) \quad \begin{aligned} \int_a^c f(x)dx &= \lim_{t \rightarrow c^-} \int_a^t f(x)dx \\ \int_c^b f(x)dx &= \lim_{t \rightarrow c^+} \int_t^b f(x)dx \end{aligned}$$

إذا كانت النهايتان السابقتان في (١٧, ٢) موجودتين، عند ذلك نقبل التعريف أن المساواة في (١٧, ١) هي مساواة صحيحة ونقول إن التكامل: $\int_a^b f(x)dx$ هو تكامل متقارب وموجود (رغم وجود علة عدم الاتصال للدالة f عند c)

تعريف (١٧, ١)

إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a, b]$ ، باستثناء نقطة واحدة c تنتمي للفترة (a, b) ، وإذا كان التكاملان الجزئيان في (١٧, ٢) موجودين. فبالتعريف: نقبل أن المساواة في (١٧, ١) صحيحة، وأن:

$$(١٧, ٣) \quad \int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow c^-} \int_a^t f(x)dx + \lim_{t \rightarrow c^+} \int_t^b f(x)dx$$

ونقول عند ذلك، إن التكامل متقارب على الفترة $[a, b]$. إذا كانت إحدى النهايتين في (١٧, ٣) غير موجودة أو كلاهما غير موجود، فإننا نقول إن التكامل في (١٧, ٣) تكامل متباعد. ونعني بكلمة موجود، أنه محدود وذو قيمة وحيدة.

مثال (١٧, ١)

اختبر تقارب (Converge) أو تباعد (Diverge) التكامل:

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{1}{3}}}$$

الحل

لاحظ أن المقدار: $f(x) = \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{3}}}$ غير متصل عند $x = 1$ لانعدام مقامه.

لاحظ انتهاء الدالة نحو اللانهاية ∞ عندما $x \rightarrow 1^+$ ونحو سالب لانهاية $-\infty$ عندما $x \rightarrow 1^-$. فالتكامل معتل عند هذه النقطة. لتساءل عن إمكانية وجود النهايتين:

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{3}}} dx, \quad \lim_{t \rightarrow 1^+} \int_t^2 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{1}{3}}}$$

فنجد:

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{3}}} dx = \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{3}{2} (x-1)^{\frac{2}{3}} \Big|_0^t \quad (١)$$

$$= \frac{3}{2} \lim_{t \rightarrow 1^-} \left[(t-1)^{\frac{2}{3}} - (0-1)^{\frac{2}{3}} \right] = -\frac{3}{2}$$

$$\lim_{t \rightarrow 1^+} \int_t^2 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{1}{3}}} = \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{3}{2} (x-1)^{\frac{2}{3}} \Big|_t^2 \quad (٢)$$

$$= \frac{3}{2} \lim_{t \rightarrow 1^+} \left[(2-1)^{\frac{2}{3}} - (t-1)^{\frac{2}{3}} \right] = \frac{3}{2}$$

إذن: النهايتان موجودتان والتكامل يساوي مجموع النهايتين السابقتين، إذن:

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{1}{3}}} = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0$$

والتكامل متقارب نحو القيمة 0. من الممكن أن تكون علة التكامل وموضع نقطة عدم الاتصال، عند أحد طرفي فترة التكامل والمثال التالي يوضح ذلك.
مثال (٢، ١٧)

اختبر فيما إذا كان التكامل التالي متقارباً أو متباعدًا.

$$\int_0^1 x \ln x dx$$

الحل

لاحظ أن الدالة: $f(x) = x \ln x$ هي غير متصلة وغير معرفة عند $x=0$ ، وأن:

$\lim_{t \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$. فالتكامل معتل عند هذه النقطة ويكتب على الشكل:

$$\int_0^1 x \ln x dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 x \ln x dx$$

من الواضح أن:

$$\int_t^1 (\ln x)(x dx) = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_t^1 - \int_t^1 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$(\text{وضعنا: } dv = \frac{1}{x} dx \Leftarrow \ln x = v, u = \frac{x^2}{2} \Leftarrow x dx = du)$$

$$= \frac{1}{2} \ln 1 - \frac{t^2}{2} \ln t - \frac{x^2}{4} \Big|_t^1 = -\frac{t^2}{2} \ln t - \frac{1}{4} + \frac{t^2}{4}$$

بأخذ نهاية المقدار السابق عندما $t \rightarrow 0^+$ ، نجد:

$$\int_0^1 x \ln x dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(-\frac{t^2}{2} \ln t + \frac{t^2}{4} - \frac{1}{4} \right) = -\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0^+} t^2 \ln t - \frac{1}{4}$$

(عدم التعيين هو من الشكل $0 \times \infty$)

$$= -\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln t}{t^{-2}} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{t}}{-2t^{-3}} - \frac{1}{4}$$

$$(\text{التكامل متقارب}) = \frac{1}{4} \lim_{t \rightarrow 0^+} t^2 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

(طبقنا قاعدة لوبيتال، وعدم التعيين هو من الشكل $\frac{0}{0}$)

من الممكن أن تتعدد نقاط عدم الاتصال لدالة التكامل على فترة التكامل $[a, b]$. سنعالج بشكل عام هذا الأمر من خلال تجزئة فترة التكامل بحيث تحوي كل فترة جزئية على نقطة عدم اتصال وحيدة، ثم نختبر بعد ذلك تقارب التكامل على كل فترة جزئية وبشكل مستقل عن الأخرى، المثال التالي يوضح ذلك.

مثال (٣، ١٧)

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} \text{ :اختبر تقارب أو تباعد التكامل التالي:}$$

الحل

من الملاحظ أن مجال دالة التكامل، هو: $(0, 1)$ وأن طرفي هذه الفترة نقطتي عدم اتصال لهذه الدالة.

$$\text{لاحظ أن: } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} = \infty, \text{ وأن: } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} = \infty$$

لنجزئ فترة التكامل إلى تكاملين بالنقطة: $x = \frac{1}{2}$ مثلاً، فنجد:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} + \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_{\frac{1}{2}}^t \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} \end{aligned}$$

$$\text{لاحظ أن: } = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} + \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_{\frac{1}{2}}^t \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

$$x(1-x) = -x^2 + x = -(x^2 - x) = -\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} = \sin^{-1} \frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} + c = \sin^{-1}(2x - 1) + c \quad \text{إذن:}$$

بالتالي، فإن:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \sin^{-1}(2x - 1) \Big|_t^{\frac{1}{2}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} [\sin^{-1} 0 - \sin^{-1}(2t - 1)] = \frac{\pi}{2}$$

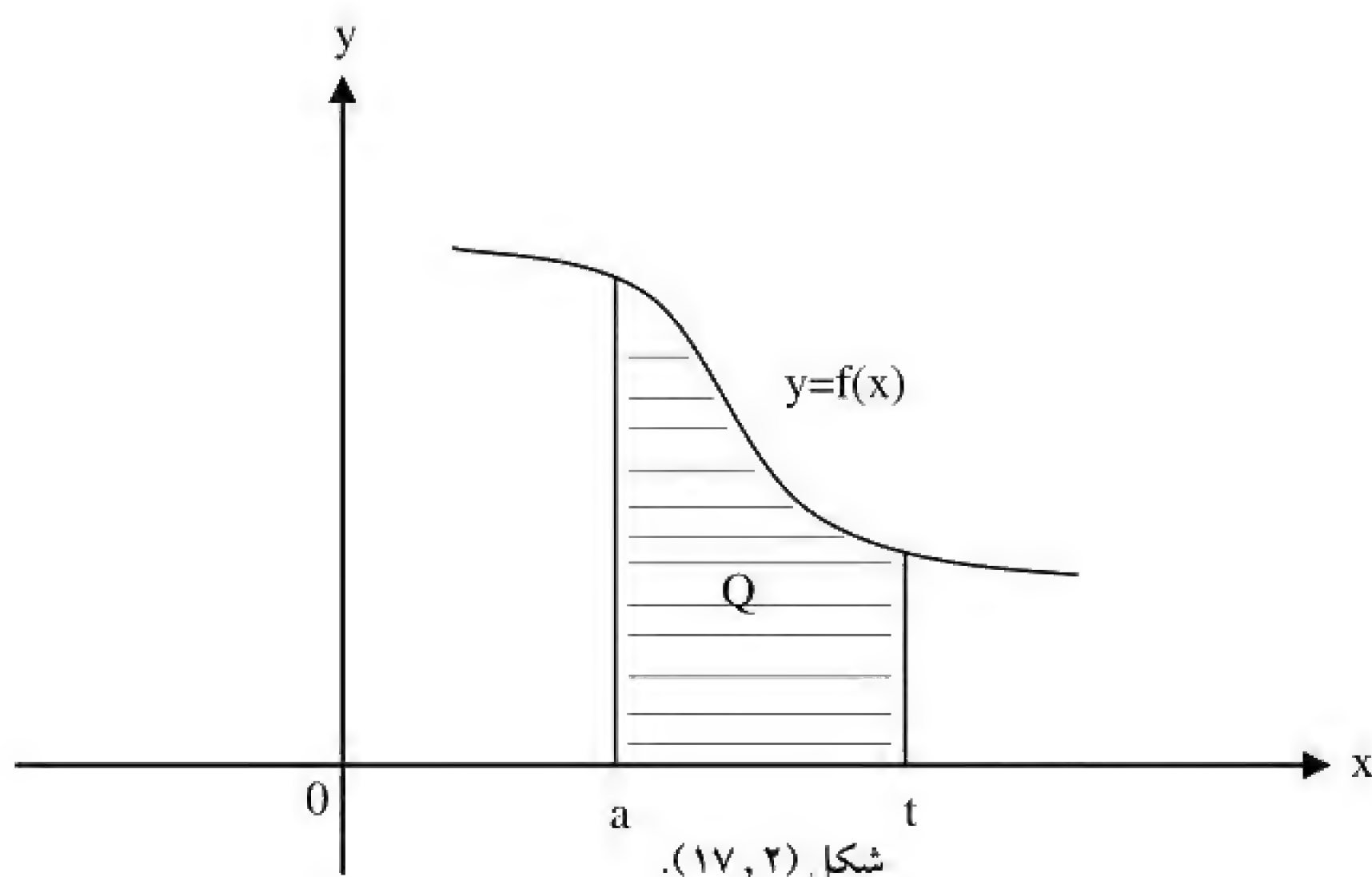
$$\lim_{t \rightarrow 1^-} \int_{\frac{1}{2}}^t \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \lim_{t \rightarrow 1^-} \sin^{-1}(2x - 1) \Big|_{\frac{1}{2}}^t = \lim_{t \rightarrow 1^-} [\sin^{-1}(2t - 1) - \sin^{-1} 0] = \frac{\pi}{2}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \quad \text{فالتكامل متقارب ويساوي:}$$

(٢، ١٧) فترة التكامل غير محدودة

لتكن f دالة متصلة وغير سالبة ($f(x) \geq 0$)، على الفترة اللانهائية $[a, \infty)$ وتحقق الشرط:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(x) = 0$$



لنبحث عن مساحة المنطقة Q الواقعة تحت المنحنى $y = f(x)$ وفوق المحور x والمحصورة بين المستقيمين: $x = a$ و $x = t$ حيث: $t > a$ ، نجد:

$$S = \int_a^t f(x) dx$$

إذا انتهت المساحة S نحو قيمة محدودة ووحيدة، عندما $t \rightarrow \infty$ ، فبالتعريف نقول عن هذه القيمة، إنها تمثل مساحة المنطقة اللانهائية الواقعة فوق المحور x وتحت المنحنى: $y = f(x)$ والمحدودة عند طرفها الأيسر بالمستقيم $x = a$ (شكل (١٧, ٢))، وتعطى هذه المساحة بالصيغة:

$$S = \int_a^{\infty} f(x) dx$$

نقدم فيما يلي تعريفا يعمم هذا المفهوم.

تعريف (١٧, ٢)

- (١) إذا كانت f دالة متصلة على الفترة اللانهائية $[a, \infty)$ ، فإن:
- $$(١٧, ٤) \quad \int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx$$
- (٢) إذا كانت f دالة متصلة على الفترة اللانهائية $(-\infty, a]$ ، فإن:
- $$(١٧, ٥) \quad \int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^a f(x) dx$$
- يدعى كل من التكاملين السابقين بالتكامل المعتل. العلة هنا تكمن في كون أحد حدي التكامل غير محدود. نقول إن التكامل في (١٧, ٤) متقارب إذا كانت النهاية في الجانب الأيمن موجودة، وإلا فنقول إنه متباعد وبالمثل في (١٧, ٥).

تعريف (١٧, ٣)

- إذا كانت الدالة f متصلة على R (مجموعة الأعداد الحقيقية)، فإن:
- $$(١٧, ٦) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{\infty} f(x) dx$$
- حيث a أي عدد حقيقي.

نقول إن التكامل في الجانب الأيسر من المساواة السابقة متقارب، إذا كان كل من التكاملين في الجانب الأيمن من نفس المساواة متقاربا وموجودا، أما إذا كان أحد التكاملين متباعدا أو كلاهما فنقول إنه تكامل متباعد.

مثال (٤, ١٧)

اختبر تقارب أو تباعد التكاملات التالية:

$$\int_0^{\infty} \ln x dx \quad (٢) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} dx \quad (١)$$

الحل

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} dx &= \int_{-\infty}^0 e^{-|x|} dx + \int_0^{\infty} e^{-|x|} dx \\ &= \int_{-\infty}^0 e^x dx + \int_0^{\infty} e^{-x} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} e^x \Big|_t^0 - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-x} \Big|_0^t \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} (1 - e^t) + \lim_{t \rightarrow \infty} (-e^{-t} + 1) = 1 + 1 = 2 \end{aligned} \quad (١)$$

فالتكامل متقارب نحو العدد 2.

$$\int_0^{\infty} \ln x dx = \int_0^1 \ln x dx + \int_1^{\infty} \ln x dx \quad (٢)$$

(التكامل معتل عند: $x=0$ وعند $x=\infty$)

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \ln x dx + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \ln x dx$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} x dx = x \ln x - x + c \quad \text{لاحظ أن:}$$

$$(\text{وضعنا: } dv = \frac{1}{x} dx \Leftarrow v = \ln x, \quad x=u \Leftarrow dx=du)$$

بالتالي، فإن:

$$\int_1^{\infty} \ln x dx = \lim_{t \rightarrow \infty} (x \ln x - x) \Big|_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} t(\ln t - 1) + 1 = \infty$$

فالتكامل الثاني متباعد. إذن التكامل: $\int_0^{\infty} \ln x dx$ تكامل متباعد.

تمارين (١, ١٧)

بين فيما إذا كانت المعتلة التالية متقاربة أو متباعدة، أو جد قيمة التكامل في حالة تقاربها.

$$\begin{array}{ll}
 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \quad (١) & \int_{-1}^2 \frac{dx}{x} \quad (٢) \\
 \int_0^1 \frac{dx}{x^p} \quad (٣) & \int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2} \quad (٤) \\
 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (٥) & \int_1^\infty \frac{dx}{x} \quad (٦) \\
 \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} \quad (٧) & \int_1^\infty \frac{dx}{x^p} \quad (٨) \\
 \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} \quad (٩) & \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+4x+9} \quad (١٠) \\
 \int_0^\infty \sin x dx \quad (١١) & \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln x} \quad (١٢) \\
 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln^2 x} \quad (١٣) & (a > 1) \int_a^\infty \frac{dx}{x \ln x} \quad (١٤) \\
 \int_2^\infty \frac{dx}{x \ln^2 x} \quad (١٥) & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cot x dx \quad (١٦) \\
 \int_0^\infty e^{-2x} dx \quad (١٧) & \int_0^\infty \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2} dx \quad (١٨) \\
 \int_2^\infty \frac{dx}{(x^2-1)^2} \quad (١٩) & \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3} \quad (٢٠) \\
 \int_0^1 \frac{dx}{x^3-5x^2} \quad (٢١) &
 \end{array}$$

الإجابات

$$\begin{array}{ll}
 2(١) & (٢) \text{ متباعد} \\
 \frac{1}{1-p} \quad (٣) & \text{إذا كان } p < 1, \text{ متباعد إذا كان } p \geq 1 \quad (٤) \text{ متباعد} \\
 \frac{\pi}{2} \quad (٥) & (٦) \text{ متباعد}
 \end{array}$$

$$\frac{1}{1-p} \text{ (٨) إذا كان } p>1 \text{ ومتباعد إذا كان } P\leq 1$$

١(٧

$$\frac{\pi}{\sqrt{5}} \text{ (١٠}$$

$$\pi \text{ (٩}$$

$$\text{متباعد (١٢)}$$

$$\text{متباعد (١١)}$$

$$\text{متباعد (١٤)}$$

$$\frac{1}{\ln 2} \text{ (١٣}$$

$$\text{متباعد (١٦)}$$

$$\frac{1}{\ln 2} \text{ (١٥}$$

$$\frac{\pi^2}{8} \text{ (١٨}$$

$$\frac{1}{2} \text{ (١٧}$$

$$\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \text{ (٢٠}$$

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\ln 3 \text{ (١٩}$$

$$\text{متباعد (٢١)}$$

الفصل الثامن عشر

تطبيقات في حساب التكامل باستخدام الإحداثيات الوسيطة والقطبية

THE APPLICATIONS OF INTEGRAL BY USING THE PARAMETRIC AND POLAR COORDINATES

(١٨, ١) المساحات

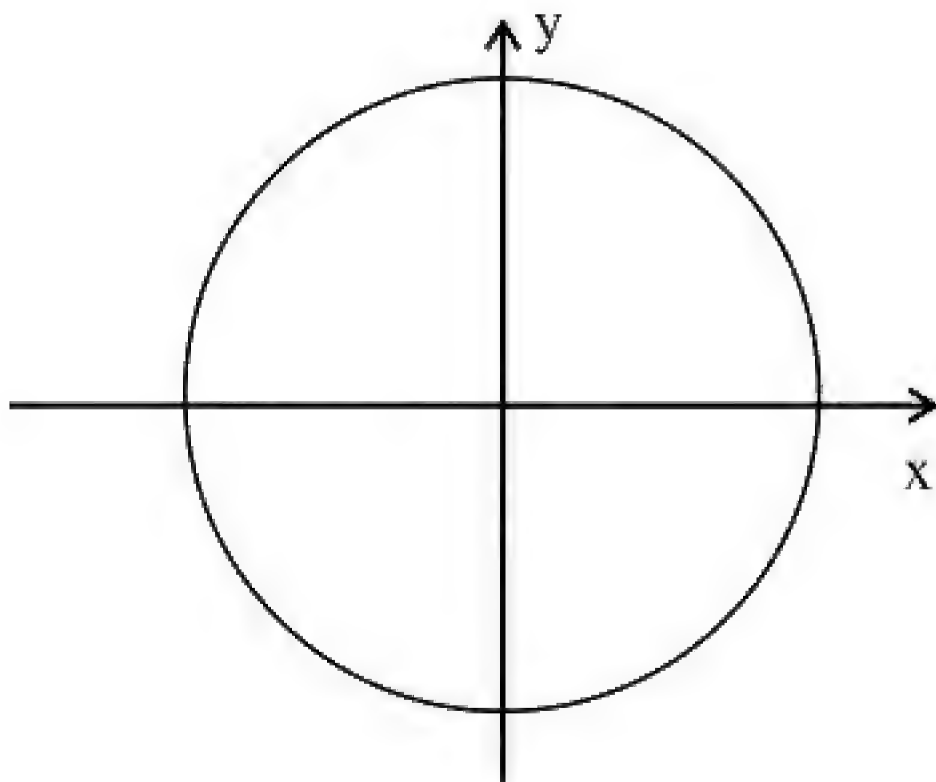
The Areas

أ) حساب المساحات باستخدام الإحداثيات الوسيطة

مثال (١٨, ١)

احسب مساحة المنطقة التي تحد

الدائرة: $x^2 + y^2 = a^2$



شكل (١٨, ١).

الحل

مساحة القرص الدائري تساوي: $S = 4 \int_0^a y \, dx$

(أربعة أمثال مساحة ربع الدائرة)

لنضع: $x = a \sin t$ ، فنجد: $y = a \cos t$

(التمثيل الوسيطي للدائرة)

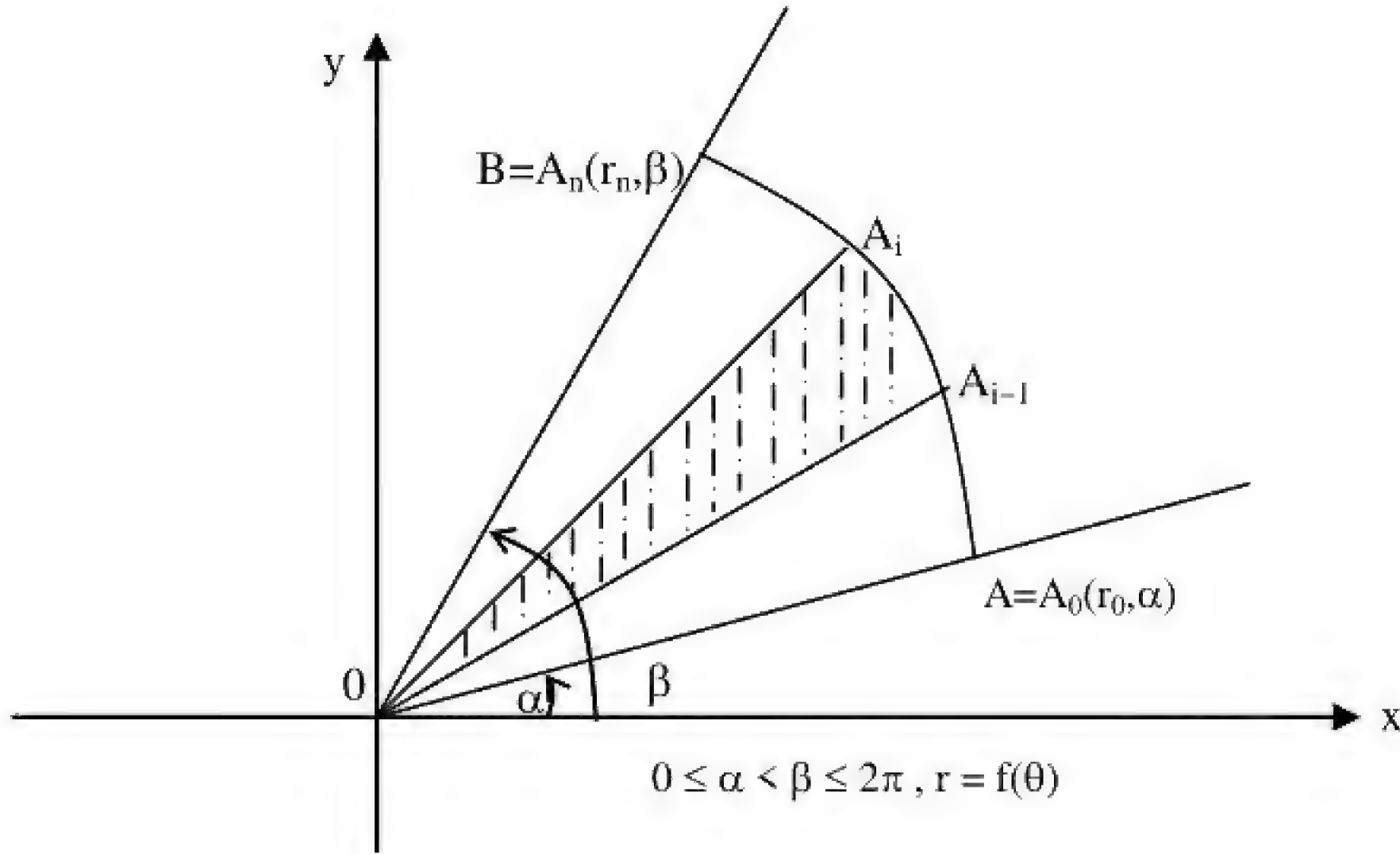
$$S = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos t (a \cos t dt) = 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt \quad \text{إذن:}$$

(لاحظ أن: $t=0 \Leftarrow \sin t=0 \Leftarrow x=0$)

وأن: $(t=\frac{\pi}{2} \Leftarrow \sin t=1 \Leftarrow x=a)$

$$= 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = 2a^2 \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2a^2 \left(\frac{\pi}{2} \right) = a^2 \pi$$

ب) حساب المساحات باستخدام الإحداثيات القطبية:



شكل (٢، ١٨).

لتكن f دالة متصلة على الفترة $[\alpha, \beta]$ وتحقق الشرط: $f(\theta) \geq 0$ على هذه الفترة. وليكن C منحنيا قطبيا معرفا بالمعادلة: $r = f(\theta)$. لنفرض أن $A_0(r_0, \alpha)$ ، $B(r_n, \beta)$ نقطتين من هذا المنحني حيث: $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$. لإيجاد مساحة المنطقة Q المحصورة بين قوس المنحني AB ونصفي المستقيمين: OA ، OB والموضحة في الشكل (٢، ١٨)، نقسم المنطقة Q إلى n قطاع منحني وذلك بتجزئة القوس AB بالنقاط: $A = A_0, A_1, A_2, \dots, A_{i-1}, A_i, \dots, A_n$ إلى n قوس ثم وصل النقطة O بهذه النقاط. من الملاحظ أن الزوايا التي تحدد هذه النقاط هي على الترتيب: $\theta_0 = \alpha, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n = \beta$ ، وأن مساحة القطاع المنحني المظلل في الشكل (٢، ١٨) وليكن ΔS_i

والذي زاويته المركزية تساوي: $\Delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i-1}$ محصورة بين القيمتين: $\frac{1}{2}(f(u_i))^2 \Delta\theta_i$ ، $\frac{1}{2}(f(v_i))^2 \Delta\theta_i$. حيث $f(u_i)$ هي القيمة الصغرى للدالة f على الفترة $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ و $f(v_i)$ هي القيمة العظمى لهذه الدالة على نفس الفترة (لاحظ أن مساحة أي قطاع دائري طول نصف قطر دائرته يساوي a وزاويته المركزية تساوي w تعطى بالصيغة: $\frac{1}{2}a^2w$). إذن:

$$\frac{1}{2}(f(u_i))^2 \Delta\theta_i \leq \Delta S_i \leq \frac{1}{2}(f(v_i))^2 \Delta\theta_i$$

بملاحظة أن مساحة المنطقة Q تساوي: $S = \sum_{i=1}^n \Delta S_i$ ، فإن:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2}(f(u_i))^2 \Delta\theta_i \leq \sum_{i=1}^n \Delta S_i \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}(f(v_i))^2 \Delta\theta_i$$

وعندما: $\max \Delta\theta_i \rightarrow 0$ ، فإن مجموع ريمان الأعلى في الجانب الأيمن من المتباينة السابقة، ومجموع ريمان الأدنى في الجانب الأيسر ينتهي نحو نفس النهاية والتي تساوي:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (f(\theta))^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta$$

مثال (١٨، ٢)

أوجد المساحة المحصورة بين الدائرتين:

$$r = -2\sin\theta \text{ و } r = 2\cos\theta \quad (١٨، ١)$$

الحل

لنبحث عن المعادلتين الديكارتيتين للمنحنيين السابقين، فنجد بضرب طرفي كل من المعادلتين (١٨، ١) بالمتغير r :

$$(x-1)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2x \Leftrightarrow r^2 = 2r\cos\theta \quad (\text{أ})$$

(لاحظ أن: $r=0$ نقطة من نقاط المنحني: $r = 2\cos\theta$ توافق $\theta = \frac{\pi}{2}$).

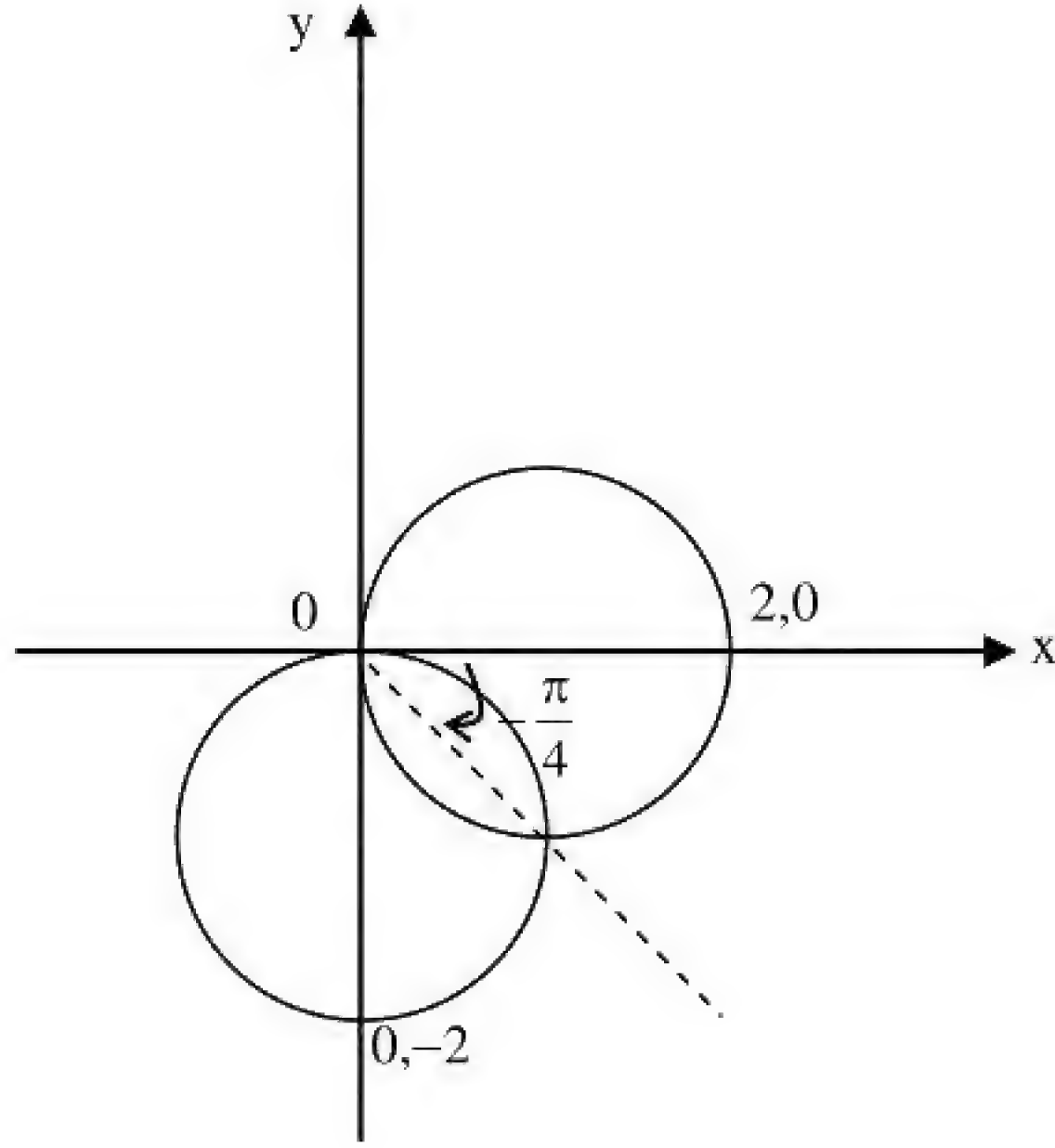
$$x^2 + (y+1)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = -2y \Leftrightarrow r^2 = -2r\sin\theta \quad (\text{ب})$$

(لاحظ أن $r=0$ نقطة من نقاط المنحني: $r = -2\sin\theta$ توافق $\theta = 0$)

نحصل على نقطة التقاطع الأخرى للدائرتين خلاف نقطة الأصل، من المعادلة:

$$\theta = -\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \tan\theta = -1 \Leftrightarrow 2\cos\theta = -2\sin\theta$$

لاحظ أن الدائرتين متماثلتان بالنسبة لمنصف الربع الثاني.



شكل (١٨, ٣).

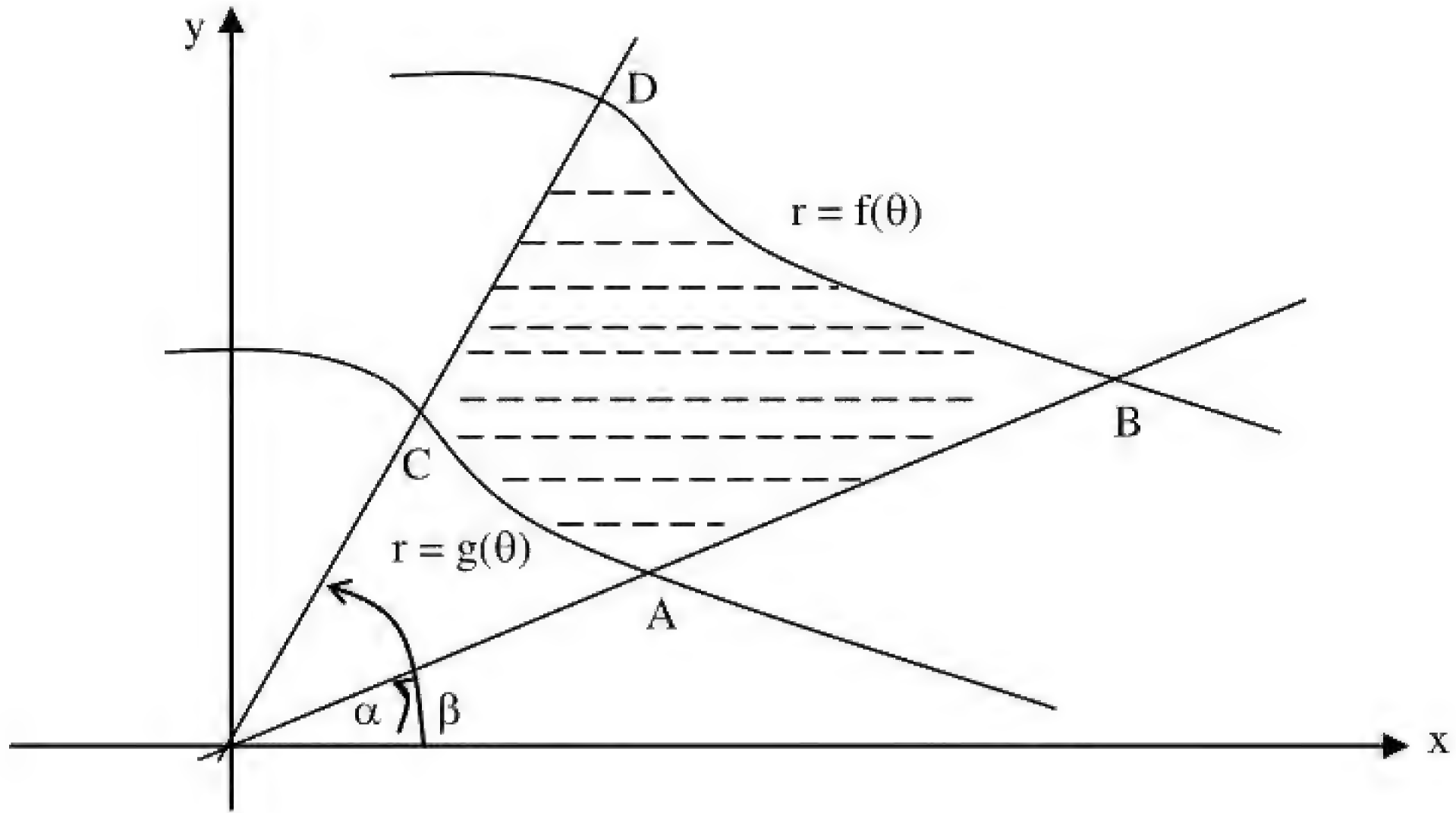
إذن المساحة المحصورة بينهما تساوي:

$$\begin{aligned} 2 \int_{-\pi/4}^0 \frac{1}{2} r^2 d\theta &= \int_{-\pi/4}^0 4 \sin^2 \theta d\theta = 2 \int_{-\pi/4}^0 (1 - \cos 2\theta) d\theta \\ &= 2 \left(\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \Big|_{-\pi/4}^0 = \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$

ج) حساب المساحة بين منحنين قطبيين

ليكن: $r = f(\theta)$ ، $r = g(\theta)$ منحنين قطبيين يخضعان لنفس الشروط التي ذكرت في الفقرة (ب). إذا كان: $f(\theta) \geq g(\theta)$ فإن المساحة المظللة بين المنحنين، شكل (١٨, ٤) تعطى بالصيغة:

$$\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \left[(f(\theta))^2 - (g(\theta))^2 \right] d\theta$$



شكل (٤، ١٨).

مثال (٣، ١٨)

أوجد المساحة المحصورة بين المنحنيين:

$$r = 6, \quad r = 3\sec\theta, \quad \text{إذا كان: } x \geq 3$$

الحل

المعادلة: $r = 6$ ، تمثل دائرة طول نصف قطرها 6 ومركزها نقطة الأصل.والمعادلة: $r = 3\sec\theta$ أو $r \cos\theta = 3$ ، تمثل مستقيماً معادلة الديكارتية:

$$x = 3.$$

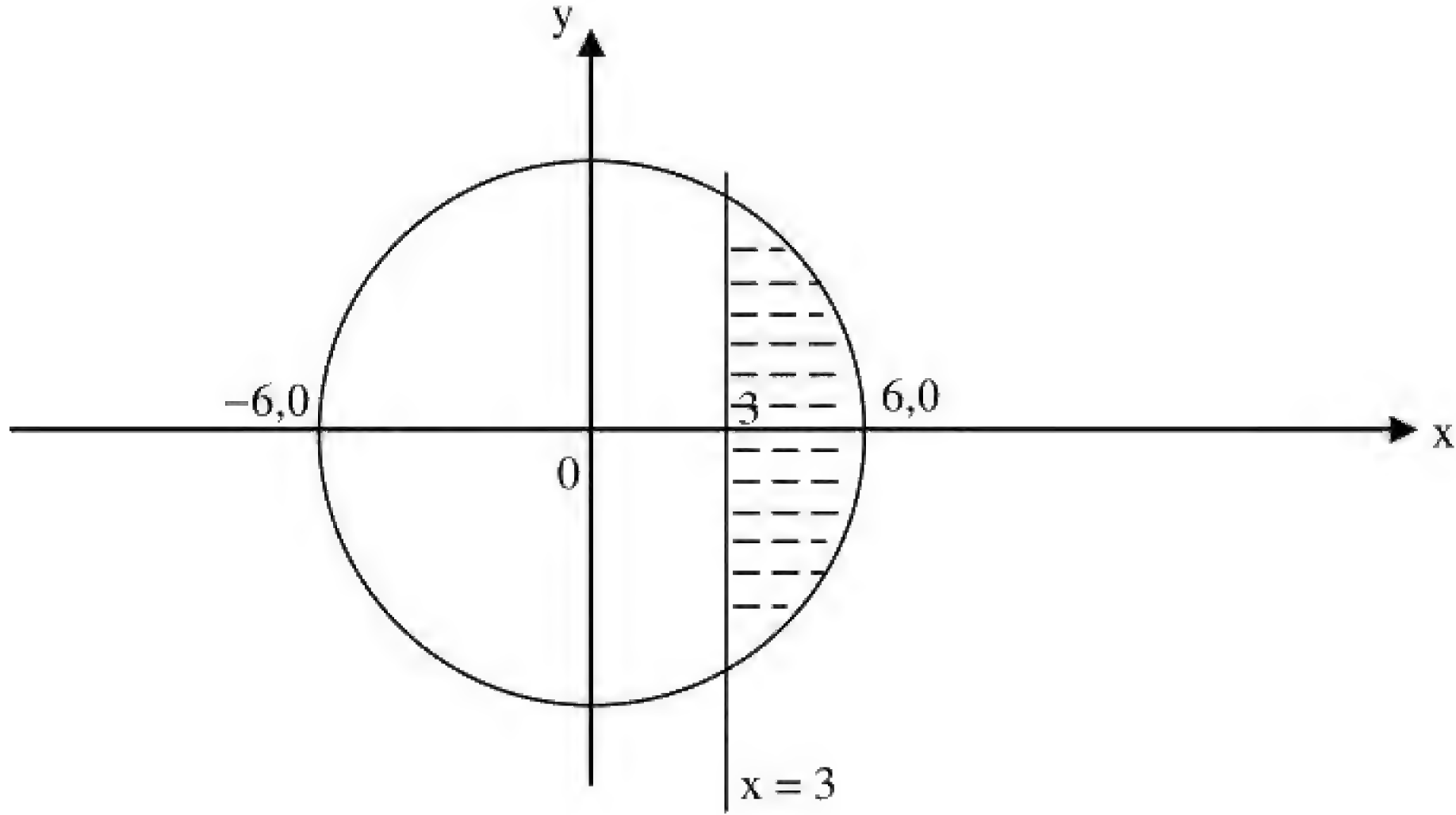
نحصل على نقاط التقاطع بين المنحنيين، من المعادلة:

$$\theta = \pm \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3\sec\theta = 6$$

المساحة تساوي:

$$S = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (36 - 9\sec^2\theta) d\theta$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (36 - 9\sec^2\theta) d\theta = 36\theta - 9\tan\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = 12\pi - 9\sqrt{3}$$



شكل (١٨, ٥).

تمارين (١٨, ١)

- (١) أوجد مساحة المنطقة التي يحدها المنحني: $x = a \cos^3 t, y = b \sin^3 t$.
- (٢) أوجد مساحة الشكل المحدود بالمحور x وقوس السيكلويد المعروف بالمعادلتين:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$
- (٣) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بقوس المنحني:

$$\begin{cases} x = at - b \sin t \\ y = a - b \cos t \end{cases} \quad (a < b \leq a)$$
 والقطعة المستقيمة المارة بالنقطتين الموافقتين: $t = 2\pi, t = 0$.
- (٤) أوجد مساحة الشكل المحدود بالمنحني:

$$x = a(2 \cos t - \cos 2t)$$

$$y = a(2 \sin t - \sin 2t)$$
- (٥) أوجد مساحة الجزء المغلق من المنحني:

$$x = \frac{3at^2}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}$$
- (٦) أوجد المساحة التي يحدها منحنى القلب: $r = a(1 + \cos \theta)$.

- (٧) أوجد مساحة إحدى وريقات الشكل المعرف بالمعادلة: $r = a \cos 2\theta$.
- (٨) أوجد مساحة الشكل المحدود بالمنحني: $r^2 = a^2 \sin 4\theta$.
- (٩) أوجد مساحة الشكل المحدود بالمنحني: $r = a \sin 3\theta$.
- (١٠) أوجد مساحة الشكل المحدود بالمنحني: $r = 2 + \cos \theta$.
- (١١) أوجد مساحة الشكل المحدود بالقطع المكافئ: $r = a \sec^2 \frac{\theta}{2}$ ، ونصفي المستقيمين: $\theta = \frac{\pi}{2}$ ، $\theta = \frac{\pi}{4}$.
- (١٢) أوجد مساحة القطع الناقص: $r = \frac{P}{1 + e \cos \theta}$ ($e < 1$).
- (١٣) أوجد مساحة الشكل الواقع خارج الدائرة: $r = a$ والمحدود بالمنحني: $r = 2a \cos 3\theta$.
- (١٤) أوجد مساحة الشكل المحدود بالمنحني: $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$ ، (استخدم المعادلة القطبية).

الإجابات

- (١) $\frac{3}{8} \pi ab$ (٢) $3\pi a^2$ (٣) $\pi(b^2 + 2ab)$
- (٤) $6\pi a^2$ (٥) $\frac{3}{2} a^2$ (٦) $\frac{3}{2} \pi a^2$
- (٧) $\frac{\pi a^2}{8}$ (٨) a^2 (٩) $\frac{\pi a^2}{4}$
- (١٠) $\frac{9}{2} \pi$ (١١) $\frac{14 - 8\sqrt{2}}{3} a^2$ (١٢) $\frac{\pi p^2}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}$
- (١٣) $a^2 \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ (١٤) $\pi \sqrt{2}$

(١٨, ٢) طول قوس

Arc Length

أ) طول قوس منحن معرف بمعادلتيه الوسيطيتين
ليكن C منحنيا مستويا معرفا وسيطيا بالمعادلتين:

$$x = \varphi(t) \text{ و } y = g(t) (\alpha \leq t \leq \beta)$$

لنفرض أن φ' ، g' دالتان متصلتان على هذه الفترة ولا تنعدمان معا (ربما تساويان الصفر معا عند أحد طرفي الفترة أو عند الطرفين معا)، مثل هذا المنحني يسمى بالمنحني الأملس. لنفرض أن المنحني C لا يقطع نفسه وهذا يعني أن أية قيمتين مختلفتين للوسيط t بين α, β تحددان نقطتين مختلفتين على المنحني C (ربما تنطبق نقطة البداية للمنحني على نقطة النهاية). نجزئ القوس A_0A_n شكل (١٨, ٦) بالنقاط المتتالية:

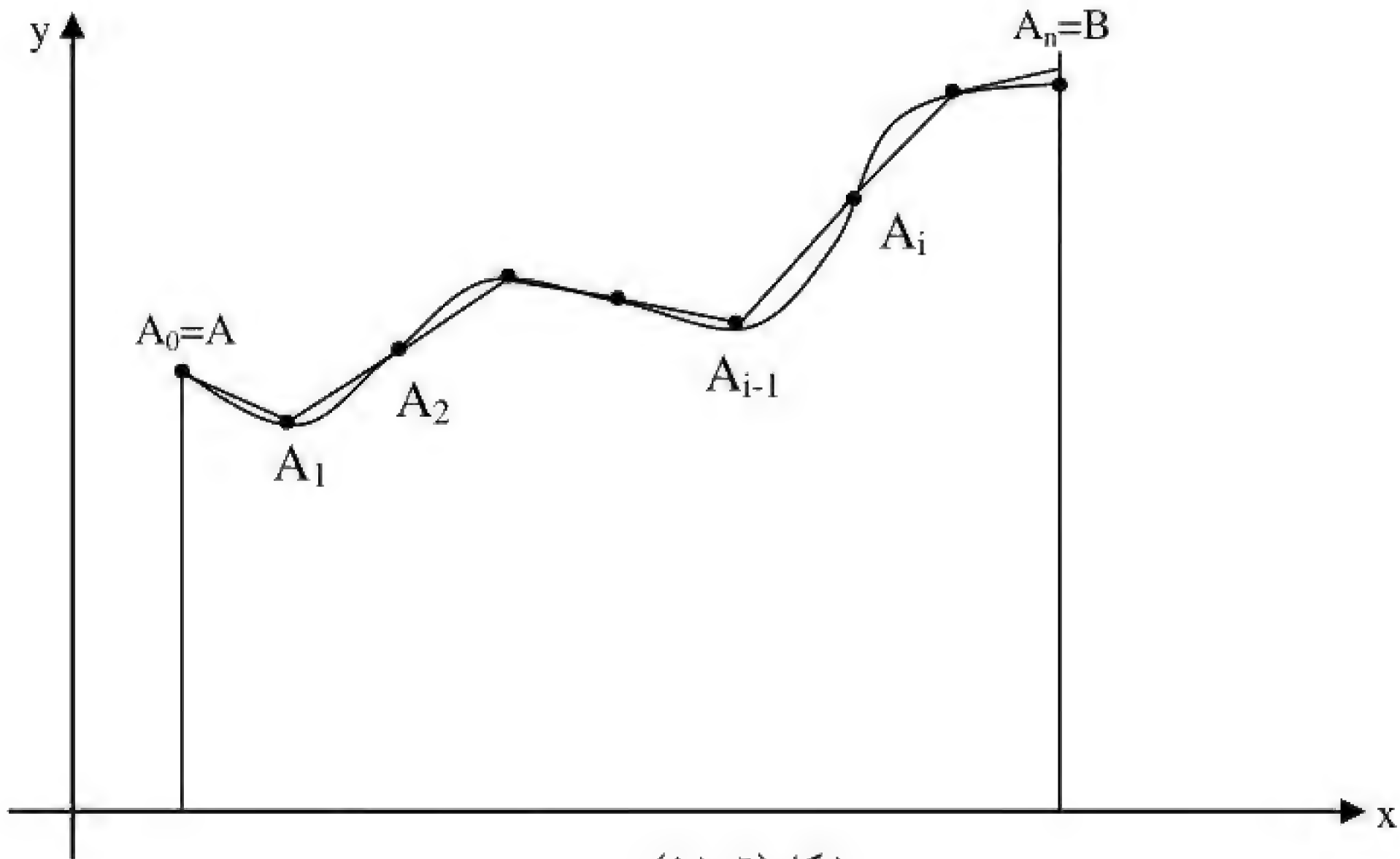
$$A = A_0, A_1, A_2, \dots, A_{i-1}, A_i, \dots, A_n = B$$

الموافقة وعلى الترتيب للقيم المتزايدة:

$$\alpha = t_0, t_1, t_2, \dots, t_{i-1}, t_i, \dots, t_n = \beta$$

إلى n قوس جزئي، حيث $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$.

النقطة: $A_i = (f(t_i), g(t_i))$ على C توافق القيمة t_i للوسيط t .



شكل (١٨, ٦).

من الملاحظ أن طول القطعة $[A_{i-1}, A_i]$ يساوي:

$$(١٨, ٢) \quad |A_{i-1}A_i| = \sqrt{(f(t_i) - f(t_{i-1}))^2 + (g(t_i) - g(t_{i-1}))^2}$$

لكن:

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = (t_i - t_{i-1})f'(\lambda_i), \quad g(t_i) - g(t_{i-1}) = (t_i - t_{i-1})g'(w_i)$$

(حسب نظرية القيمة المتوسطة، حيث λ_i, w_i محصورتان بين t_i, t_{i-1})

$$\text{بالتالي، فإن: } |A_{i-1}A_i| = \sqrt{(f'(\lambda_i))^2 + (g'(w_i))^2} \Delta t_i$$

عندما ينتهي تنظيم التجزئة نحو الصفر $\max \Delta t_i \rightarrow 0$ ، فإن نهاية:

(مجموع أطوال أضلاع المضلع المرسوم على المنحني)، تسمى بالتعريف طول قوس المنحني C الواصل بين النقطتين A, B، ويساوي:

$$(١٨, ٣) \quad L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

(رمزنا لطول القوس بالرمز L)

ملحوظة (١٨, ١)

نعلم أن طول القوس الواصل بين النقطتين

$$A_0(f(t_0), g(t_0)), B(f(t), g(t))$$

حيث t قيمة للوسيط ويوافقها نقطة على المنحني C، يعطى بالصيغة:

$$(١٨, ٤) \quad s = \int_{t_0}^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

بالاستفادة من النظرية الأساسية في التكامل، نجد:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \Rightarrow ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

تصبح الصيغة (١٨, ٣) على الشكل:

$$(١٨, ٥) \quad L = \int_{\alpha}^{\beta} ds = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt$$

إذا لم يكن قوس المنحني أملسا بل اتحادا لعدة أقواس متتابعة كل منها أملس بنفسه. فبالتعريف، طول هذا القوس يساوي مجموع أطوال هذه الأقواس.

مثال (١٨, ٤)

أوجد طول محيط الدائرة:

(١٨, ٥)

$$x^2 + y^2 = a^2$$

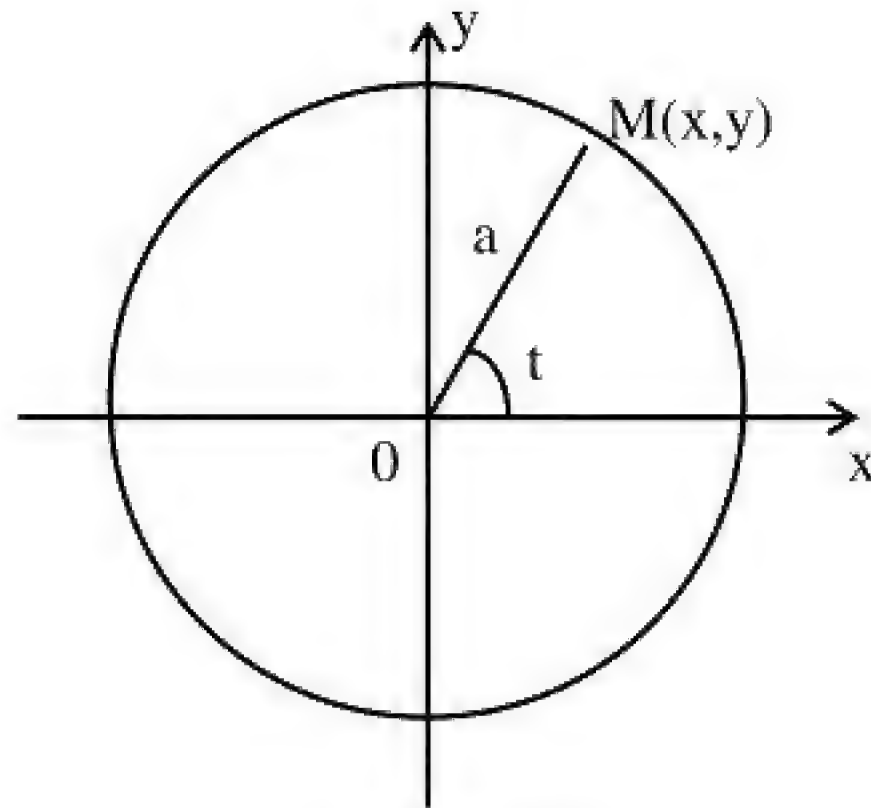
الحل

بفرض أن t هي الزاوية الموجهة التي يصنعها المتجه \vec{OM} مع المحور x ، فإن:

(١٨, ٦)

$$y = a \sin t, \quad x = a \cos t$$

$$t \in [0, 2\pi]$$



شكل (١٨, ٧).

نسمي المعادلتين (١٨, ٦)، بالمعادلتين الوسيطيتين للدائرة .

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t} dt = a \int_0^{2\pi} dt = 2\pi a$$

من الملاحظ ، أن:

مثال (١٨, ٥)

$$x = 2(t - \sin t) \quad , \quad y = 2(1 - \cos t)$$

أوجد طول قوس السيكلويد:

الموضح في الشكل (١٨, ٨).

الحل

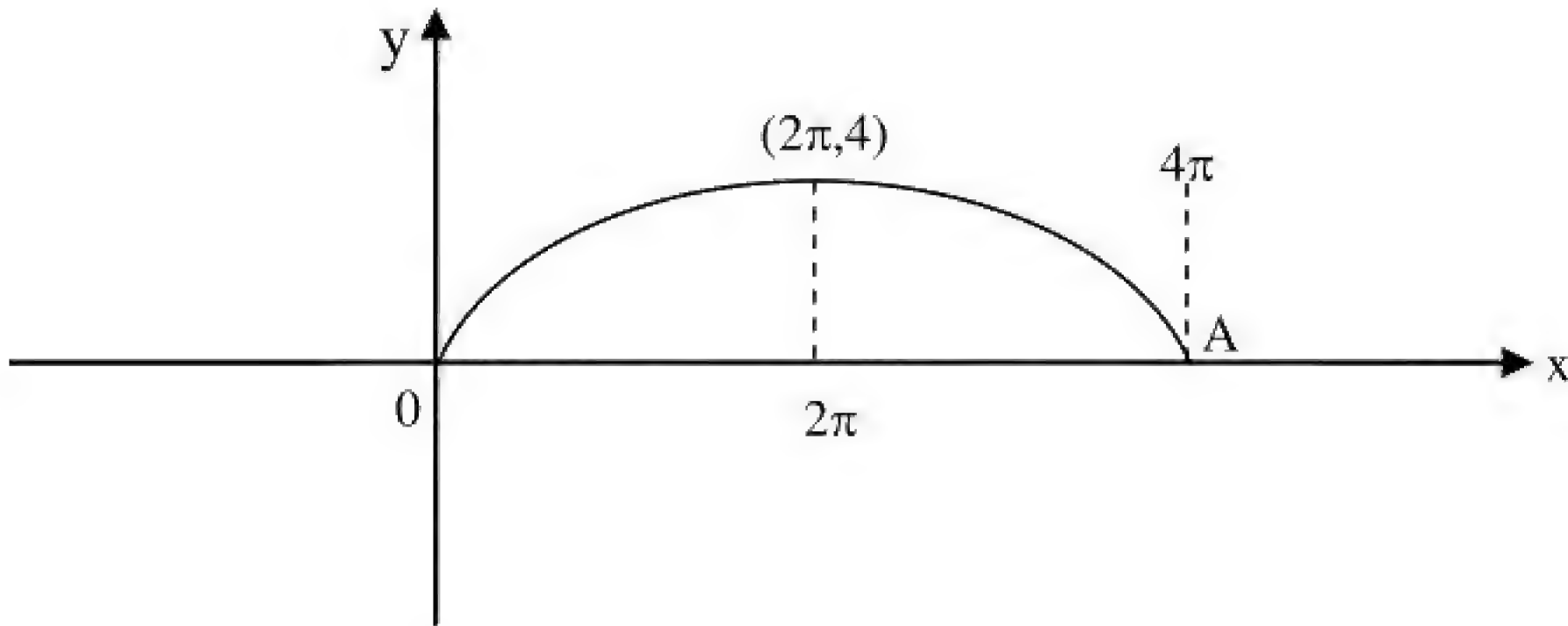
من الواضح أن:

$$\frac{dx}{dt} = 2(1 - \cos t) , \quad \frac{dy}{dt} = 2 \sin t$$

وأن نقطتي تقاطع المنحني مع المحور x يوافقهما $t = 0$, $t = 2\pi$ ، إذن:

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt = 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} dt$$

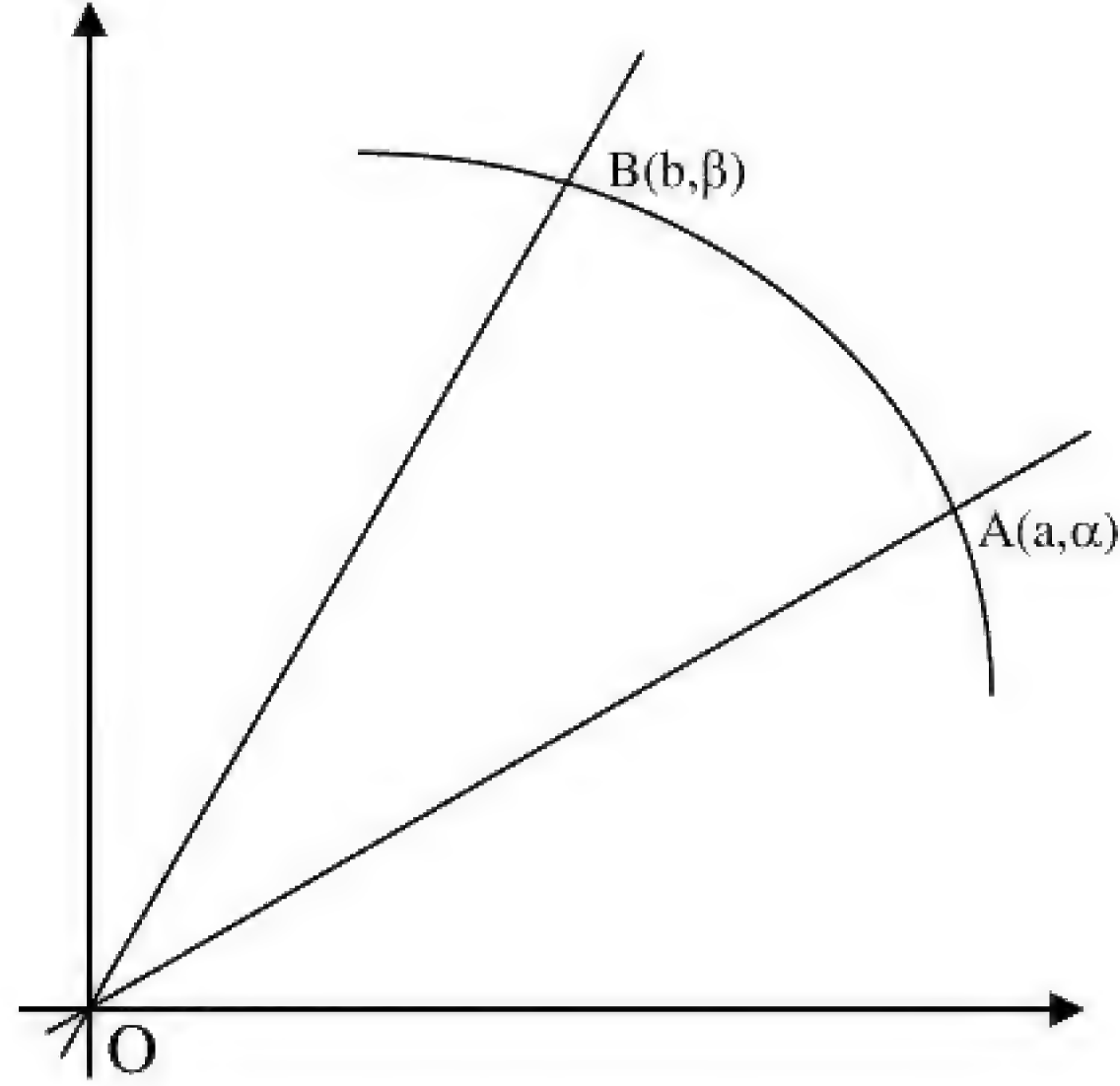
$$= 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t} dt = 4 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -4 \frac{\cos \frac{t}{2}}{\frac{1}{2}} \Big|_0^{2\pi} = -8(-1 - 1) = 16$$

(لاحظ أن: $1 - \cos t = 2 \sin^2 \frac{t}{2}$)

شكل (٨، ١٨).

(ب) طول قوس منحن معرف بمعادلته القطبية

ليكن C منحنيا مستويا (أملسا لا يقطع نفسه) معرفا بمعادلته القطبية: $r = f(\theta)$ ، حيث f دالة متصلة على الفترة $[c, d]$ ومشتقتها متصلة على هذه الفترة.ليكن AB قوسا من هذا المنحني نقطة بدايته A محددة بالزوج المرتب (a, α) ، ونقطة نهايته B محددة بالزوج المرتب (b, β) .نعلم أن C يقبل التمثيل الوسيطي: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$



شكل (٩، ١٨).

ونعلم أن L طول قوس المنحني، يعطى بالصيغة:

$$(١٨, ٧) \quad L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

$$\text{لكن: } \frac{dy}{d\theta} = y' = r' \sin \theta + r \cos \theta, \quad \frac{dx}{d\theta} = x' = r' \cos \theta - r \sin \theta$$

$$\text{إذن: } \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = r^2 + r'^2$$

بالتالي، فإن طول القوس يعطى بالصيغة:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta$$

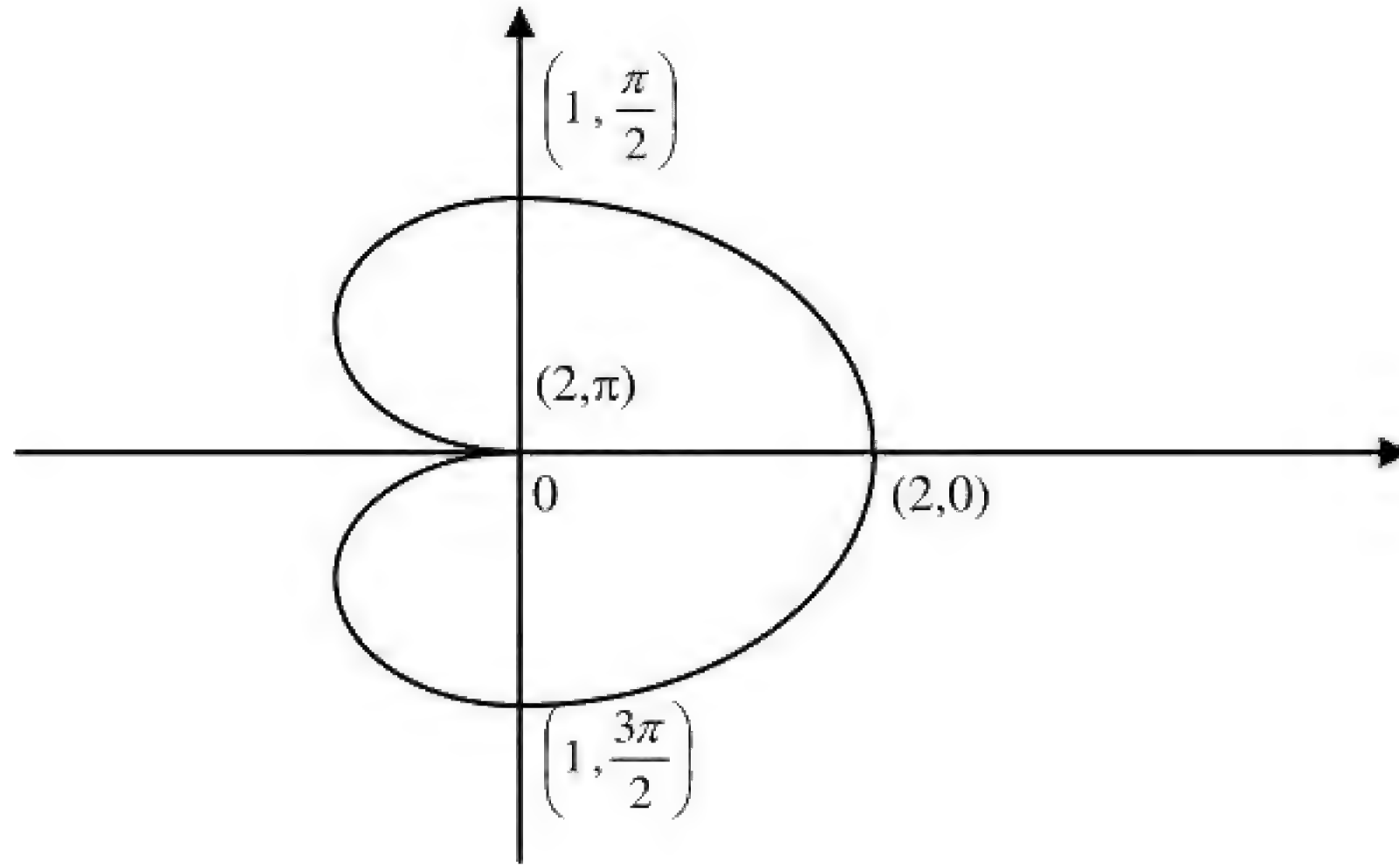
مثال (٦، ١٨)

أوجد طول قوس منحنى القلب (الكاردويد)، المعطى بالمعادلة:

$$r = f(\theta) = a(1 + \cos \theta), \quad a > 0$$

الحل

من الملاحظ أن المنحني متماثل بالنسبة للمحور x، لاحظ أن: $f(-\theta) = f(\theta)$.



شكل (١٨، ١٠).

يكفي أن نحسب نصف طول قوس المنحني على الفترة $[0, \pi]$ ، ثم نضاعف قيمة الناتج. إذن:

$$\begin{aligned}
 L &= 2 \int_0^{\pi} \sqrt{r^2 + r'^2} \, d\theta = 2a \int_0^{\pi} \sqrt{(1 + \cos\theta)^2 + \sin^2 \theta} \, d\theta \\
 &= 2a \int_0^{\pi} \sqrt{1 + 2\cos\theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \, d\theta = 2a \int_0^{\pi} \sqrt{2(1 + \cos\theta)} \, d\theta \\
 &\quad \left(\text{لاحظ أن: } 1 + \cos\theta = 2\cos^2 \frac{\theta}{2} \Leftarrow 1 + \cos 2\theta = 2\cos^2 \theta \right) \\
 &= 2a \int_0^{\pi} \sqrt{4\cos^2 \frac{\theta}{2}} \, d\theta = 4a \int_0^{\pi} \cos \frac{\theta}{2} \, d\theta = 4a \left. \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\frac{1}{2}} \right|_0^{\pi} = 8a
 \end{aligned}$$

تمارين (٢, ١٨)

أوجد طول قوس كل من المنحنيات المعرفة فيما يلي، والمحصور بين النقطتين الموافقتين للقيمتين المرفقتين:

$$(1) \quad r = \sin^3 \frac{\theta}{3} \quad (\theta = 3\pi, \theta = 0)$$

$$(2) \quad x = 2\cos t - \cos 2t \quad y = 2\sin t - \sin 2t \quad (t = 2\pi, t = 0)$$

$$(3) \quad r = \frac{1}{\theta} \quad (\theta = \frac{1}{2}, \theta = 2)$$

$$(4) \quad \theta = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \quad (r = 3, r = 1)$$

أوجد أطوال أقواس كل من المنحنيات التالية ضمن الشروط المرافقة:

(٥) قوس القطع المكافئ: $r = \sec^2 \frac{\theta}{2}$ المحدود بالمستقيم العمودي على المحور القطبي والمار بالقطب.

(٦) قوس الحلزون اللوغاريتمي: $r = e^{2\theta}$ والواقع داخل الدائرة $r = 1$.

الإجابات

$$(1) \quad \frac{3\pi}{2}$$

$$(2) \quad 16$$

$$(3) \quad \frac{\sqrt{5}}{2} + \ln \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

$$(4) \quad \frac{1}{2}(4 + \ln 3)$$

$$(5) \quad 2[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)]$$

$$(6) \quad \frac{\sqrt{5}}{2}$$

(١٨, ٣) الحجم الدورانية
The Volumes of Revolution

أ) الحجم باستخدام الإحداثيات الوسيطة

مثال (١٨, ٧)

أوجد الحجم المتولد من دوران الدائرة: $x^2 + y^2 = a^2$ عند دوارنها حول المحور y .

الحل

تقبل الدائرة التمثيل الوسيطي: $x = a \cos t, y = a \sin t$
(راجع المثالين: (١٨, ١) و (١٨, ٤))

من دوران ربع القرص الدائري الواقع في الربع الأول من المستوي حول المحور y نحصل على نصف حجم الكرة. بالتالي، فإن حجم الكرة يساوي:

$$V = 2\pi \int_0^a x^2 dy = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 t \cdot a \cos t dt$$

بإجراء التغير: $\sin t = u$ ، نجد: $du = \cos t dt, \cos^2 t = 1 - \sin^2 t = 1 - u^2$

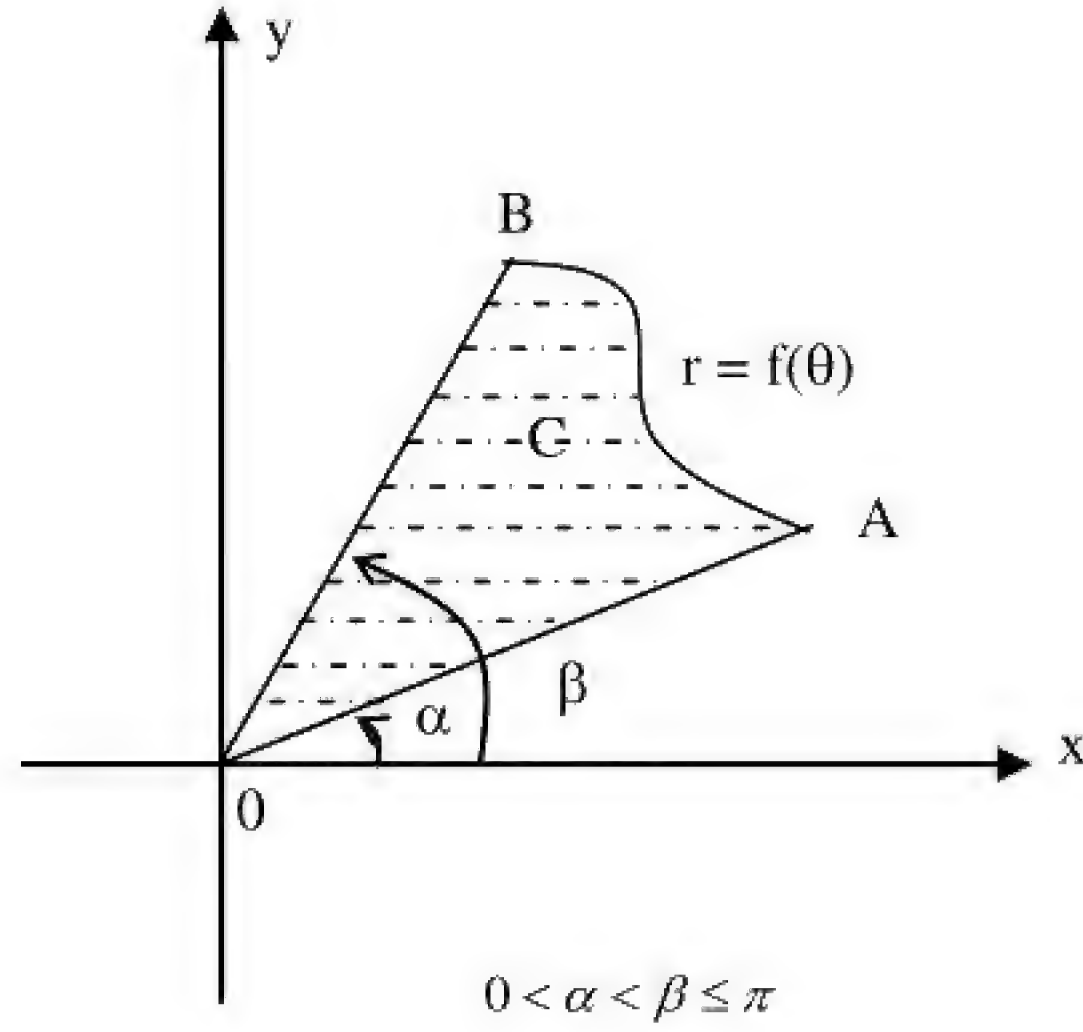
$$V = 2\pi a^3 \int_0^1 (1 - u^2) du = 2\pi a^3 \left(u - \frac{u^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{4}{3} \pi a^3$$

إذن:

ب) الحجم المتولد من دوران قطاع منحنى محدود بمنحنى قطبي
ليكن Q قطاعاً منحنياً محدوداً بالمنحنى $C: r = f(\theta)$ والمستقيمين: $\theta = \alpha$ و $\theta = \beta$ ، شكل (١٨, ١١). حيث:

$0 < \alpha < \beta \leq \pi$ ، f دالة متصلة على الفترة $[\alpha, \beta]$ وغير سالبة والمنحنى C لا يقطع نفسه (ربما تنطبق نقطة بدايته على نهايته).

الحجم الناتج من دوران Q حول المحور القطبي، يعطى بالصيغة:



شكل (١١, ١٨).

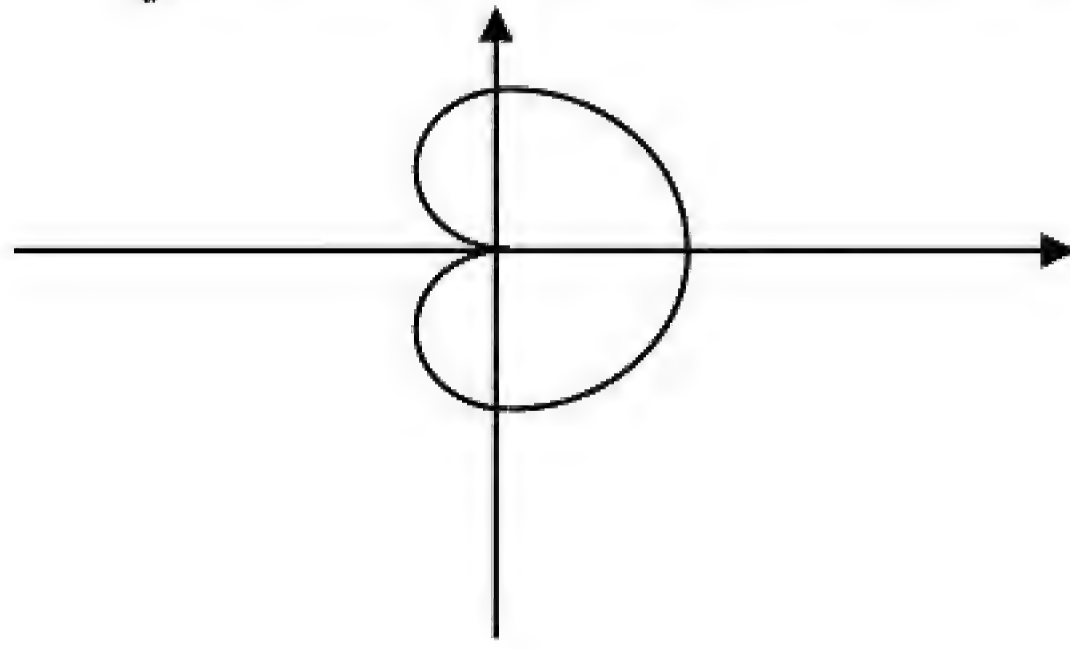
$$V = \frac{2}{3} \pi \int_{\alpha}^{\beta} r^3 \sin \theta d\theta$$

مثال (٨, ١٨)

أوجد الحجم الناتج من دوران المنحني $r = a(1 + \cos \theta)$ ، عند دورانه حول المحور القطبي.

الحل

نحصل على الحجم المطلوب من دوران نصف الكاردويد العلوي حول المحور القطبي. بالتالي، فإن الحجم يساوي:



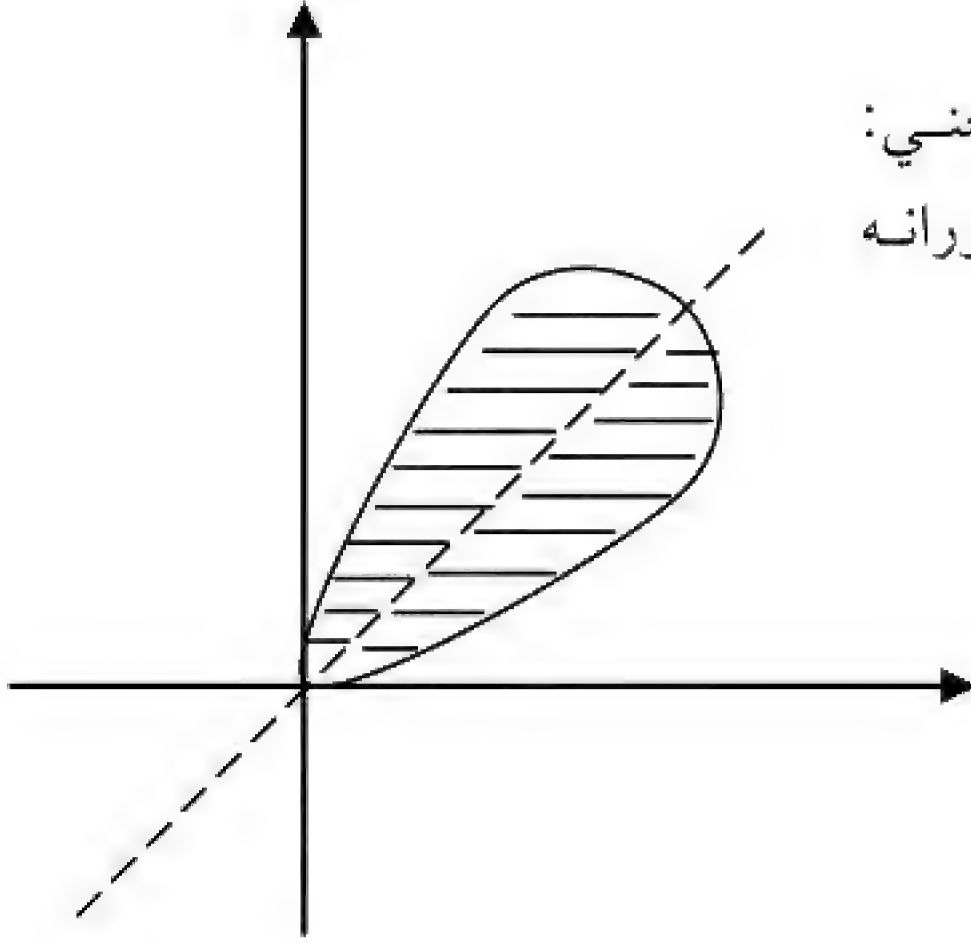
شكل (١٢, ١٨).

$$\begin{aligned} V &= \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi} a^3 (1 + \cos \theta)^3 \sin \theta d\theta = \frac{-2\pi a^3}{3} \int_0^{\pi} (1 + \cos \theta)^3 (-\sin \theta d\theta) \\ &= \frac{-2\pi a^3}{3} \frac{(1 + \cos \theta)^4}{4} \Big|_0^{\pi} = \frac{8\pi a^3}{3} \end{aligned}$$

مثال (٩، ١٨)

أوجد الحجم الناتج من دوران جزء المنحني:
 $r = \sin 2\theta$ والواقع في الربع الأول عند دورانه
 حول المحور القطبي.

الحل



شكل (١٣، ١٨).

$$V = \frac{2}{3} \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \sin \theta d\theta = \frac{2}{3} \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin \theta \cos \theta)^3 \sin \theta d\theta$$

(لاحظ أن: $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$)

$$V = \frac{16\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta \cos^2 \theta (\cos \theta d\theta) \quad \text{إذن:}$$

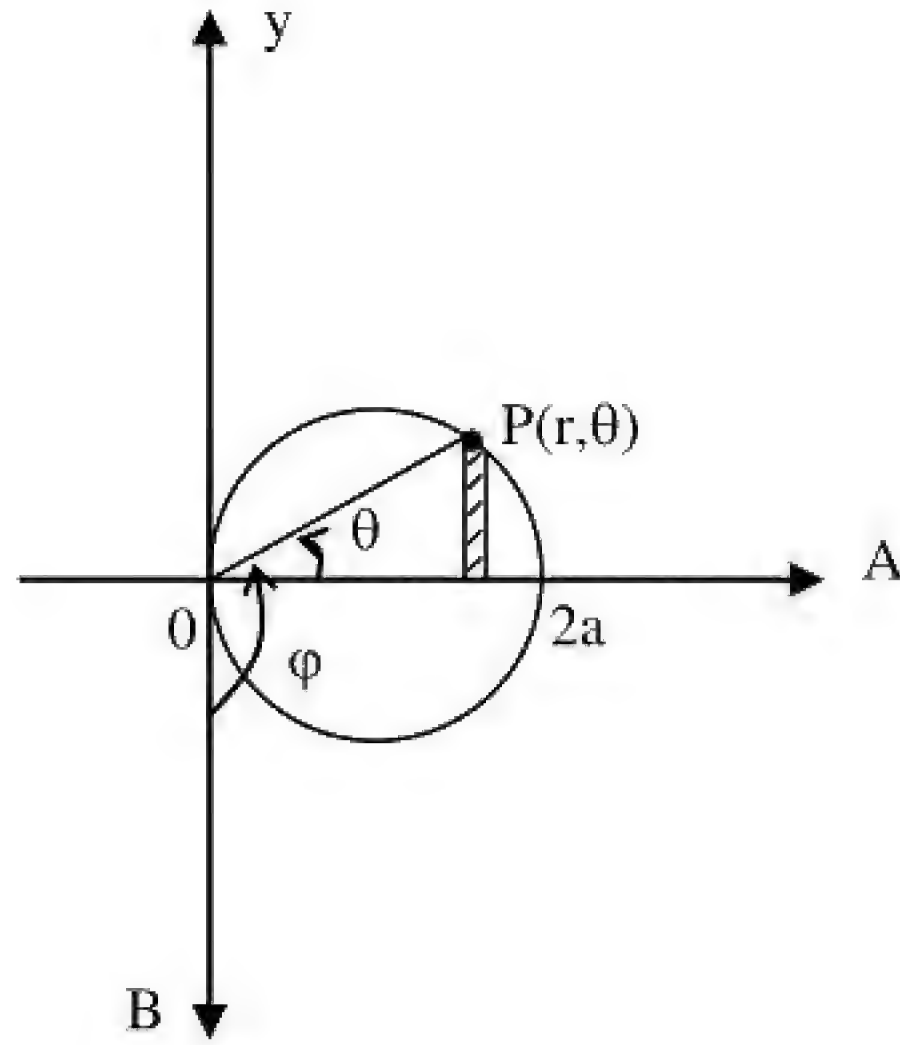
$$= \frac{16\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta (1 - \sin^2 \theta) (\cos \theta d\theta)$$

$$= \frac{16\pi}{3} \left(\frac{\sin^5 \theta}{5} - \frac{\sin^7 \theta}{7} \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16\pi}{3} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) = \frac{32\pi}{105}$$

(وضعنا: $du = \cos \theta d\theta \Leftarrow \sin \theta = u$)(لاحظ أن نقطة بداية القوس يوافقها: $\theta = 0$ ونقطة النهاية يوافقها $\theta = \frac{\pi}{2}$)

مثال (١٠، ١٨)

أوجد الحجم الناتج عن دوران المنحني: $r = 2a \cos \theta$ ، عند دورانه حول المحور y.



شكل (١٤, ١٨).

الحل

النقطة $P(r, \theta)$ المنسوبة إلى المحور القطبي OA، تصبح إذا نسبت إلى المحور القطبي OB العمودي على OA، بالصورة: $P(r, \varphi)$ حيث: $\varphi = \frac{\pi}{2} + \theta$ ، شكل (١٠, ٦٩). بالتالي فإن المعادلة القطبية للمنحني تتحول إلى الشكل:

$$r = 2a \cos(\varphi - \frac{\pi}{2}) = 2a \sin \varphi \text{ وهي تمثل دائرة.}$$

$$(\text{لاحظ أن: } \cos(\varphi - \frac{\pi}{2}) = \cos \varphi \cos \frac{\pi}{2} + \sin \varphi \sin \frac{\pi}{2})$$

إذن: الحجم الناتج من دوران الدائرة حول OB، يساوي:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \pi \int_0^{\pi} r^3 \sin \varphi d\varphi &= \frac{2\pi}{3} \cdot 8a^3 \int_0^{\pi} \sin^4 \varphi d\varphi = \frac{16}{3} \pi a^3 \int_0^{\pi} \left(\frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \right)^2 d\varphi \\ &= \frac{4\pi}{3} a^3 \int_0^{\pi} \left(1 - 2\cos \varphi + \frac{1 + \cos 4\varphi}{2} \right) d\varphi = \frac{4\pi a^3}{3} \left(\frac{3}{2} \varphi - 2\sin \varphi + \frac{\sin 4\varphi}{8} \right) \Big|_0^{\pi} = 2\pi^2 a^3 \end{aligned}$$

تمارين (٣, ١٨)

(١) أوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالسكلويد: $x = a(t - \sin t)$ ، والمحور x ،
 $y = a(1 - \cos t)$ عند دورانها حول:

(أ) المحور x (ب) المحور y (ج) محور التماثل لهذا المنحني

(٢) أوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالمنحني:

$$x = a \cos^3 t , y = b \sin^3 t \text{ عند دورانها حول المحور } y.$$

(٣) أوجد الحجم الناتج من دوران منحنى القلب: $r = a(1 + \cos \theta)$ ، عند دورانه حول المحور القطبي.

(٤) أوجد الحجم الناتج من دوران المنحني: $r = a \cos^2 \theta$ ، عند دورانه حول المحور القطبي.

الإجابات

$$(١) \text{ حول } x : 5\pi^2 a^3 , \text{ حول } y : 6\pi^3 a^3 , \text{ حول محور التماثل : } \frac{\pi a^3}{6} (9\pi^2 - 16)$$

$$(٢) \frac{32\pi}{105} \pi a^3$$

$$(٣) \frac{8}{3} \pi a^3$$

$$(٤) \frac{4}{21} \pi a^3$$

(٤, ١٨) السطوح الدورانية

The Surfaces of Revolution

(أ) مساحة السطح الدوراني باستخدام الإحداثيات الوسيطة

لو أعطي المنحني C في هذه الحالة، بمعادلتيه الوسيطيتين وبنفس الشروط التي ذكرناها على المنحني في البند (٢, ١٨) (المنحني أملس ولا يقطع نفسه) وفضلاً على ذلك، إذا كان $y = g(t) \geq 0$ ، فإن مساحة السطح الدوراني الناتج عن دوران القوس \overbrace{AB} حول المحور x تعطى بالصيغة:

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

بملاحظة أن السطح يتولد من دوران القوس \widehat{OA} حول محور تماثله، فإن:

$$S = 2\pi \int_0^\pi (\pi - x) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = 2\pi \int_0^\pi (\pi - t + \sin t) 2 \sin \frac{t}{2} dt$$

(النقطة 0 يوافقها $t=0$ والنقطة A يوافقها $t = \pi$)

لاحظ أن: $ds = \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt = \sqrt{2(1 - \cos t)} dt = \sqrt{2 \left(2 \sin^2 \frac{t}{2}\right)} dt = 2 \sin \frac{t}{2} dt$ إذن:

$$S = 2\pi \left[2\pi \int_0^\pi \sin \frac{t}{2} dt - 2 \int_0^\pi t \sin \frac{t}{2} dt + 2 \int_0^\pi \sin t \sin \frac{t}{2} dt \right]$$

$$\int_0^\pi t \sin \frac{t}{2} dt \quad (\text{ب}) \quad \int_0^\pi \sin \frac{t}{2} dt = -2 \cos \frac{t}{2} \Big|_0^\pi = 2 \quad (\text{أ})$$

نضع: $dv = dt \Leftrightarrow t = v$ ، $u = -2 \cos \frac{t}{2} \Leftrightarrow du = \sin \frac{t}{2} dt$ إذن:

$$\int t \sin \frac{t}{2} dt = uv - \int u dv = -2t \cos \frac{t}{2} + 2 \int \cos \frac{t}{2} dt$$

$$= -2t \cos \frac{t}{2} + 4 \sin \frac{t}{2} + c$$

ومنه:

$$\int_0^\pi t \sin \frac{t}{2} dt = -2 \cos \frac{t}{2} \Big|_0^\pi + 4 \sin \frac{t}{2} \Big|_0^\pi = 4$$

$$\int_0^\pi \sin t \sin \frac{t}{2} dt = \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(\cos \frac{t}{2} - \cos \frac{3t}{2} \right) dt = \left(\sin \frac{t}{2} - \frac{1}{3} \sin \frac{3t}{2} \right) \Big|_0^\pi \quad (\text{ج})$$

$$= \frac{4}{2}$$

(لاحظ أن: $\sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x - y) - \cos(x + y))$)

إذن:

$$S = 2\pi \left(4\pi - 8 + \frac{8}{3} \right) = 8\pi^2 - \frac{32}{3}\pi$$

(ب) مساحة سطح دوراني باستخدام الإحداثيات القطبية

مثال (١٣، ١٨)

أوجد مساحة السطح الناتج من دوران نصف الدائرة الموضحة في الشكل

(١٦، ١٨)، عند دورانها حول المحور x.

الحل

من الواضح أن المعادلة القطبية لنصف الدائرة في الشكل (١٨، ١٦)، هي:

$$r = 2d \cos \theta \quad \left(\frac{\pi}{2} \geq \theta \geq 0 \right)$$

نعلم أن مساحة السطح

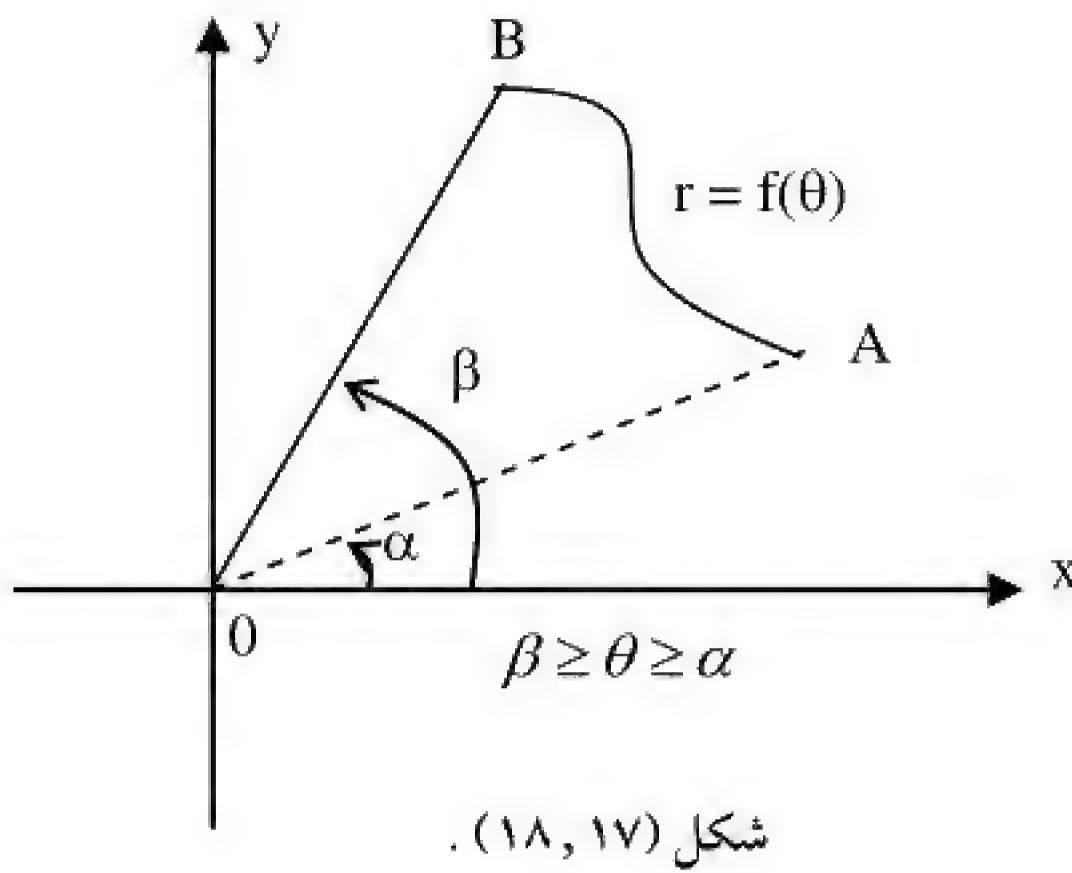
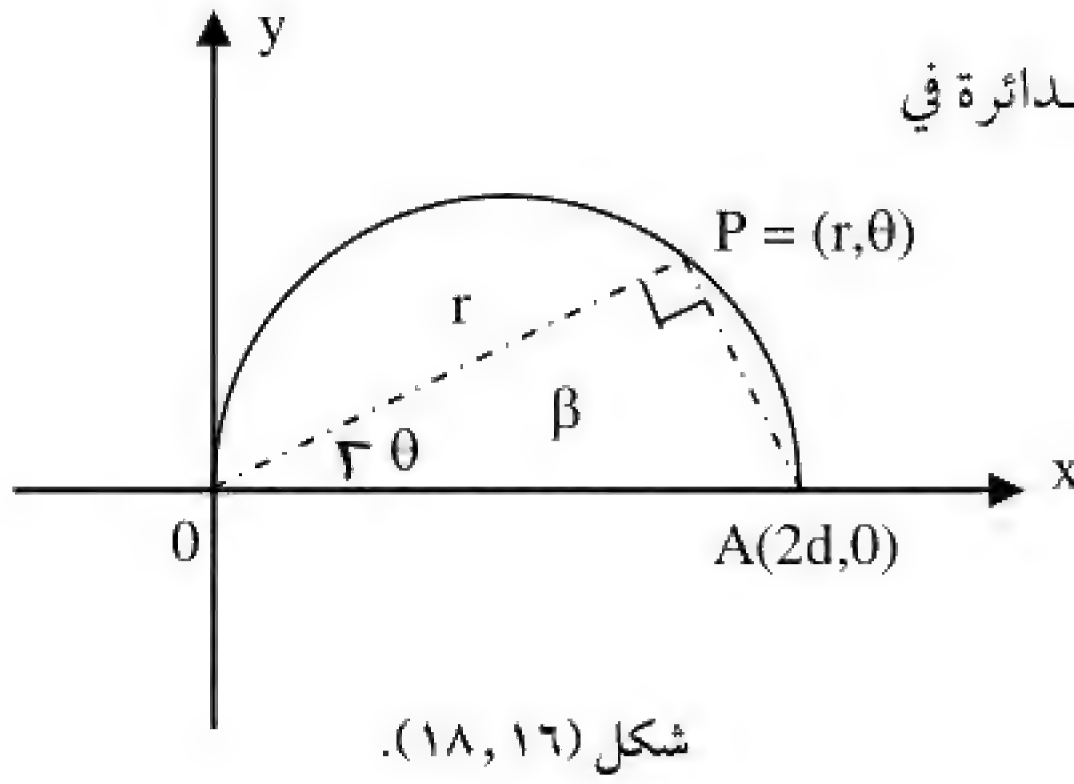
الدوراني تعطى بالصيغة:

$$S = 2\pi \int_a^b y ds \quad (\text{دوران حول المحور } x)$$

بالتعويض عن y بقيمتها بدلالة

(r, θ) وكذلك عن ds ، نجد:

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r(\theta) \sin \theta \sqrt{r^2 + (r')^2} d\theta$$



حيث α قيمة θ الموافقة للنقطة A (نقطة البداية للقوس)، β قيمة θ الموافقة للنقطة B (نقطة النهاية للقوس) شكل (١٨، ١٧). بالتالي، فإن S في مثالنا تعطى بالصيغة:

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2d \cos \theta \sin \theta \sqrt{4d^2 \cos^2 \theta + 4d^2 \sin^2 \theta} d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4d^2 \sin \theta (\cos \theta d\theta) = 8\pi d^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta (\cos \theta d\theta) \\ &= 8\pi d^2 \cdot \frac{1}{2} \sin^2 \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi d^2 \end{aligned}$$

(وضعنا: $du = \cos \theta d\theta \Leftarrow u = \sin \theta$)

لاحظ أن $4\pi d^2$ تمثل مساحة الكرة الناتجة من دوران نصف الدائرة حول المحور x .

تمارين (٤, ١٨)

(١) أوجد مساحة السطح الدوراني الناتج من دوران قوس السيكلويد:

$$x = a(t - \sin t) \quad , \quad y = a(1 - \cos t)$$

عند دورانه حول:

(أ) المحور x (ب) المحور y (ج) المماس للمنحني الموازي للمحور x .

(٢) أوجد مساحة السطح الناتج من دوران المنحني:

$$x = a(2\cos t - \cos 2t)$$

$$y = a(2\sin t - \sin 2t)$$

عند دورانه حول المحور x .

(٣) أوجد مساحة السطح الناتج عن دوران المنحني: $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ عند دورانه حول المحور القطبي.

(٤) أوجد مساحة السطح الناتج من دوران المنحني: $r = 2a(1 + \cos \theta)$ عند دورانه حول المحور القطبي.

الإجابات

$$(١) \text{ حول } x : \frac{64\pi a^2}{3}$$

$$\text{حول } y : 16\pi^2 a^2$$

$$\text{حول المماس} : \frac{32}{3} \pi a^2$$

$$(٢) \frac{128}{5} \pi a^2$$

$$(٣) 2\pi a^2 (2 - \sqrt{2})$$

$$(٤) \frac{128}{5} \pi a^2$$

نماذج اختبارات

النموذج الأول اختبار نهائي

الجزء الأول: ضع رمز الإجابة الصحيحة في المربع المقابل للسؤال

(١) مجموعة حل المتباينة $|2-x| \geq 10$ هي:

☐

(أ) $(12, 8)$ (ب) \mathbb{R} (ج) $(-\infty, -8] \cup [12, \infty)$ (د) $[-\infty, -8]$

(٢) النهاية $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 7x - 16}{(x^2 + 1)^2}$ تساوي:

☐

(أ) 1 (ب) $1/3$ (ج) صفر (د) $1/2$

(٣) النهاية $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$ تساوي:

☐

(أ) غير موجودة (ب) 2 (ج) 4 (د) صفر

(٤) النهاية $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x - 2}{|1-x|}$ تساوي:

☐

(أ) 3 (ب) غير موجودة (ج) صفر (د) -3

(٥) إذا كانت $f(x) = 2x$ و $(f \circ g)(x) = x^2$ فإن $g(4)$ هي:

☐

(أ) 4 (ب) 2 (ج) 6 (د) 8

(٦) الدالة $f(x) = \frac{1}{x^3 + 1}$ غير متصلة عند x تساوي:

☐

(أ) 1 (ب) -1 (ج) $\{-1, 1\}$ (د) 0

(٧) قيم a التي تجعل الدالة $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq a \\ x^2, & x > a \end{cases}$ متصلة على \mathbb{R} هي:

- (أ) $\{0,1\}$ (ب) $\{-1,0\}$ (ج) $\{-2,2\}$ (د) $\{1,2\}$

☐

(٨) عند $x = 0$ تكون الدالة $f(x) = x|x|$

(أ) متصلة وقابلة للاشتقاق (ب) قابلة للاشتقاق ومتصلة

(ج) متصلة وغير قابلة للاشتقاق (د) قابلة للاشتقاق وغير متصلة

☐

(٩) $f'(-1)$ للدالة $f(x) = \frac{x}{(x+2)^2}$ هي:

- (أ) 10 (ب) 15 (ج) 3 (د) 20

☐

(١٠) معادلة المماس للمنحنى: $y = \frac{1-x}{1+x}$ عند النقطة $(-2, -3)$ هي:

(أ) $y + 2x + 7 = 0$ (ب) $y - 2x + 7 = 0$

☐

(ج) $x - 3y - 7 = 0$ (د) $2y + x + 7 = 0$

(١١) النهاية $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\tan^2 \pi x}$ تساوي:

- (أ) ∞ (ب) π^2 (ج) 1 (د) $\frac{1}{\pi^2}$

☐

(١٢) إذا كانت $f(x) = \sqrt{\sin x + x^3 + 1}$ فإن $f'(0)$ هي:

- (أ) $\frac{1}{2}$ (ب) 3 (ج) 2 (د) 0

☐

(١٣) إذا كانت $h(x) = f(g(x))$ و $g(3) = 6$ و $g'(3) = 4$ و $f'(3) = 2$

و $f'(6) = 7$ فإن $h'(3)$ هي:

- (أ) 8 (ب) 16 (ج) 28 (د) 24

☐

(١٤) إذا كانت $x \cos y + y \cos x = \pi/2$ فإن $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة $(0, \frac{\pi}{2})$

هي: (أ) $\frac{\pi}{2}$ (ب) صفر (ج) $-\frac{\pi}{2}$ (د) 1

☐

(١٥) $f''(x)$ للدالة $f(x) = \sec 2x$ هي:

(أ) $4 \sec 2x (2 \tan^2 2x + 1)$ (ب) $2 \sec 2x (\tan^2 2x + 1)$

☐

(ج) $\sec^2 2x (2 \tan^2 2x - 1)$ (د) $\tan^2 2x + 1$

(١٦) القيمة الصغرى المطلقة للدالة $f(x) = 4x^3 - 15x^2 + 12x + 7$

على الفترة $[0,3]$ هي:

- (أ) -4 (ب) 0 (ج) -3 (د) 3

☐

(١٧) الخطوط التقاربية الرأسية للدالة $f(x) = \frac{3x^2}{x^2 - x}$ هي:

(أ) $x = 1$ (ب) $x = 0$ (ج) $x = 0$ (د) $x = -1$

(١٨) عند $x = \frac{\pi}{12}$ يكون للدالة $f(x) = x + \cos 2x$ قيمة:

(أ) صغرى محلية (ب) عظمى محلية
(ج) صغرى مطلقة (د) عظمى مطلقة

(١٩) الدالة $f(x) = \tan^{-1} x$:

(أ) تزايدية على $[0, \infty)$ وتناقصية على $(0, \infty)$ (ب) تناقصية على $[-1, \infty)$
(ج) تزايدية على \mathbb{R} (د) تناقصية على \mathbb{R}

(٢٠) مركز القطع المخروطي $4x^2 - y^2 + 2y = 5$ هو:

(أ) $(1, 1)$ (ب) $(4, 1)$ (ج) $(-1, 2)$ (د) $(0, 1)$

الجزء الثاني: أجب عن الأسئلة الآتية:

(١) إذا كانت $f(x) = x^4 - 8x^2$ أوجد:

(أ) النقاط الحرجة (ب) فترات التزايد وفترات التناقص
(ج) نقاط الانقلاب (د) فترات التفرع إلى الأعلى والتفرع إلى الأسفل ثم ارسم المنحنى.

(٢) حل المتباينة $\left| \frac{x}{2+x} \right| < 1$

(٣) يتمدد متوازي مستطيلات معدني بالحرارة، فإذا كانت قاعدته مربعة الشكل ويزيد طول

ضلعها بمعدل 0.1 سم/ث، ويزيد ارتفاعه بمعدل 0.15 سم/ث، فأوجد معدل تغير حجمه

في اللحظة التي يكون فيها طول ضلع قاعدته مساويا 12 سم وارتفاعه مساويا 25 سم.

(٤) أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما $(2, 1)$ و $(2, -3)$ وطول محوره الأكبر 6.

النموذج الثاني

اختبار نهائي

الجزء الأول: اختر الإجابة الصحيحة للأسئلة من ١ إلى ١٣ وضع الرمز الموافق في الجدول التالي:

١٣	١٢	١١	١٠	٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١	
													الرمز

السؤال ١: مجموعة حل المتباينة $\frac{x^2 - 3x + 2}{x} \leq 0$ هي:

(أ) $(0,1] \cup [2,\infty)$ (ب) $(-\infty,0) \cup (1,2]$

(ج) $(-\infty,0) \cup [1,2]$ (د) $(-\infty,0) \cup [2,\infty)$

السؤال ٢: مجموعة حل المتباينة $|x-1| \geq x$ هي:

(أ) $(0,1] \cup [2,\infty)$ (ب) $(-1, \frac{1}{2}]$

(ج) $[-1, 1]$ (د) لا شيء مما ذكر

السؤال ٣: مجال (نطاق) الدالة $f(x) = 1 - x + \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

(أ) $(-\infty, 1)$ (ب) Φ

(ج) $(1, \infty)$ (د) $\{1\}$

السؤال ٤: إذا كان A هو مجال (نطاق) الدالة f وكانت g دالة معرفة كما يلي: $f(x) \cdot g(x) = f(x)$ ، فإذا

رمزنا لمجال (نطاق) g بالحرف B فإن:

(أ) $B = A$ (ب) $B \neq A$

(ج) $B \subsetneq A$ (د) $B = A \times A$

السؤال ٥: كي نثبت أن $\lim_{x \rightarrow 1} (3x+1) = 4$ عن طريق التعريف (باستخدام ε و δ) فإنه لكل

$\varepsilon > 0$ نأخذ ε بحيث يكون:

(أ) $0 < \delta < 1$ (ب) $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$

(ج) $d = \min\{1, 2\varepsilon\}$ (د) $\delta = 3\varepsilon$

السؤال ٦: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\tan 3x}$ ، هي:

- (أ) 1 (ب) $\frac{3}{2}$ (ج) $\frac{2}{3}$ (د) غير معرفة

السؤال ٧: $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x})$ هي:

- (أ) $\sqrt{2}$ (ب) صفر (ج) $\infty - \infty$ (د) ∞

السؤال ٨: مجموعة حل المتباينة $0 < |x-7| \leq 4$ ، هي:

- (أ) $(-3, 11)$ (ب) $[-3, 11]$ (ج) $[3, 11]$ (د) لا شيء مما ذكر

السؤال ٩: من المعلومات الآتية:

x	f(x)	g(x)
0	2	3
1	6	0
2	4	1
3	8	7

فإن $g(f(0))$ هي:

- (أ) 3 (ب) 7 (ج) 8 (د) 1

السؤال ١٠: إذا كانت الدالة g معطاة بالصيغة: $g(x) = \begin{cases} 2x, & x < 3 \\ 6, & x \geq 3 \end{cases}$ فإن مدى g هو:

- (أ) \mathbb{R} (ب) $(-\infty, 6]$ (ج) $(-\infty, 6)$ (د) $(-\infty, -6] \cup \{6\}$

السؤال ١١: إذا كانت $f(x) = \begin{cases} K - x, & x < 16 \\ \sqrt{x}, & x \geq 16 \end{cases}$ ، فإن قيمة K التي تجعل $\lim_{x \rightarrow 16} f(x)$ موجودة هي:

- (أ) 4 (ب) -4 (ج) 16 (د) 20

السؤال ١٢: إذا كانت $f(x) = -3 + x$ وكانت $g(x) = 7 + x$ فإن منحنى الدالة g يمكن الحصول عليه

بإزاحة منحنى الدالة f

(أ) عشر وحدات إلى اليمين (ب) ثلاث وحدات إلى أعلى وست وحدات إلى اليسار

(ج) عشر وحدات إلى أسفل (د) عشر وحدات إلى أعلى

السؤال ١٣: إذا كانت $f(x) = 2x + 1$ فإن:

(أ) النقطة التي فيها $x = 7, y = 3$ موجودة في بيان (رسم) الدالة العكسية

(ب) النقطة التي فيها $x = 3, y = 7$ موجودة في بيان الدالة العكسية

(ج) الدالة العكسية غير معرفة

(د) الدالة العكسية: $f^{-1}(x) = \frac{1}{2x+1}$

الجزء الثاني: أجب عن السؤالين الآتيين في الفراغات المعطاة

السؤال ١٤ : برهن أن $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$

السؤال ١٥ : أثبت أن: $f(x) = x^3 - 5$ أحادية (متباينة) وأوجد الدالة العكسية.

النموذج الثالث

اختبار نهائي

اختر الإجابة الصحيحة للأسئلة من ١ إلى ١٥ وضع الرمز الموافق في الجدول التالي:

رقم السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
رمز الإجابة								

رقم السؤال	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤	١٥
رمز الإجابة							

(١) نقاط الانقلاب للدالة $f(x) = x^4 - 2x^3$ هي:

- (أ) $(0,0), (1,-1)$ (ب) $(0,1)$ (ج) $(1,1)$ (د) $(0,0), (-1,1)$

(٢) الدالة $f: f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2$ متزايدة على:

- (أ) $[-2,0] \cup [1,\infty)$ (ب) $[0,1]$ (ج) $(-\infty, -2]$ (د) \mathbb{R}

(٣) ميل المماس للمنحنى: $\sin(xy) + y = \tan x - 1$ عند النقطة $(0, -1)$ هو:

- (أ) π (ب) 2 (ج) -1 (د) 1

(٤) المستقيمت المقاربة للمنحنى: $y = \tan^{-1} x$ هي

- (أ) $x = -\frac{\pi}{2}, y = \frac{\pi}{2}$ (ب) $x = \frac{\pi}{2}, y = \frac{\pi}{2}$
(ج) $x = \pm \frac{\pi}{2}$ (د) $y = \pm \frac{\pi}{2}$

(٥) إذا كانت $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 1 \\ (k^2 + 1)x - k & x < 1 \end{cases}$ ، فإن f متصلة وغير قابلة للاشتقاق عند $x = 1$ عندما:

- (أ) $k=0, k=1$ (ب) $k=0$ (ج) $k=1$ (د) لا شيء مما ذكر

(٦) النقاط الحرجة للدالة f ، حيث: $f(x) = x(x+4)^{\frac{1}{3}}$ ، هي:

- (٧) للدالة f ، حيث: $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$ قيمة صغرى محلية عندما:
- (أ) $x=1$ (ب) $x=0$ (ج) 0 (د) $-3, -4$
- (٨) إذا كانت $f(x) = \frac{8}{x}$ فإن المشتقة الخامسة (2) $f^{(5)}$ تساوي:
- (أ) 8 (ب) -15 (ج) 0 (د) 2
- (٩) المقدار $\sin^{-1}(\sin \frac{2\pi}{3})$ يساوي:
- (أ) $\pi/3$ (ب) $2\pi/3$ (ج) 0 (د) لا شيء مما ذكر
- (١٠) إذا كانت $f(x) = \begin{cases} \frac{\tan 2x}{3x}, & x \neq 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$ ، فإن قيمة k التي تجعل f متصلة عند $x=0$ هي:
- (أ) $3/2$ (ب) $2/3$ (ج) 0 (د) 1
- (١١) القيمة العظمى المطلقة للدالة f ، حيث: $f(x) = \sin x + \cos x$ على $[0, 2\pi]$ هي:
- (أ) 0 (ب) 2 (ج) $\sqrt{2}$ (د) 1
- (١٢) الدالة f ، حيث: $f(x) = x^4 + 2x^3 + 5$ مقعرة لأعلى على:
- (أ) $(-1, \infty)$ (ب) \mathbb{R} (ج) $(-\infty, -1) \cup (0, \infty)$ (د) $(1, 0)$
- (١٣) إذا كانت: $g(x) = \sqrt{x+3}, f(x) = \tan x$ ، فإن المشتقة $(g \circ f)'(\frac{\pi}{4})$ تساوي:
- (أ) $\frac{\pi}{2}$ (ب) $\sqrt{\pi}$ (ج) $1/2$ (د) 1
- (١٤) المستقيمتان المقاربتان للدالة f ، حيث: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ، هي:
- (أ) $x=0$ (ب) $y=0$ (ج) $y=1$ (د) $y=\pm 1$
- (١٥) المقدار $\tan(\cos^{-1} \frac{3}{5})$ يساوي:
- (أ) $4/3$ (ب) $-4/3$ (ج) $4/5$ (د) 0

١٦) ضع علامة √ على التقرير الصائب وعلامة × على التقرير الخاطئ:

التقرير	
إذا كانت $f''(c)=0$ ، فإن $(c,f(c))$ نقطة انقلاب للدالة f	
إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند c ، فإن f متصلة عند c	
إذا كانت c نقطة حرجة للدالة f ، فإن $f'(c)=0$	
إذا كانت f متصلة على (a,b) ، فإن للدالة f قيمة عظمى على (a,b)	
إذا كانت f, g متصلتين عند c ، فإن $f \cdot g$ متصلة عند c	
إذا كانت $f(c)$ قيمة قصوى محلية ، فإن c نقطة حرجة للدالة f	

١٧) احسب $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يلي:

$y = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$ (أ)

$y = \cos^2(x + \tan^{-1} x)$ (ب)

النموذج الرابع
اختبار نهائي

الجزء الأول

ضع رمز الإجابة الصحيحة للأسئلة من ١ إلى ٢٠ في الجدول الآتي:

رقم السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
رمز الإجابة										

رقم السؤال	١١	١٢	١٣	١٤	١٥	١٦	١٧	١٨	١٩	٢٠
رمز الإجابة										

س١) مجموعة حل المتباينة $|5x - 1| > 9$ هي:

- (أ) $(-8/5, 2]$ (ب) $R - [-8/5, 2]$ (ج) R (د) ϕ

س٢) مجال الدالة $f(x) = \sqrt{1 + |x|}$ هو:

- (أ) R (ب) $(-\infty, 1)$ (ج) $[-1, \infty)$ (د) غير موجود

س٣) الدالة العكسية للدالة $\frac{1}{x+1}$ هي:

- (أ) $(1-x)/x$ (ب) $-1/(1+x)$ (ج) $x+1$ (د) لا شيء مما ذكر

س٤) إذا كان $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \frac{3}{4}$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \frac{3}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{2}{3}$, فإن $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f+g}{h} \right)(x)$ تساوي:

- (أ) $3/4$ (ب) $4/3$ (ج) $26/9$ (د) لا شيء مما ذكر

س٥) حل المتباينة $\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} \geq 1$ هو:

- (أ) $[0, \infty)$ (ب) IR (ج) ϕ (د) $(-\infty, 0)$

س٦) المشتقة الثانية للدالة f , حيث: $y = f(x) = \sin 2x - \cos 2x$ هي:

- (أ) $-y$ (ب) y (ج) $-4y$ (د) $4y$

س٧) مركز القطع الزائد الذي مستقيماه المقاربان: $2y = 3x - 5$ و $2y = -3x + 1$ هو:

- (أ) $(3, 5)$ (ب) $(1, -1)$ (ج) $(-3, 5)$ (د) $(2, 3)$

س٨) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 4} - x)$ هي: (أ) ∞ (ب) $-\infty$ (ج) 0 (د) لا شيء مما ذكر

س٩) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$ هي: (أ) 0 (ب) 8 (ج) -1 (د) ∞

س١٠) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\sin x + \tan x}{x}}$ هي: (أ) 0 (ب) ∞ (ج) $\sqrt{2}$ (د) غير موجودة

س١١) المشتقة العشرون للدالة f، حيث: $f(x) = \frac{x^{14}}{20} + \frac{x^3}{20} + x$ هي: (أ) 2117 (ب) 0 (ج) $\frac{14!}{20}$ (د) $\frac{3}{20}$

س١٢) ميل المماس للمنحني: $\tan(xy) + y = 1$ ، عند النقطة (0,1) هو: (أ) 1 (ب) 3 (ج) -1 (د) 2

س١٣) الدالة f، حيث: $f(x) = \frac{1}{|x-2|}$ تحقق نظرية القيمة المتوسطة على الفترة: (أ) R (ب) [0,2] (ج) [0,1] (د) لا شيء مما ذكر

س١٤) إذا كان: $f(x) = \tan^{-1} \sqrt{x}$ ، فإن المشتقة f'(1) تساوي: (أ) 1/4 (ب) -1/4 (ج) -1/2 (د) 1/2

س١٥) المستقيم المقارب الأفقي للمنحني: $f(x) = \frac{1 + \sin x}{x}$ هو: (أ) y = 1 (ب) y = 0 (ج) x = -1 (د) x = 0

س١٦) قيمة k التي تجعل الدالة التالية: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}, & x \neq 2 \\ k, & x = 2 \end{cases}$ متصلة عند x=2 هي: (أ) غير موجودة (ب) 12 (ج) 3 (د) -3

س١٧) للدالة $f(x) = 3x^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}$ نقاط حرجة عندما تكون: (أ) x=-1, x=0 (ب) x=0 (ج) x=1 (د) x=3, x=4

س١٨) القيمة العظمى المطلقة للدالة: $f(x) = \sin x - \cos x$ على الفترة [0, π] تساوي: (أ) -2 (ب) $\sqrt{2}$ (ج) 2 (د) $-\sqrt{2}$

- س١٩) أكبر مساحة لمستطيل محيطه 36 سم، هي:
- (أ) 81 (ب) 89 (ج) 102 (د) لا شيء مما ذكر
- س٢٠) إذا كان: $g(1)=7, f(5)=8, f'(7)=2, g'(1)=3$ ، فإن $(fog)'(1)$ تساوي:
- (أ) 6 (ب) 12 (ج) 14 (د) 16

الجزء الثاني

اكتب الإجابة المناسبة بجانب كل فقرة في السؤالين التاليين (بدون شرح):

السؤال الأول: إذا كان $f(x) = 2x^3 - x^4$ ، فإن:

	فترات التزايد هي:
	فترات التقعر نحو الأعلى هي:
	نقاط الانقلاب هي:
	قيم x التي يكون للدالة عندها قيم عظمى محلية هي:

السؤال الثاني: إذا كانت معادلة القطع المكافئ هي:

$$y^2 + 2y = 4x - 3$$
، فإن:

	بؤرته هي:
	معادلة دليله هي:
	رأسه هو:

منحنيه البياني مبيئاً عليه المعلومات السابقة هو:

أجب عن السؤالين التاليين إجابة كاملة:

السؤال الثالث: أثبت باستخدام التعريف أن، مشتقة $\sin x$ هي $\cos x$.

السؤال الرابع: نقطة تتحرك على القطع الناقص: $x^2 + 2y^2 = 3$ ، فإذا كان $\frac{dx}{dt} = 2$ ، فأوجد $\frac{dy}{dt}$ عند النقطة (1,1).

النموذج الخامس
اختبار نهائي

الجزء الأول: ضع رمز الإجابة الصحيحة للأسئلة من ١ إلى ٢٠ في الجدول التالي:

رقم السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
رمز الإجابة										

رقم السؤال	١١	١٢	١٣	١٤	١٥	١٦	١٧	١٨	١٩	٢٠
رمز الإجابة										

س١) مجموعة حل المتباينة: $\frac{1-x}{x} > 0$ ، هي:

- (أ) $\mathbb{R} - \{0\}$ (ب) $(0,1)$ (ج) \mathbb{R} (د) $(-\infty,1)$

س٢) مجموعة حل المتباينة $|3x+7| > 5$ ، هي:

- (أ) $(-2/3, 8)$ (ب) $\mathbb{R} - [-4, -2/3]$ (ج) \mathbb{R} (د) $(-\infty, -4)$

س٣) مجال (نطاق) الدالة: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$ ، هو:

- (أ) $\mathbb{R} - [2,3]$ (ب) $\mathbb{R} - \{2,3\}$ (ج) \mathbb{R} (د) $(3, \infty)$

س٤) إذا كانت $f(x) = \frac{1}{x}$ ، $g(x) = \sqrt{x+1}$ فإن مجال (نطاق) $\frac{f}{g}$ ، هو:

- (أ) $\mathbb{R} - \{0\}$ (ب) $\mathbb{R} - \{0, -1\}$ (ج) $(-1, \infty) - \{0\}$ (د) \mathbb{R}

س٥) إذا كان: $g(x) = 8 + \frac{1}{x^3}$ ، فإن $g^{-1}(x)$ تساوي:

- (أ) $x^3/(8x^3+1)$ (ب) $1/8+x^3$ (ج) غير موجودة (د) $(x-8)^{-1/3}$

س٦) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 6x + 8}$ ، هي:

- (أ) 1 (ب) ∞ (ج) $5/2$ (د) 0

س٧) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\tan 2x - x}{3x}}$ ، هي:

- (أ) $1/\sqrt{3}$ (ب) غير موجودة (ج) 0 (د) $1/3$

س٨) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 - 4}}{2x - 3}$ ، هي:

- (أ) غير موجودة (ب) 0 (ج) $3/2$ (د) $-3/2$
- س٩ (أ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ ، هي : (ب) 2 (ج) $1/4$ (د) 1
- س١٠ القيمة الصغرى للدالة: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ ، على الفترة $[0, 2]$ هي : (أ) 0 (ب) -3 (ج) 5 (د) 1
- س١١ معادلة المماس للمنحنى: $y = \tan^{-1} x^2$ ، عند نقطة الأصل هي : (أ) $y = 0$ (ب) $x = 0$ (ج) $y = x$ (د) $y = -x$
- س١٢ إن فترة التزايد للدالة: $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ هي : (أ) \mathbb{R} (ب) $[-1, 1]$ (ج) $[0, \infty)$ (د) $[-1, 2]$
- س١٣ فترة التقعر نحو الأسفل للدالة: $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$ ، هي : (أ) \mathbb{R} (ب) $(3/2, 8)$ (ج) $(-\infty, 3/2)$ (د) $(0, 1)$
- س١٤ إذا كان: $z = x + xy$ ، وكان $\frac{dx}{dt} = 2$ ، $\frac{dy}{dt} = 3$. فعندما $y = x = 1$ ، فإن $\frac{dz}{dt}$ تساوي : (أ) 7 (ب) 8 (ج) 4 (د) 5
- س١٥ قيمة k التي تجعل الدالة: $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 2x}{x \tan 3x} & x \neq 0 \\ k & x = 0 \end{cases}$ ، متصلة عند $x = 0$ هي : (أ) 0 (ب) 1 (ج) $4/3$ (د) $2/3$
- س١٦ إذا كان $x^2 + 2y^2 = 3$ ، فإن قيمة y'' عند النقطة $(1, 1)$ تساوي : (أ) $-3/4$ (ب) $-1/2$ (ج) 1 (د) 3
- س١٧ قيمتا h, k التي تجعل الدالة: $f(x) = \begin{cases} k \sin x & x \geq 0 \\ x + h & x < 0 \end{cases}$ قابلة للاشتقاق عند $x = 0$ هما : (أ) $h=0, k=0$ (ب) $h=0, k=1$ (ج) $h=1, k=1$ (د) $k=1$ وجميع قيم h
- س١٨ معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $(0, 1)$ ، $(4, 1)$ وأحد رأسيه $(1, 1)$ هي : (أ) $(y-1)^2 - 3(x-2)^2 = 3$ (ب) $(y-1)^2 + 3(x-2)^2 = 3$ (ج) $(y-1)^2 = 3(x-2)$ (د) $3(x-2)^2 - (y-1)^2 = 3$
- س١٩ النقاط الحرجة للدالة $f(x) = \cos x - \sin x$ على الفترة $[0, \pi]$ تتوافق قيم x : (أ) 0 (ب) $\pi/2$ (ج) $3\pi/4$ (د) π
- س٢٠ قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للدالة: $f(x) = x + (1/x)$ على الفترة $[1/2, 2]$ ، هي : (أ) $3/2$ (ب) 0 (ج) 1 (د) -1

الجزء الثاني: أجب عن الأسئلة التالية:

السؤال الأول: جد y' فيما يلي:

(أ) $y = \sin^2 \sqrt{x^2 + 1}$ (ب) $y = x \cot^{-1} x^2$

السؤال الثاني: جد مركز القطع التالي وبؤرتيه ورأسيه، ثم ارسمه:

$$9x^2 + 25y^2 - 18x + 50y = 191$$

السؤال الثالث: إذا كان $x \geq 0$ ، $y \geq 0$ وكان $x + y = 3$ ، فأوجد القيمة العظمى للمتغير z حيث:

$$z = x^2 y$$

السؤال الرابع: عين قيم كل من a, b, c حتى يكون للدالة:

$$f(x) = ax^3 + x^2 + bx + c$$

قيمة صغرى محلية عند النقطة $(1,0)$ ونقطة انقلاب عند $x = 2$

النموذج السادس

اختبار نهائي

الجزء الأول

ضع رمز الإجابة الصحيحة للأسئلة من ١ إلى ٢٠ في الجدول التالي:

رقم السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
رمز الإجابة										

رقم السؤال	١١	١٢	١٣	١٤	١٥	١٦	١٧	١٨	١٩	٢٠
رمز الإجابة										

س١) مجموعة حل المتباينة: $|4 - x| \leq 2$ ، هي:

(أ) $(6, \infty)$ (ب) $[2, 6]$ (ج) \emptyset (د) $(-\infty, 4)$

س٢) مجموعة حل المتباينة: $(x - 1)^3(x^2 + 2) > 0$ ، هي:

(أ) $(-2, 1)$ (ب) $(-\infty, 2) \cup (1, \infty)$ (ج) $(1, \infty)$ (د) \mathbb{R}

س٣) مجموع حل المتباينة: $\frac{3}{(x-2)} < \frac{5}{(x-6)}$ ، هي:

(أ) $(-\infty, 2)$ (ب) $\mathbb{R} - \{2, 6\}$ (ج) $(-4, 2) \cup (6, \infty)$ (د) $(6, \infty)$

س٤) مجال الدالة: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x}}$ ، هو:

(أ) $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$ (ب) $[4, \infty)$ (ج) \mathbb{R} (د) $\mathbb{R} - \{0, 4\}$

س٥) الدالة العكسية للدالة: $f(x) = \frac{x+1}{1+2x}$ ، هي:

(أ) $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{1+2x}$ (ب) $f^{-1}(x) = \frac{2(x-1)}{x+1}$ (ج) $f^{-1}(x) = \frac{1+2x}{x+1}$ (د) $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{1-2x}$

س٦) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 5x + 6}{\sqrt{x} - 2}$ ، هي:

(أ) 0 (ب) 1 (ج) -1 (د) ∞

س٧) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cot 3x}{\sin 4x}$ ، هي:

(أ) $3/4$ (ب) 1 (ج) 0 (د) $1/12$

س٨) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \cos x \cdot \csc(\cos x)$ هي:

- (أ) 0 (ب) 1 (ج) $\pi/2$ (د) ∞

س٩) إذا كان $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ في جوار $x=1$ و $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 22$ ، فإن

$\lim_{x \rightarrow 1} (18 + g(x))$ هي:

- (أ) 40 (ب) 22 (ج) 19 (د) 18

س١٠) قيمة k التي تجعل الدالة: $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin kx}{x}, & x \neq 0 \\ 3k - 2, & x = 0 \end{cases}$ متصلة هي:

- (أ) $2/3$ (ب) $-2/3$ (ج) 1 (د) 0

س١١) مجال الدالة f ، حيث: $f(x) = \frac{\sin^{-1} x}{\cos^{-1} x}$ هو:

- (أ) \mathbb{R} (ب) $[-1, 1]$ (ج) $[0, \pi/2]$ (د) $[-1, 1)$

س١٢) مجموعة قيم x الموافقة للنقاط الحرجة للدالة $f(x) = x(x-4)^{1/3}$ هي:

- (أ) $\{4\}$ (ب) $\mathbb{R} - \{4\}$ (ج) $\{3, 4\}$ (د) $\{3\}$

س١٣) ميل المماس للمنحنى: $yx^2 + y^2 = x + 1$ عند النقطة $(1, 1)$ هو:

- (أ) $-1/3$ (ب) $-1/2$ (ج) 0 (د) 1

س١٤) القيمة العظمى المطلقة للدالة $f(x) = \sin x + \cos x$ على الفترة $[0, \pi/2]$ هي:

- (أ) 2 (ب) $\sqrt{2}$ (ج) 0 (د) 1

س١٥) الخطوط المقاربة الأفقية والرأسية للدالة f ، حيث: $f(x) = \frac{3x^2}{x^2 - 4}$ هي:

- (أ) $x = \pm 2, y = 3$ (ب) $x = \pm 2$ (ج) $x = 2, y = 0$ (د) $x = 3, y = \pm 2$

س١٦) نقاط الانقلاب للدالة f ، حيث: $f(x) = 3x^5 - 5x^4$ ، هي:

- (أ) $(0, 0)$ (ب) $(3, 5)$ (ج) $(1, -2)$ (د) $(0, 0), (1, -2)$

س١٧) إذا كان معدل تزايد طول ارتفاع مثلث هو 3 ، ومعدل تزايد طول قاعدته هو 2 ، فإن معدل

تزايد مساحته في اللحظة التي يكون فيها طول ارتفاعه 10 وطول قاعدته 12 ، هو:

- (أ) 3 (ب) 8 (ج) 20 (د) 28

س١٨) المستقيمات المقاربة للقطع الزائد: $\frac{x^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{16} = 1$ ، هي:

- (أ) $y = 4x + 1, y = -4x + 1$ (ب) $y = 1 + x, y = 1 - x$

- (ج) $y = 4, x = 2$ (د) $y = 1 - 2x, y = 1 + 2x$

س١٩) دليل القطع المكافئ: $y^2 - 2y + 4x = 3$ ، هو:

(أ) $x = 0$ (ب) $x = 2$ (ج) $y = 0$ (د) $y = 2$

س٢٠) إذا كانت بؤرتا القطع الناقص هما: $(1,0)$ ، $(1,4)$ ومحوره الأكبر 6 ، فمعادلته هي:

(أ) $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{16} = 1$ (ب) $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{5} = 1$
 (ج) $\frac{(y-2)^2}{9} + \frac{(x-1)^2}{5} = 1$ (د) $\frac{(y-2)^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{5} = 1$

الجزء الثاني

أجب عن الأسئلة التالية:

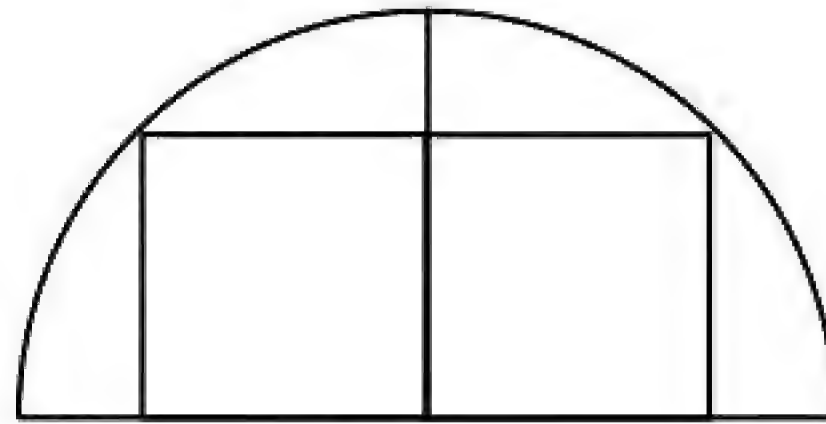
السؤال الأول: أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كان:

(أ) $y = x^2 \sin^3(3x)$

(ب) $y = \sin^{-1}(\sqrt{x}) + \sec^2 x$

(ج) $\tan(xy) = 1 + y^2$

السؤال الثاني: أوجد بعدي المستطيل الذي مساحته أكبر ما يمكن بحيث يمكن حصره في النصف العلوي من الدائرة $x^2 + y^2 = 16$ ، كما هو موضح في الشكل:



السؤال الثالث: إذا كان $n \in \mathbb{N}$ ، فأثبت أن $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$.

السؤال الرابع: إذا كان $f(x) = 6x^2 - x^4 - 5$ ، فأوجد:

(أ) فترات التزايد

(ب) فترات التقعر لأعلى

(ج) نقاط الانقلاب، ثم ارسم بيان الدالة.

النموذج السابع
اختبار نهائي

الجزء الأول

ضع رمز الإجابة الصحيحة للأسئلة من ١ إلى ٢٠ في الجدول التالي:

رقم السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
رمز الإجابة										

رقم السؤال	١١	١٢	١٣	١٤	١٥	١٦	١٧	١٨	١٩	٢٠
رمز الإجابة										

س١) مجموعة حل المتباينة: $|2x-3| < 1$ هي:

- (أ) IR (ب) (1,2) (ج) [1,2] (د) IR-[1,2]

س٢) مجموعة حل المتباينة: $x + \frac{4}{x} < 0$ هي:

- (أ) IR (ب) (0, ∞) (ج) (-∞, 0) (د) IR - {0}

س٣) مجموعة حل المتباينة $|x-3| < |x-2|$ هي:

- (أ) (-∞, 5/2) (ب) (5/2, ∞) (ج) IR - {3, 2} (د) IR - (2, 3)

س٤) إذا كان: $f(x) = \frac{1}{x} + 3$ ، فإن $f^{-1}(x)$ تساوي:

- (أ) $\frac{1}{x-3}$ (ب) $-\frac{1}{x+3}$ (ج) غير موجودة (د) $x-3$

س٥) مجال f، حيث: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2-x+2}}$ ، هو:

- (أ) R-[-2, 1) (ب) [-2, 1) (ج) (-1, 2) (د) (-2, 1)

س٦) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-4}{x^2-x-2}$ هي:

- (أ) 1 (ب) 4/3 (ج) 0 (د) ∞

س٧) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 5x}{x \tan 4x}$ هي:

- (أ) 25/4 (ب) 0 (ج) -1 (د) ∞

س٨) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x}}{x+1}$ ، هي :
 (أ) -2 (ب) 0 (ج) 2 (د) ∞

س٩) الدالة f ، حيث : $f(x) = |2x - 3|$ عند $x = 3/2$:
 (أ) متصلة وقابلة للاشتقاق (ب) غير متصلة وقابلة للاشتقاق
 (ج) غير متصلة وغير قابلة للاشتقاق (د) متصلة وغير قابلة للاشتقاق

س١٠) قيمة k التي تجعل الدالة : $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2} + 1 & x \neq 0 \\ k & x = 0 \end{cases}$ متصلة عند $x = 0$ ، هي :
 (أ) 0 (ب) 1 (ج) $2/3$ (د) $3/2$

س١١) المشتقة الرابعة للدالة : $f(x) = \frac{1}{1+x}$ عند $x = 0$ ، هي :
 (أ) 22 (ب) 0 (ج) 24 (د) $\frac{1}{(1+x)^4}$

س١٢) بؤرتا القطع : $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{5} = 1$ ، هما :
 (أ) $(4,3), (-2,3)$ (ب) $(1,3), (1,-3)$
 (ج) $(3,4), (3,-2)$ (د) $(1,4), (1,-2)$

س١٣) معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $(1 \pm 2, -1)$ وأحد رأسيه $(4, -1)$ هي :
 (أ) $x^2 + 2y^2 + 4x = 0$ (ب) $5x^2 + 4y^2 + 2x + 3y = 0$
 (ج) $5x^2 + 9y^2 - 10x + 18y - 31 = 0$ (د) $x^2 + 2y^2 + 1 = 0$

س١٤) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{1+x^2}$
 (أ) 0 (ب) 1 (ج) ∞ (د) غير موجودة

س١٥) الخطوط المقاربة الأفقية والرأسية للدالة : $f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}$ ، هي :
 (أ) $x = 1, y = 2$ (ب) $y = 1$ (ج) $y = 2$ (د) $x = -1, y = -2$

س١٦) معادلة المماس للمنحنى : $f(x) = 2 + x \cos 2x$ ، عند $x = 0$ هي :
 (أ) $y + x - 2 = 0$ (ب) $y - x - 2 = 0$
 (ج) $x - y - 2 = 0$ (د) $x - y - 1 = 0$

س١٧) النقاط الحرجة للدالة : $f(x) = x + \sqrt{1-x}$ هي عندما x تساوي :
 (أ) $1, 3/4$ (ب) $4/3, 1$ (ج) $3/4, -1$ (د) 1

س١٨) قيمة k التي تجعل الدالة: $f(x) = \tan x + k \sin x$ تحقق نظرية رول على الفترة $[0, \pi/4]$ ، هي:

(أ) 0 (ب) $\sqrt{2}$ (ج) $-\sqrt{2}$ (د) غير موجودة

س١٩) إن القيمة الصغرى المطلقة للدالة: $f(x) = x^3 - 3x + 1$ على الفترة $[0, 2]$ ، هي:

(أ) 3 (ب) -5 (ج) 1 (د) -1

س٢٠) إذا كان $y^2 - x - y + 1 = 0$ وكان معدل تغير x هو $\frac{dx}{dt} = 2$ ، فإن معدل تغير y عند النقطة

(1,1) هو:

(أ) 2 (ب) -1 (ج) 1 (د) -2

الجزء الثاني

أجب عن الأسئلة التالية:

السؤال الأول: أثبت أن مشتقة الدالة: $f(x) = \tan^{-1} x$ هي:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

السؤال الثاني: أوجد فترات التزايد -التناقص -التقعر للأعلى وللأسفل -التحدب -القيم القصوى

المحلية - نقاط الانقلاب للدالة: $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ ، ثم ارسم منحنى الدالة.

السؤال الثالث: أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كان:

(أ) $y = x \sec^2(2x)$

(ب) $y = \sec^{-1}(\sqrt{x}) + x \sin 3x$

(ج) $x^2 y + y^2 x = 2$

السؤال الرابع: ارسم القطع التالي:

$$x^2 + 2y - 4x + 6 = 0 \text{ محددًا جميع عناصره.}$$

إجابات نماذج الاختبارات

النموذج الأول

ج، ج، ج، أ، د، ب، أ، ج، أ، د، أ، ج، ب، أ، د، أ، ب، ج، د

النموذج الثاني

ج، د، ج، أ، ب، ج، ب، د، د، ب، د، د، أ

النموذج الثالث

أ، أ، ب، د، ب، د، ب، ب، أ، ب، ج، ج، ج، د، أ

النموذج الرابع

ب، أ، أ، ج، أ، ج، ب، ج، ج، ج، ب، ج، ج، أ، ب، ج، أ، ب، أ، أ

النموذج الخامس

ب، ب، أ، ج، د، ج، أ، د، ج، أ، أ، ب، د، أ، ج، أ، ب، د، ج، ج

النموذج السادس

ب، ج، ج، أ، د، أ، د، ب، أ، ج، د، ج، أ، ب، أ، ج، د، د، ب، ج

النموذج السابع

ب، ج، ب، أ، د، ب، أ، أ، د، د، ج، أ، ج، أ، ج، ب، أ، ج، د، أ

ملحق
جداول للصيغ الرياضية

(١) طول قوس منحنى

(أ) باستخدام الإحداثيات القطبية: $r = f(\theta)$ ، $\int_a^\beta \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta$

(ب) باستخدام الإحداثيات الوسيطة:

$x = f(t)$, $y = g(t)$ ، $\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$

(ج) باستخدام الإحداثيات الديكارتية: $y = f(x)$ ، $\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$

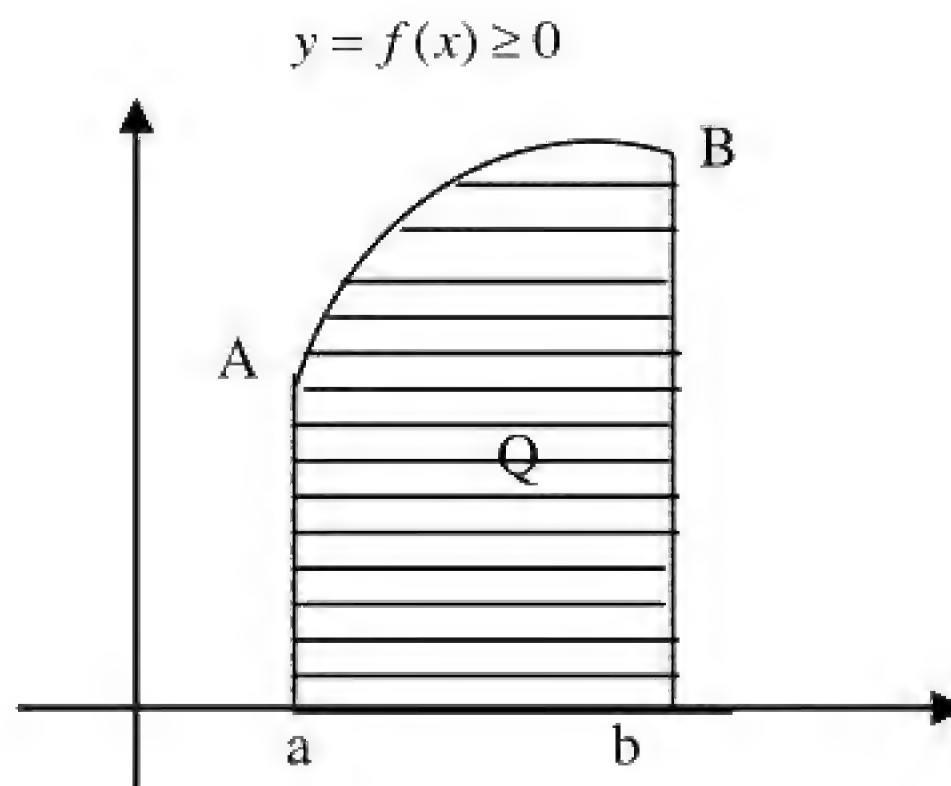
(د) باستخدام الإحداثيات الديكارتية: $x = g(y)$ ، $\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$

(٢) المنطقة Q من النوع

الأول:

هي من الشكل المرافق، وهي واقعة فوق القطعة $[a, b]$ وتحت

المنحنى: $y = f(x) \geq 0$.



(أ) مساحة المنطقة Q: $\int_a^b y \, dx$

(ب) الحجم الناتج من دورانها حول المحور x: $\pi \int_a^b y^2 \, dx$

(ج) الحجم الناتج من دورانها حول المحور y (طريقة الشرائح الأسطوانية):

$$2\pi \int_a^b xy \, dx \quad (a \geq 0)$$

(د) مساحة السطح الدوراني الناتج من دوران القوس AB حول المحور x:

$$2\pi \int_a^b y \, ds$$

ds: لها إحدى الصيغ التالية: $\sqrt{r^2 + r'^2} d\theta$ ، $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$ ،

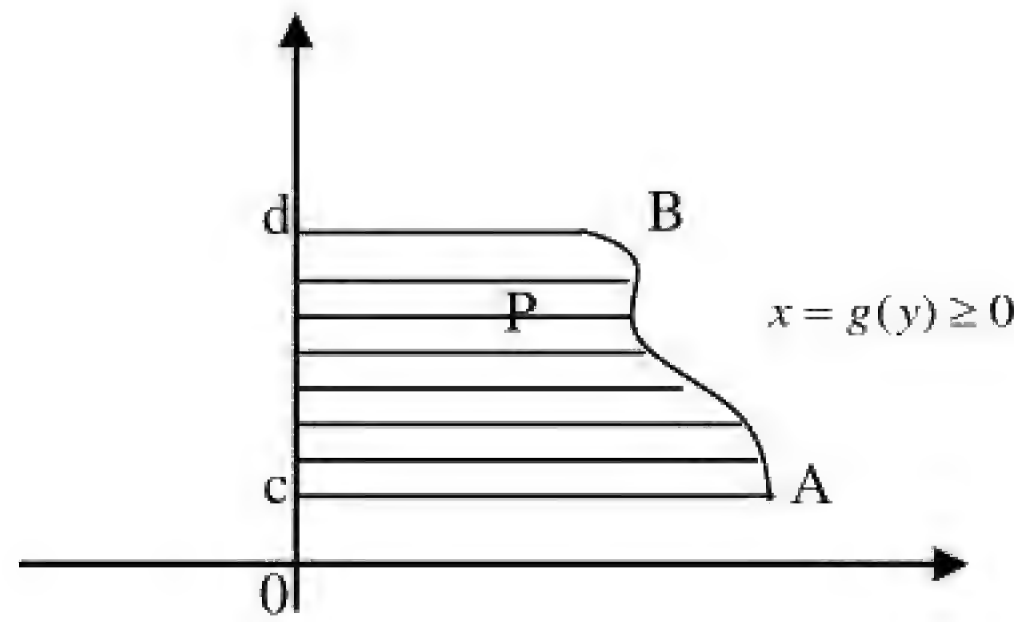
$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

(٣) المنطقة P من النوع الثاني:

هي من الشكل المرافق، وهي

محصورة بين المنحني:

$$x = g(y) \geq 0$$



والمستقيمين:

$y = d$ ، $y = c$ ومحور الصادات.

$$(أ) \text{ مساحة المنطقة } P : \int_c^d x dy$$

$$(ب) \text{ الحجم الناتج من دورانها حول المحور } y : \pi \int_c^d x^2 dy$$

(ج) الحجم الناتج من دورانها حول المحور x (طريقة الشرائح الأسطوانية):

$$. (c \geq 0) 2\pi \int_c^d xy dy$$

(د) مساحة السطح الدوراني الناتج من دوران القوس AB حول المحور y :

$$. 2\pi \int_c^d x ds$$

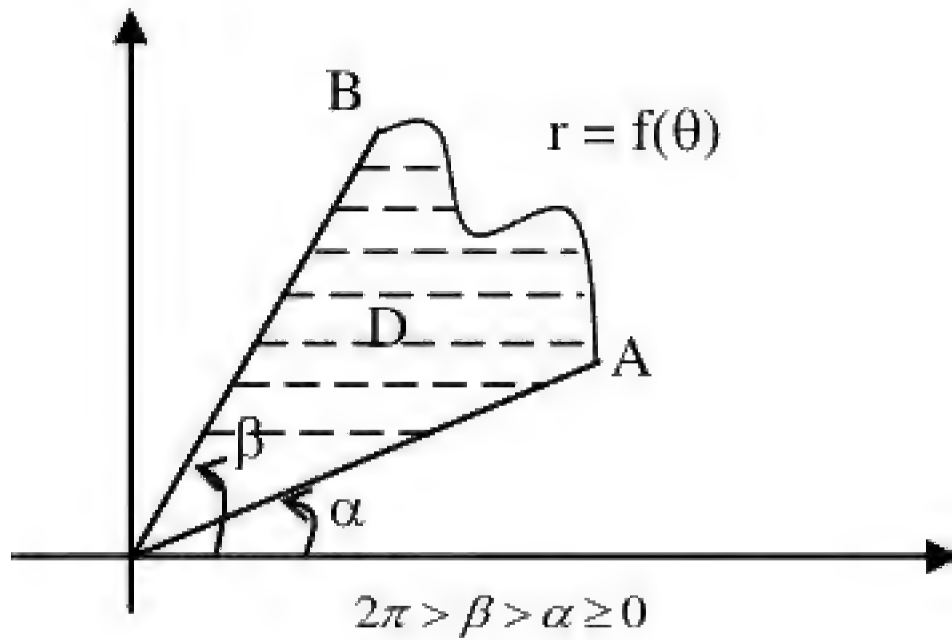
$$ds: \text{ لها إحدى الصيغ التالية: } \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta, \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt, \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$

٤) المنطقة D من النوع الثالث:

هي من الشكل المرافق وهي محصورة بين

المستقيمين: $\theta = \alpha$ ، $\theta = \beta$ والمنحني القطبي:

$$. r = f(\theta)$$

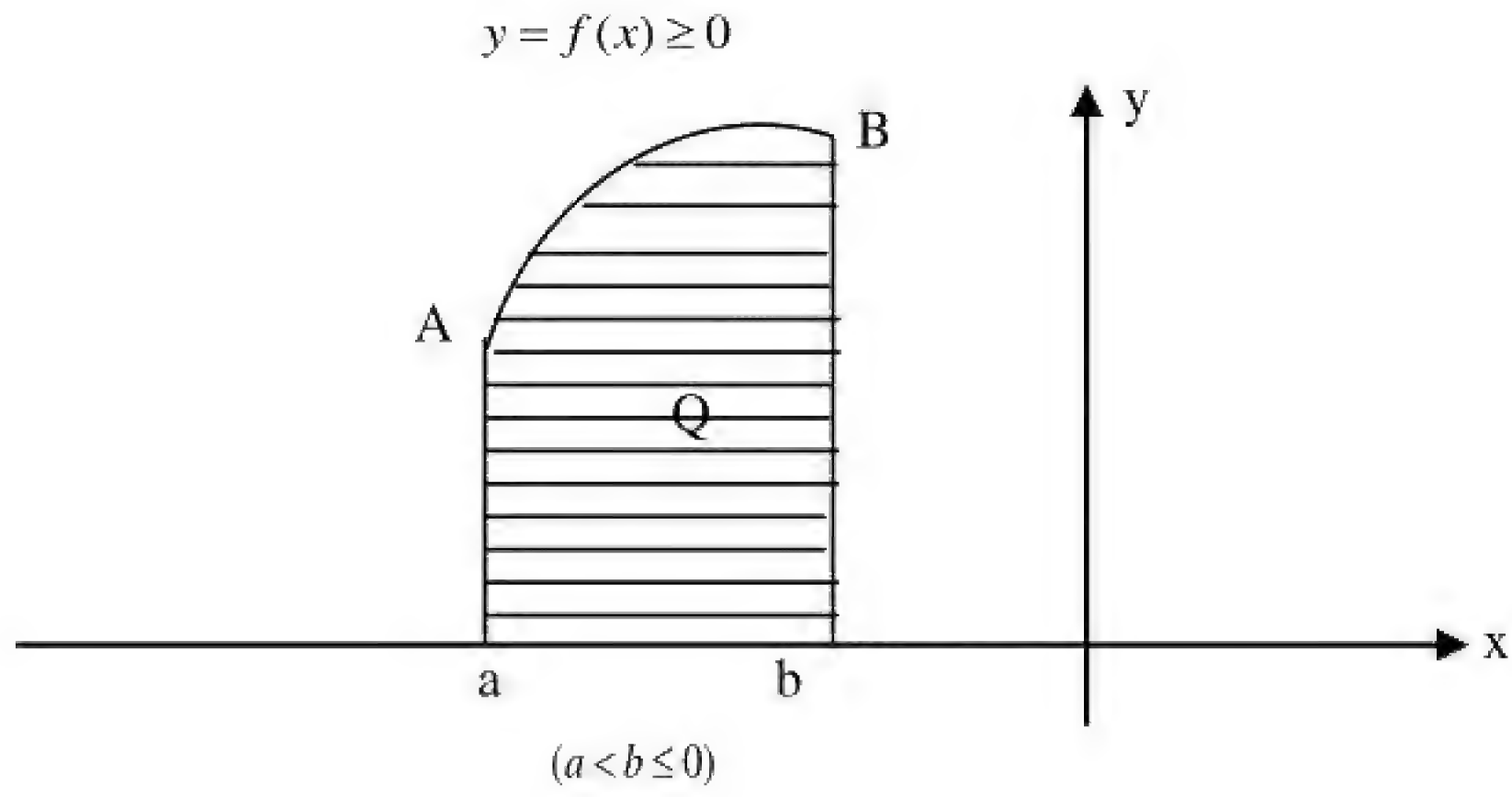


$$(أ) \text{ مساحة المنطقة } D : \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

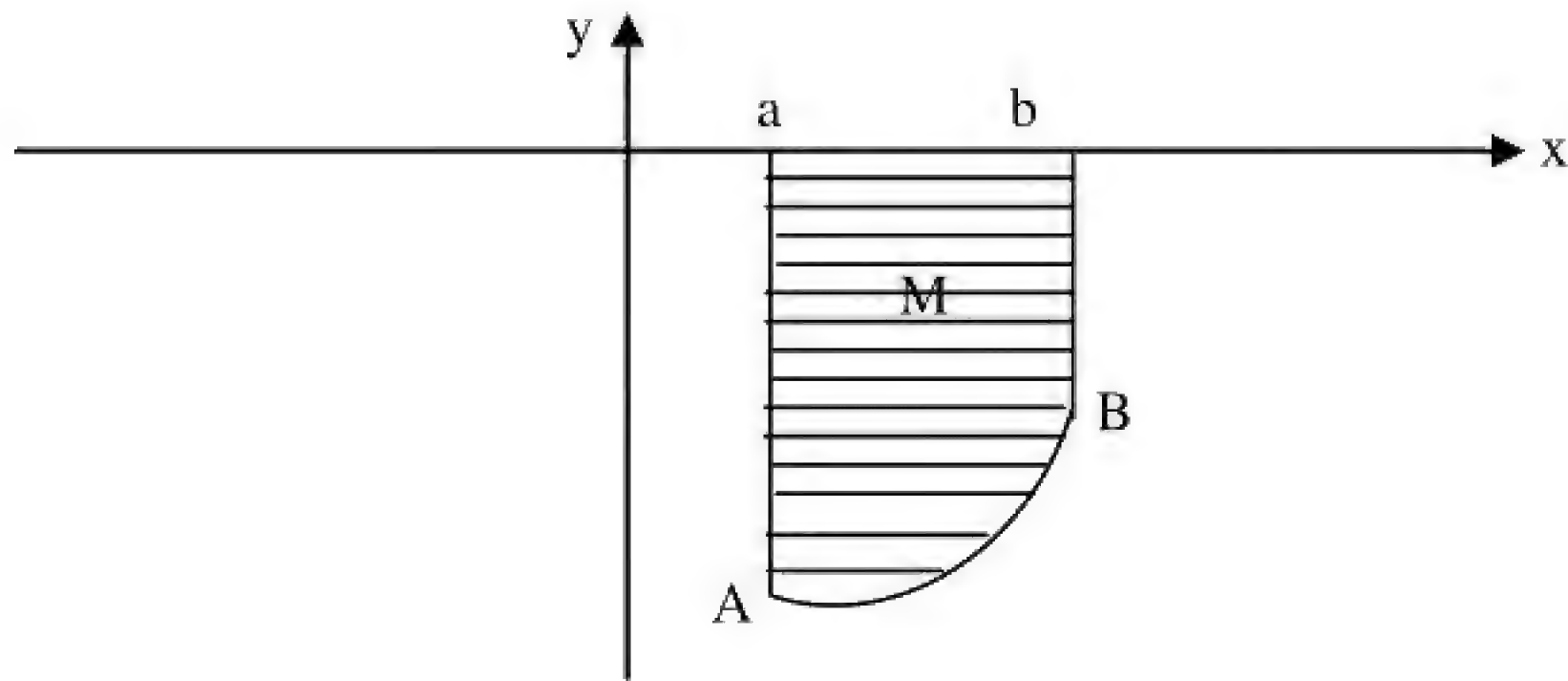
(ب) الحجم الناتج من دوران D حول المحور القطبي:

$$. (\pi > \beta > \alpha \geq 0) \int_{\alpha}^{\beta} \frac{2}{3} \pi r^3 \sin \theta d\theta$$

ملحوظة

(أ) إذا كانت منطقة التكامل Q من النوع الأول:فإن الحجم الناتج من دوران Q حول المحور y (طريقة الشرائح الأسطوانية) يعطى بالصيغة:

$$(a < b \leq 0) \quad 2\pi \int_a^b |x| y dx = -2\pi \int_a^b xy dx$$

(ب) إذا كانت منطقة التكامل M نظيرة Q بالنسبة للمحور x ، فإن:

(١) مساحة المنطقة M ، هي: $\int_a^b |y| dx = -\int_a^b y dx$

(٢) مساحة السطح الدوراني الناتج من دوران القوس \overline{AB} حول المحور x ، هي:

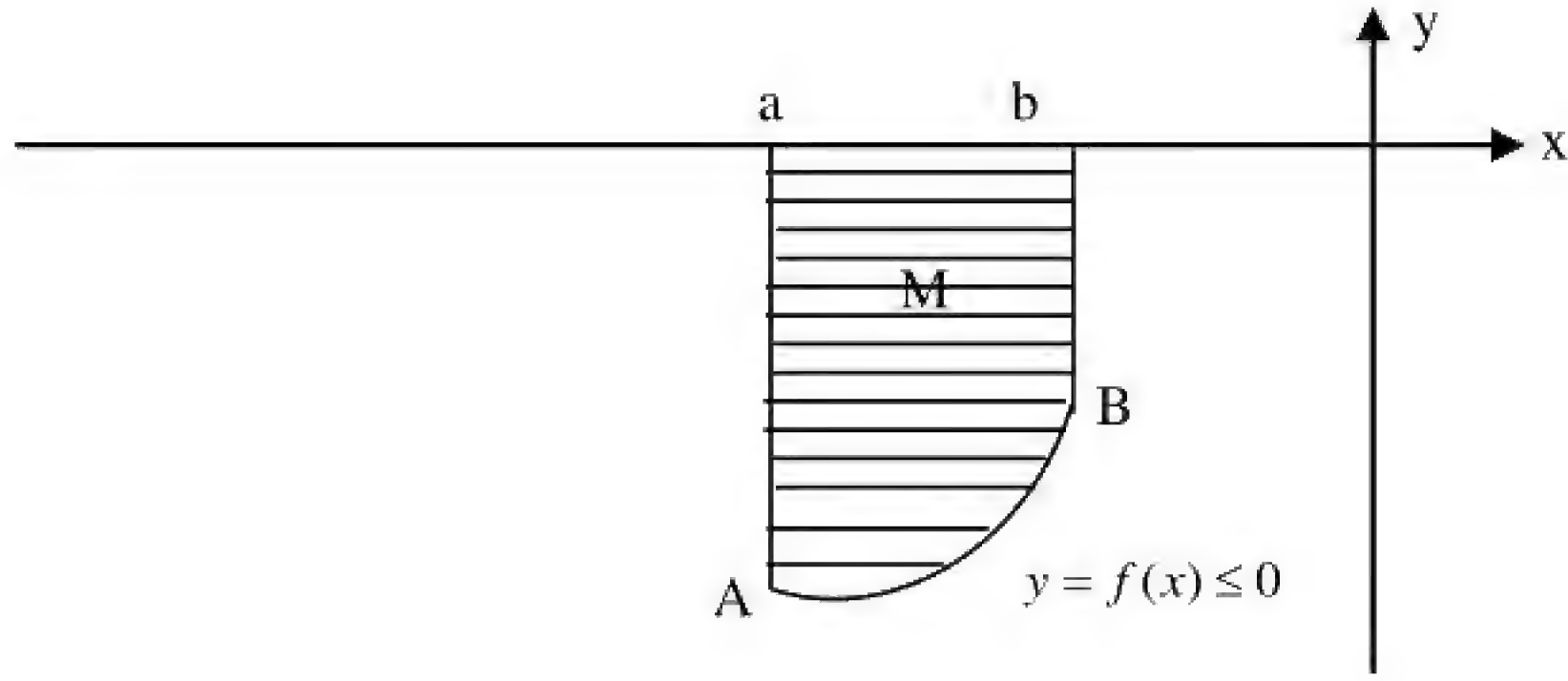
$$2\pi \int_a^b |y| ds = -2\pi \int_a^b y ds$$

(٣) الحجم الناتج من دوران المنطقة M حول المحور y (طريقة الشرائح الأسطوانية)، هو:

$$(b > a \geq 0) \quad 2\pi \int_a^b x |y| dx = -2\pi \int_a^b y x dx$$

وإذا كانت: $a < b \leq 0$ ، فإن الحجم يساوي:

$$2\pi \int_a^b |x| |y| dx = 2\pi \int_a^b x y dx$$



بالمثل نحصل على الصيغ الرياضية الموافقة، إذا أخذنا منطقة التكامل من الشكل N نظير المنطقة P (من النوع الثاني) بالنسبة للمحور y .

تمارين عامة

$$\int \frac{x-5}{x^2-2x+2} dx \quad (٢) \qquad \int \frac{dx}{2x^2-4x+9} \quad (١)$$

$$\int \frac{dx}{x(x^2+5)} \quad (٤) \qquad \int \frac{x^3}{x^2+x+\frac{1}{2}} dx \quad (٣)$$

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)} \quad (٦) \qquad \int \frac{dx}{(x+2)^2(x+3)^2} \quad (٥)$$

$$\int \frac{dx}{x^4-2x^2+1} \quad (٨) \qquad \int \frac{dx}{(x^2+2)^2} \quad (٧)$$

$$\int \frac{3-4x}{(1-2\sqrt{x})^2} \quad (١٠) \qquad \int \frac{xdx}{(x^2-x+1)^3} \quad (٩)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} \quad (١٢) \qquad \int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x^3} dx \quad (١١)$$

$$\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x})^2} \quad (١٤) \qquad \int \frac{1-\sqrt[3]{2x}}{\sqrt{2x}} dx \quad (١٣)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{5-x}+\sqrt{5-x}} \quad (١٦) \qquad \int \frac{2x+1}{\sqrt{(4x^2-2x+1)^3}} dx \quad (١٥)$$

$$\int \frac{xdx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}} \quad (١٨) \qquad \int \frac{x^2}{\sqrt{(x^2-1)^3}} dx \quad (١٧)$$

$$\int \frac{x+1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} dx \quad (٢٠) \qquad \int \frac{xdx}{\sqrt{1-2x^2-x^4}} \quad (١٩)$$

$$\int \sqrt{x^2-9} dx \quad (٢٢) \qquad \int \frac{dx}{(x^2+4x)\sqrt{4-x^2}} \quad (٢١)$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} \quad (٢٤) \qquad \int \sqrt{x-4x^2} dx \quad (٢٣)$$

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}} \quad (٢٦) \qquad \int x\sqrt{x^2+2x+2} dx \quad (٢٥)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} \quad (٢٨) \qquad \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^3}} \quad (٢٧)$$

$$\int \cos^4 x dx \quad (٣٠) \qquad \int \frac{5x}{\sqrt{1+x^4}} dx \quad (٢٩)$$

$$\int \frac{1+\sqrt{\cot x}}{\sin^2 x} dx \quad (٣٢) \qquad \int \frac{dx}{\cos x \sin^5 x} \quad (٣١)$$

$$\begin{aligned}
& \int \csc^5 5x dx \quad (۳۴) \\
& \int \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) dx \quad (۳۶) \\
& \int \frac{dx}{2\sin x + 3\cos x - 5} \quad (۳۸) \\
& \int \frac{dx}{\cos^2 x + 2\sin x \cos x + 2\sin^2 x} \quad (۴۰) \\
& \int \frac{dx}{(2 + \cos x)(3 + \cos x)} \quad (۴۲) \\
& \int \frac{\cos ax}{\sqrt{a^2 + \sin^2 ax}} dx \quad (۴۴) \\
& \int x \sin^2 x dx \quad (۴۶) \\
& \int x e^{2x} dx \quad (۴۸) \\
& \int \frac{x \arctan x}{\sqrt{1+x^2}} dx \quad (۵۰) \\
& \int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2} \quad (۵۲) \\
& \int \sinh x \cosh x dx \quad (۵۴) \\
& \int \frac{\sinh x \cosh x}{\sinh^2 x + \cosh^2 x} \quad (۵۶) \\
& \int \frac{dx}{e^{2x} - 2e^x} \quad (۵۸) \\
& \int \frac{e^{2x}}{(e^x + 1)^4} dx \quad (۶۰) \\
& \int (x^2 - 1) 10^{-2x} dx \quad (۶۲) \\
& \int \frac{\arctan x}{x^2} dx \quad (۶۴) \\
& \int \cos(\ln x) dx \quad (۶۶) \\
& \int x \arctan(2x + 3) dx \quad (۶۸) \\
& \int |x| dx \quad (۷۰) \\
& \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}} dx \quad (۳۳) \\
& \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx \quad (۳۵) \\
& \int \tan^3\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) dx \quad (۳۷) \\
& \int \frac{dx}{2 + 3\cos^2 x} \quad (۳۹) \\
& \int \frac{dx}{\sin x \sin 2x} \quad (۴۱) \\
& \int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan^2 x + 4\tan x + 1}} dx \quad (۴۳) \\
& \int \frac{x dx}{\cos^2 3x} \quad (۴۵) \\
& \int x^2 e^{x^3} dx \quad (۴۷) \\
& \int x^2 \ln \sqrt{1-x} dx \quad (۴۹) \\
& \int \sin^2 \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2} dx \quad (۵۱) \\
& \int \frac{dx}{(\tan x + 1) \sin^2 x} \quad (۵۳) \\
& \int \frac{\sinh \sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}} dx \quad (۵۵) \\
& \int \frac{x}{\sinh^2 x} dx \quad (۵۷) \\
& \int \frac{e^x}{e^{2x} - 6e^x + 13} dx \quad (۵۹) \\
& \int \frac{2^x}{1 - 4^x} dx \quad (۶۱) \\
& \int \sqrt{e^x + 1} dx \quad (۶۳) \\
& \int x^3 \arcsin \frac{1}{x} dx \quad (۶۵) \\
& \int (x^2 - 3x) \sin 5x dx \quad (۶۷) \\
& \int \arcsin \sqrt{x} dx \quad (۶۹)
\end{aligned}$$

الإجابات

$$\ln \sqrt{x^2 - 2x + 2} - 4 \arctan(x-1) \quad (٢) \quad \frac{1}{\sqrt{14}} \arctan \frac{\sqrt{2}(x-1)}{\sqrt{7}} \quad (١)$$

$$\frac{(x-1)^2}{2} + \frac{1}{4} \ln \left(x^2 + x + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \arctan(2x+1) \quad (٣)$$

$$2 \ln \left| \frac{x+3}{x+2} \right| - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} \quad (٥) \quad \frac{1}{5} \ln \sqrt{\frac{x^2}{x^2+5}} \quad (٤)$$

$$\frac{1}{2} \left(\ln \left| \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} \right| - \frac{1}{x+1} \right) \quad (٦)$$

$$\frac{1}{4} \left(\frac{2x}{1-x^2} + \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \right) \quad (٨) \quad \frac{1}{4} \left(\frac{x}{x^2+2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \quad (٧)$$

$$\frac{1}{6} \frac{x-2}{(x^2-x+1)^2} + \frac{1}{6} \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{2}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \quad (٩)$$

$$-\frac{1}{x} - \frac{4}{3x\sqrt{x}} - \frac{1}{2x^2} \quad (١١) \quad \frac{x(3+2\sqrt{x})}{1-2\sqrt{x}} \quad (١٠)$$

$$\sqrt{2x} - \frac{3}{5} \sqrt[6]{(2x)^5} \quad (١٣) \quad \ln \left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1} \right) \quad (١٢)$$

$$\frac{2x-1}{\sqrt{4x^2-2x+1}} \quad (١٥) \quad -\frac{3}{\sqrt[3]{x+1}} \quad (١٤)$$

$$-2(\sqrt[4]{5-x}-1)^2 - 4 \ln(1+\sqrt[4]{5-x}) \quad (١٦)$$

$$-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \quad (١٨) \quad \ln \left| x + \sqrt{x^2-1} \right| - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \quad (١٧)$$

$$\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}} \quad (٢٠) \quad \frac{1}{2} \arcsin \frac{x^2+1}{\sqrt{2}} \quad (١٩)$$

$$\frac{1}{8} \ln \left| \frac{\sqrt{4-x^2}-2}{x} \right| - \frac{1}{8\sqrt{3}} \arcsin \frac{2(x+1)}{x+4} \quad (٢١) \quad \frac{1}{x^2+4x} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+4} \right)$$

$$\frac{x}{2} \sqrt{x^2-9} - \frac{9}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2-9} \right| \quad (٢٢)$$

$$\frac{1}{16} (8x-1) \sqrt{x-4x^2} + \frac{1}{64} \arcsin(8x-1) \quad (٢٣)$$

$$\ln \left| \frac{x}{2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}} \right| \quad (٢٤)$$

$$\frac{(x^2 + 2x + 2)\sqrt{x^2 + 2x + 2}}{3} - \frac{(x+1)}{2}\sqrt{x^2 + 2x + 2} - \frac{1}{2}\ln(x+1+\sqrt{x^2 + 2x + 2}) \quad (۲۵)$$

$$\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{\sqrt{1-x^3}+1}\right| \quad (۲۷) \qquad \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} - \frac{\sqrt{(x^2-1)^3}}{3x^2} \quad (۲۶)$$

$$-\frac{1}{3}\ln|z-1| + \frac{1}{6}\ln(z^2+z+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2z+1}{\sqrt{3}} \left(z = \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x} \right) \quad (۲۸)$$

$$\frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} \quad (۳۰) \qquad \frac{5}{2}\ln(x^2 + \sqrt{1+x^4}) \quad (۲۹)$$

$$-\cot x - \frac{2\sqrt{(\cot x)^3}}{3} \quad (۳۲) \qquad \ln|\tan x| - \cot^2 x - \frac{1}{4}\cot^4 x \quad (۳۱)$$

$$\frac{5}{12}(\cos^2 x - 6)\sqrt[5]{\cos^2 x} \quad (۳۳)$$

$$-\frac{\cos 5x}{20\sin^4 5x} - \frac{3\cos 5x}{40\sin^2 5x} + \frac{3}{40}\ln\left|\tan\frac{5x}{2}\right| \quad (۳۴)$$

$$\frac{1}{4}\sin 2x \quad (۳۶) \qquad \frac{\tan^3 x}{3} + \frac{\tan^5 x}{5} \quad (۳۵)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{4\tan\frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}} \quad (۳۸) \qquad \tan^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + 2\ln\left|\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| \quad (۳۷)$$

$$\arctan(2\tan x + 1) \quad (۴۰) \qquad \frac{1}{\sqrt{10}}\arctan\left(\frac{2\tan x}{\sqrt{10}}\right) \quad (۳۹)$$

$$\frac{1}{2}\ln|\tan x + \sec x| - \frac{1}{2}\csc x \quad (۴۱)$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}\right) \quad (۴۲)$$

$$\ln\left|\tan x + 2 + \sqrt{\tan^2 x + 4\tan x + 1}\right| \quad (۴۳)$$

$$\frac{1}{3}x\tan 3x + \frac{1}{9}\ln|\cos 3x| \quad (۴۵) \qquad \frac{1}{a}\ln\left(\sin ax + \sqrt{a^2 + \sin^2 ax}\right) \quad (۴۴)$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{x\sin 2x}{4} - \frac{\cos 2x}{8} \quad (۴۶)$$

$$\frac{1}{3}e^{x^3} \quad (۴۸) \qquad \frac{e^{2x}}{4}(2x-1) \quad (۴۷)$$

$$\frac{x^3}{3}\ln\sqrt{1-x} - \frac{1}{6}\ln|x-1| - \frac{x^3}{18} - \frac{x^2}{12} - \frac{x}{6} \quad (۴۹)$$

$$\sqrt{1+x^2} \arctan x - \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \quad (٥٠)$$

$$-\frac{1}{1+\tan x} \quad (٥٢) \quad \frac{1}{3} \sin \frac{3x}{2} - \frac{1}{10} \sin \frac{5x}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} \quad (٥١)$$

$$\frac{\sinh^2 x}{2} \quad (٥٤) \quad \ln|1+\cot x| - \cot x \quad (٥٣)$$

$$\frac{1}{5} \ln \cosh 2x \quad (٥٦) \quad -2 \cosh \sqrt{1-x} \quad (٥٥)$$

$$\frac{1}{2e^x} - \frac{x}{4} + \frac{1}{4} \ln|e^x - 2| \quad (٥٨) \quad -x \coth x + \ln|\sinh x| \quad (٥٧)$$

$$\frac{4}{7} \sqrt[4]{(e^x+1)^7} - \frac{4}{3} \sqrt[4]{(e^x+1)^3} \quad (٦٠) \quad \frac{1}{2} \arctan \frac{e^x-3}{2} \quad (٥٩)$$

$$\frac{1}{\ln 4} \ln \frac{1+2^x}{1-2^x} \quad (٦١)$$

$$-\frac{10^{-2x}}{2 \ln 10} \left(x^2 - 1 + \frac{x}{\ln 10} + \frac{1}{2 \ln^2 10} \right) \quad (٦٢)$$

$$\ln \left| \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right| - \frac{\arctan x}{x} \quad (٦٤) \quad 2\sqrt{e^x+1} + \ln \frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1} \quad (٦٣)$$

$$\frac{x}{2} (\cos \ln x + \sin \ln x) \quad (٦٦) \quad \frac{1}{4} \left(x^4 \arcsin \frac{1}{x} + \frac{x^2+2}{3} \sqrt{x^2-1} \right) \quad (٦٥)$$

$$\frac{1}{5} \left(-x^2 \cos 5x + \frac{2}{5} x \sin 5x + 3x \cos 5x + \frac{2}{25} \cos 5x - \frac{3}{5} \sin 5x \right) \quad (٦٧)$$

$$\frac{1}{2} \left[(x^2-2) \arctan(2x+3) + \frac{3}{4} \ln(2x^2+6x+5) - \frac{x}{2} \right] \quad (٦٨)$$

$$\frac{x|x|}{2} \quad (٧٠) \quad \frac{1}{2} \sqrt{x-x^2} + \left(x - \frac{1}{2} \right) \arcsin \sqrt{x} \quad (٦٩)$$

المراجع

المراجع العربية

- إبراهيم ديب سرميني. حساب التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية – الجزء الثاني "حساب التكامل" الناشر: المؤلف. الطبعة الثانية (١٤٢٥هـ).
- إبراهيم ديب سرميني. مصطفى خليل دملخي وسعدون إبراهيم عثمان البراهيم. "مقدمة في المعادلات التفاضلية العادية". الناشر: المؤلفون. الطبعة الثانية (١٤٣٣هـ).
- محمد عادل سودان، سلمان عبدالرحمن السلطان وإبراهيم ديب سرميني. حساب التفاضل والتكامل الجزء الأول "مدخل في حساب التفاضل". الناشر: جامعة الملك سعود. الطبعة الخامسة (١٤٢٣هـ).

المراجع الإنجليزية

- Anton, H., *Calculus with Analytic Geometry*. John Wiley, New York, 1980.
- Ellis, R. Gulick, D., *Calculus with Analytic Geometry*. Harcourt Brace Jovanovich Inc., New York, 1978.
- Sherman, K., Stein, *Calculus with Analytic Geometry*. Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1977.
- Swokowski, Olinick Pence. *Calculus*, 6th edition. PWS Publishing Company, Boston, 1994.
- James Stewart, *Calculus Early Transcendentals*. 4th Edition. Brooks/Cole Publishing Company, Pacific Grove, CA, 1999.

ثبت المصطلحات

أولاً: عربي - إنجليزي

أ

Continuity	اتصال (استمرار)
Continuity of a function	اتصال دالة
Continuity on an interval	اتصال على فترة
Continuity on a closed interval	اتصال على فترة مغلقة
Continuity on a set	اتصال على مجموعة
Discontinuity	عدم اتصال
Area	المساحة

ب

Numerator	بسط
Graph	بيان
Graph of function	بيان دالة

ج

Change of variable	تغير المتحول
--------------------	--------------

د

Table	جدول
-------	------

هـ

Product	حاصل ضرب
---------	----------

د

Function(s)	دالة (دوال)
Composite function	دالة التركيب
Sine function	دالة الجيب
Inverse of sine function	دالة الجيب العكسية
Tangent function	دالة الظل
Derivative function	دالة المشتقة
Constant function	دالة ثابتة
Cosine function	دالة جيب التمام
Polynomial function	دالة كثيرة حدود
Real-valued function	دالة حقيقية (عددية)
Periodic function	دالة دورية
Even function	دالة زوجية
Cotangent function	دالة ظل التمام
Inverse function	دالة عكسية
Odd function	دالة فردية
Increasing function	دالة متزايدة
Decreasing function	دالة متناقصة
Inverse trigonometric function	دالة مثلثية عكسية
Concave downward function	دالة محدبة للأسفل
Bounded function	دالة محدودة
Concave upward function	دالة مقعرة
Anti derivative function	دالة أصلية

ز

Pair	زوج
Ordered pair	زوج مرتب

ط

Length of an interval	طول فترة
Length of a line segment	طول قطعة مستقيمة

ع

Number	عدد
Even number	عدد زوجي
Natural number	عدد طبيعي
Prime number	عدد أولي

ف

Interval	فترة
Open closed interval	فترة مغلقة من اليمين
Closed interval	فترة مغلقة
Closed open interval	فترة مغلقة من اليسار
Open interval	فترة مفتوحة

ق

Differentiable	قابلة للاشتقاق
Integrable	قابلة للتكامل
Absolute value	قيمة مطلقة
Average value	قيمة متوسطة

ك

Polynomial	كثيرة حدود
------------	------------

م

Origin	مبدأ الإحداثيات (نقطة الأصل)
Continuous	متصلة (مستمرة)
Variable	متغير
Independent variable	متغير مستقل
Symmetric	تناظر
Set	مجموعة

Set of real numbers	مجموعة الأعداد الحقيقية
Set of negative numbers	مجموعة الأعداد السالبة
Set of negative integer numbers	مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة
Set of integer numbers	مجموعة الأعداد الصحيحة
Set of natural numbers	مجموعة الأعداد الطبيعية
Set of rational numbers	مجموعة الأعداد القياسية (الكسرية)
Set of positive numbers	مجموعة الأعداد الموجبة
Set of positive integer numbers	مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة
Subset	مجموعة جزئية
Empty set	مجموعة خالية
Proper set	مجموعة فعلية
Coordinate axes	محاور إحداثية
Range function	مدى دالة
Perfect square	مربع كامل (تام)
Coordinate plane	مستوى الإحداثيات
Derivative	مشتقة
Discriminant of trinomial	ميز ثلاثي حدود
Curve	منحنى
Slope of secant	ميل القاطع
Axis of revolution	محور الدوران

ن

Coordinate system	نظام إحداثي
Mean-value theorem	نظرية القيمة المتوسطة
Inflection point	نقطة انقلاب
Limit	نهاية
Left-hand limit	نهاية عن يسار
Right-hand limit	نهاية عن يمين

ثانياً: إنجليزي – عربي

A

Absolute value	قيمة مطلقة
Asymptote	مقارب

B

Bounded function	دالة محدودة
------------------	-------------

C

Closed interval	فترة مغلقة
Closed open interval	فترة مغلقة من اليسار
Composite function	دالة التركيب
Concave downward function	دالة محدبة
Concave upward function	دالة مقعرة
Constant function	دالة ثابتة
Continuity	اتصال (استمرار)
Continuity of a function	اتصال دالة
Continuity on a closed interval	اتصال على فترة مغلقة
Continuity on a set	اتصال على مجموعة
Continuity on an interval	اتصال على فترة
Continuous	متصلة (مستمرة)
Coordinate axes	محاور إحداثية
Coordinate plane	مستوى الإحداثيات
Coordinate system	نظام إحداثي
Cosine function	دالة جيب التمام
Cotangent function	دالة ظل التمام
Curve	منحنى

D

Decreasing function	دالة متناقصة
Definite integration	تكامل محدد
Derivative	مشتقة
Derivative function	دالة المشتقة
Difference of two sets	الفرق بين مجموعتين
Differentiable	قابلة للتفاضل
Discontinuity	عدم اتصال
Discriminant of trinomial	ميز ثلاثي حدود
Domain of definition function	مجال (مجموعة تعريف) دالة

E

Empty set	مجموعة خالية
Even function	دالة زوجية
Even number	عدد زوجي
Exponential function	الدالة الأسية
Extreme value	قيمة قصوى

F

Function(s)	دالة (دوال)
Fundamental theorem of calculus	النظرية الأساسية في التكامل

G

General exponential function	الدالة الأسية العادية
Graph	بيان
Graph of a function	بيان دالة

I

Identity function	دالة محايدة
Implicit differentiation	التفاضل الضمني
Increasing function	دالة متزايدة

Indefinite integration	تكامل غير محدد
Independent variable	متغير مستقل
Inequality	متراجحة (متباينة)
Inflection point	نقطة انقلاب
Integrals of rational functions	تكاملات الدوال الكسرية
Integration by parts	تكامل بالتجزئ
Integration by substitution	تكامل بالتعويض
Intersection of sets	تقاطع مجموعات
Interval	فترة
Inverse function	دالة عكسية
Inverse of sine function	دالة الجيب العكسية
Inverse trigonometric function	دالة مثلثية عكسية

L

Left-hand limit	نهاية عن يسار
Length of a line segment	طول قطعة مستقيمة
Length of an interval	طول فترة
Limit	نهاية
Logarithmic and exponential functions	الدوال الأسية واللوغاريتمية
Logarithmic differentiation	التفاضل اللوغاريتمي

M

Mean-value theorem	نظرية القيمة المتوسطة
--------------------	-----------------------

N

Natural logarithmic function	الدالة اللوغاريتمية الطبيعية
Natural number	عدد طبيعي
Norm	نظيم
Norm of partition	نظيم تجزئة
Number	عدد

Numerator	بسط
O	
Odd function	دالة فردية
Open closed interval	فترة مغلقة من اليمين
Open interval	فترة مفتوحة
Ordered pair	زوج مرتب
Origin	مبدأ الإحداثيات (نقطة الأصل)
P	
Pair	زوج
Partial fraction decomposition	التحليل إلى كسور جزئية
Perfect square	مربع كامل (تام)
Period of function	دور دالة
Periodic function	دالة دورية
Polynomial	كثيرة حدود
Polynomial function	دالة كثير حدود
Product	حاصل ضرب
Proper set	مجموعة فعلية
Properties	خواص
R	
Range function	مدى دالة
Real-valued function	دالة حقيقية (عددية)
Regular partition	تجزئة منتظمة
Local maximum value	قيمة عظمى محلية
Local minimum value	قيمة صغرى محلية
Riemann sum	مجموع ريمان
Right-hand limit	نهاية عن يمين

S

Set	مجموعة
Set of negative integer numbers	مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة
Set of integer numbers	مجموعة الأعداد الصحيحة
Set of natural numbers	مجموعة الأعداد الطبيعية
Set of negative numbers	مجموعة الأعداد السالبة
Set of positive numbers	مجموعة الأعداد الموجبة
Set of real numbers	مجموعة الأعداد الحقيقية
Set of positive integer numbers	مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة
Set of rational numbers	مجموعة الأعداد القياسية (الكسرية)
Sine function	دالة الجيب
Slope of secant	ميل القاطع
Subintervals	فترات جزئية
Subset	مجموعة جزئية
Symmetric	متناظران (تان)
Surface of revolution	سطح دوراني

T

Table	جدول
Tangent function	دالة الظل
Techniques of integration	طرق التكامل
The cylindrical shell method	طريقة الشريحة الأسطوانية
The Disc method	طريقة الأقراص
Trigonometric integrals	تكاملات مثلثية
Trigonometric substitutions	تعويضات مثلثية

U

Union of sets	اتحاد مجموعات
---------------	---------------

	V	متغير
Variable		
Volume		حجم

كشاف الموضوعات

أ

- اتصال دالة ١٠٥
- الاتصال عن يمين والاتصال عن يسار ١٠٨
- إجابات نماذج الاختبارات ٥١٢
- اختبار المشتقة الاولى ١٧٦
- الاشتقاق الضمني ١٣٤
- الأشكال المختلفة للقطوع المخروطية في حالتها الانسحابية ٣٦٤
- أمثلة عامة ٣٣٦
- الأمثلة ٢٢٩
- انسحاب منحنى باتجاه أحد المحورين
- الإحداثيين ٥٩
- أوضاع عدم التعيين ٨٥

ب

- بعض المجموعات المستخدمة في هذا الكتاب ٣٤

ت

- تحديد نقطة في الفضاء الإقليدي
- ثلاثي البعد ٣٧٩
- تركيب (تحصيل الدوال) ٦٨
- التطبيقات ٢١٧
- تطبيقات في حساب التكامل باستخدام الإحداثيات الوسيطة والقطبية ٤٦٧
- تعريف المشتقة ١١٨
- التعويضات المثلثية ٢٨٧
- التقدير الدائري للزوايا ١٥
- التقريب الخطي ١٥١
- التقعر والتحدب ١٧٩
- تكامل الدوال الكسرية باستخدام الكسور الجزئية ٢٦٩
- التكامل المحدد ٢٦٥
- التكامل بالتجزئ ٢٦١
- التكامل بالتعويض ٢٥٨

ج

جداول للصيغ الرياضية ٥١٣

ح

الحجوم الدورانية ٤٨١

الحجوم الدورانية بطريقة الأقراص

الدائرية ٣٢٢

حساب الحجوم بطريقة الشرائح

الأسطوانية ٣٢٨

حساب المساحات باستخدام

الاحداثيات الديكارتية ٣١٢

حل المتباينات ٣٥

حل المعادلات المثلثية ٢١

حل المعادلات من الدرجة الثانية ٢٥

خ

خواص الدوال القابلة للاشتقاق ١٦٣

خواص الدوال المتصلة ١١٠

د

الدائرة ١١

الدوال الآسية واللوغاريتمية ٢٤٣

تكامل حاصل ضرب نسبتيين مثلثيتين ٢٧٧

التكامل غير المحدد ٢٥٣

التكاملات المثلثية من الشكل

$$278 \int \sin^m x \cos^n x dx$$

التكاملات المثلثية من الشكل

$$280 \int \tan^m x \sec^n x dx$$

التكاملات المعتلة ٤٥٧

التكاملات من الشكل :

$$\int f \left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots \right] dx$$

٣٠٨

تكاملات من الشكل

$$304 \int f(\sin x, \cos x, \tan x) dx$$

التكاملات من الشكل $310 \int f(e^{ax}) dx$

تمارين عامة

التناظر في المستوى ٥٧

تمارين عامة ٥١٨

التناظر في المستوى ٥٧

ث

ثبت المصطلحات إنجليزي - عربي ٥٢٩

ثبت المصطلحات عربي - إنجليزي ٥٢٥

ط

طريقة نيوتن لإيجاد الجذور التقريبية
للدوال ١٥٥
طول قوس ٤٧٤
طول قوس دائرة ١٦
طول قوس منحن معرف بمعادلته
الديكارتية ٣١٩

ف

الفترات في مجموعة الأعداد
الحقيقية IR ٣٣
فترة التكامل غير محدودة ٤٦١
فترة التكامل محدودة ٤٥٧

ق

قاعدة السلسلة ١٣٢
قاعدة لوبيتال ٤٤٩
القطع الزائد ٣٥٦
القطع المكافئ ٣٤٥
القطع الناقص ٣٥١
القيم القصوى للدوال ١٦٣
القيمة المطلقة ٣٤

الدوال الحقيقية ٥١

الدوال الزائدية ٤٢٩

الدوال الزائدية العكسية ٤٣٨

الدوال الزوجية والفردية والدورية ٥٦

الدوال الضمنية ٣٩٥

الدوال العكسية ٦٤

الدوال المثلثية العكسية ١٤٠

الدوال بمتغيرين أو أكثر ٣٧٧

ر

رسم المنحنيات ١٩١

رسم بعض أنواع الدوال ٦٠

السطوح الدورانية ٤٥٨

صصيغ عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ أو من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ ٤٤٩صيغ عدم التعيين من الشكل 0^0 ، 1^∞ ، ∞^0 ٤٥٢صيغ عدم التعيين من الشكل $\infty - \infty$ أو $0 \times \infty$ ٤٥٠

النظرية الأساسية للاتصال ١٦٧	م
نظرية الشطيرة أو نظرية الساندويتش ٩١	المتباينات ٣٣
نظرية رول ونظرية القيمة المتوسطة ١٧٠	المساحات ٤٦٧
نماذج الاختبارات ٤٩١	مساحة سطح دوراني ٣٣٢
النهايات المثلثية ٩٢	مساحة قطع دائري ١٦
النهايات والاتصال ٣٨١	المستقيمات المقاربة الأفقية والعمودية ١٨٧
نهاية دالة ٧٥	المستقيمات في المستوي ١
النهاية عن يمين والنهاية عن يسار ٨٢	المشتقات الجزئية ٣٨٤
	مشتقات الدوال الجبرية ١٢١
	المشتقات من مراتب عليا ١٣٨
	مشتقة دالة عند نقطة ١١٩
	المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة
	الاولى ٤٠٣
	المعادلات التفاضلية القابلة للفصل ٤٠٢
	معدلات التغير ٢١٧
	المعنى الهندسي للمشتقة ١١٧
	المنحنيات القطبية ٤٠٧
	المنحنيات الوسيطة ٤٢٠

ن

النسب المثلثية لزاوية في الحالة العامة ١٧
النسب المثلثية لزاويا حادة في مثلث قائم ١٢